INTEGRALI DI CAMMINO

consideriamo il propagatore e spezziamo l'esponenziale

$$K(x,t;y,t_0) = \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} | y \rangle = \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}tH} e^{\frac{i t_0}{\hbar}H} | y \rangle$$

$|y\rangle$ è l'autoket dell'operatore posizione x nello schema

(S) $\quad X|y\rangle = y|y\rangle \quad$ di SCHROEDINGER

l'evoluzione dell'operatore nello schema

(H) $\quad X(t) = e^{\frac{itH}{\hbar}} X e^{-\frac{itH}{\hbar}} \quad$ di HEISENBERG

Se parto da S

$$X \cdot |y\rangle = y|y\rangle \Rightarrow X \cdot e^{-\frac{it}{\hbar}H} e^{\frac{it}{\hbar}H} |y\rangle = y|y\rangle$$

ora moltiplico per $e^{\frac{it}{\hbar}H}$ a destra, y è un numero

$$e^{\frac{itH}{\hbar}} X e^{-\frac{itH}{\hbar}} e^{\frac{itH}{\hbar}} |y\rangle = y\, e^{\frac{it}{\hbar}H} |y\rangle$$

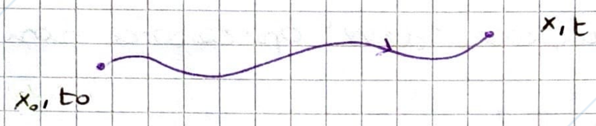
$$X(t)\, |y,t\rangle = y\, |y,t\rangle$$

gli autoket di un certo operatore nello schema di H sono dati dagli operatori nello schema di S evoluti all'indietro nel tempo

dunque posso riscrivere la (1) come

$$K(x, t; x_0, t_0) = \langle x, t \mid x_0, t_0 \rangle$$

posso interpretare il
PROPAGATORE come AMPIEZZA DI TRANSIZIONE
dal punto y al tempo t_0 al punto x al tempo t

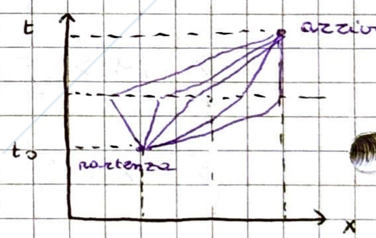


inserisco ora la risoluzione dell'identità $\mathbb{1} = \int dx_1 |x_1\rangle\langle x_1|$

rispetto a un tempo intermedio $t_1 \in [t_0, t]$

$$\langle x, t \mid x_0, t_0 \rangle = \int dx_1 \langle x, t \mid x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 \mid x_0, t_0 \rangle$$

per andare da x_0, t_0, a x, t
posso passare
dall'istante t_1
integrando su tutti
i valori di x_1

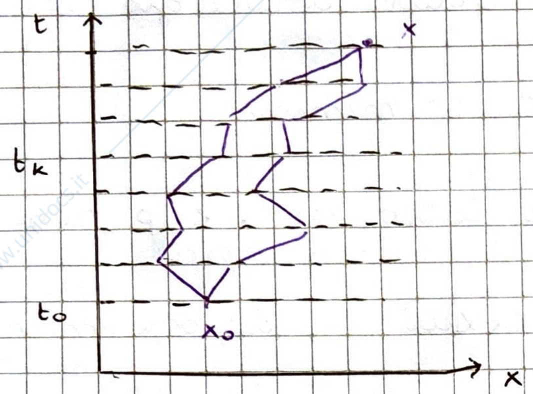


il processo si può iterare n-volte ottenendo

$$\langle x, t \mid x_0, t_0 \rangle = \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \langle x, t \mid x_n, t_n \rangle \langle x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1} \rangle$$

$$\dots \langle x_1, t_1 \mid x_0, t_0 \rangle$$

operativamente stiamo dividendo l'intervallo $[t_0, t]$ in n sottointervalli. A ciascun ~~intervallo~~ istante intermedio t_k dobbiamo integrare su tutti i valori di x_k



Questa idea appartiene a Dirac, il quale, nel tentativo di stabilire un collegamento tra la meccanica classica e il propagatore in m.q. scrive

a $\langle x, t \mid x_0, t_0 \rangle$ "corrisponde" $e^{\frac{i}{\hbar} S}$

essendo S l'AZIONE

Dirac fu il primo a osservare l'analogia che c'è, nella formulazione Hamiltoniana della meccanica tra le PARENTESI DI POISSON (a livello classico) e le PARENTESI DI COMMUTAZIONE (a livello quantist.

QUANTIZZAZIONE CANONI

$$\{x, p\} = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{[\hat{x}, \hat{p}]}{i\hbar} = 1$$

la struttura Hamiltoniana è la stessa a patto di sostituire a funzioni operatori e a poisson commutatori

Dirac tentò poi di formulare una corrispondenza nella formulazione Lagrangiana, senza però spiegare in cosa consistesse l'analogia tra il propagatore e l'esponenziale dell'azione

Nel tentativo di comprendere questa analogia Feynman costruì la teoria degli integrali di cammino

a livello Hamiltoniano il fatto che x e p non commutano comporta l'impossibilità di assegnare alla particella posizione e impulso contemporaneamente: è necessario rinunciare al concetto di traiettoria

Feynman ribaltò il punto di vista: la particella può seguire una traiettoria. La traiettoria però non è più quella classica, ma la particella può seguire contemporaneamente tutte le traiettorie possibili:

PER ANDARE DA x_0, t_0 a x, t DEVO SOMMARE SU TUTTI I CAMMINI L'ESPONENZIALE DELL'AZIONE

$$\langle x, t \mid x_0, t_0 \rangle \sim \sum_{\text{cammini}} e^{i/\hbar S}$$

L'AMPIEZZA DI TRANSIZIONE È DUNQUE LA SOMMA a livello classico però abbiamo un unico cammino, quello che RENDE STAZIONARIA L'AZIONE

$$S(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$$

dipende dagli istanti finale e iniziale, che sono fissati, e dal cammino $x(t)$. Il cammino reale $x_{clas}(t)$ è quello che verifica $\delta S = 0$

La lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

per capire il termine "corrisponde"

Consideriamo due istanti t_n, t_{n-1} molto vicini

, ossia $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ è *infinitesimo*

tra questi istanti il potenziale è praticamente costante e la velocità si può scrivere come velocità media. Il contributo del singolo termine:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\, \mathcal{L}(x,\dot{x})} = e^{i/\hbar \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}\right)^2 - V(x)\right]}$$

$$= e^{i/\hbar \left[\frac{m}{2}\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\Delta t} - V(x_n)\cdot \Delta t\right]} \quad \otimes$$

il parallelismo

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \longleftrightarrow e^{i/\hbar\, S}$$

non può essere un'uguaglianza in quanto a destra abbiamo una quantità adimensionale, mentre a sinistra abbiamo una quantità che ha le dimensioni del *reciproco di una lunghezza*.

infatti $\langle x | x' \rangle = \delta(x - x')$

$$\int dx\, \delta(x - x') \cdot 1 = 1 \qquad [\langle x | x' \rangle] = [L]^{-1}$$

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \frac{1}{L} e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{n-1}}^{t_n} dt\, \mathcal{L}(x,\dot{x})}$$

è facile ~~...~~ vedere che per un intervallo di tempo infinitesimo il fattore moltiplicativo 1/L è dato dal coefficiente di normalizzazione della gaussiana ⊗

$$\frac{1}{L} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}$$

nota la espressione per il singolo step, possiamo tornare alla formula precedente e scrivere il prodotto delle esponenziali nell'integrale (come l'esponenziale della somma

$$\boxed{\langle x, t | x_0, t_0 \rangle = \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}\right)^N e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{m}{2}\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\Delta t} - V(x_n)\Delta t\right]}}$$

la quantità sotto la sommatoria è esattamente l'azione calcolata lungo la linea spezzata $x_0, t_0 \rightsquigarrow x, t$ ($x_0 \to x_1 \to x_n$)

in forma compatta introducendo la misura $\mathcal{D}$

$$\langle x, t | x_0, t_0 \rangle = \int_{(x_0,t_0)\rightsquigarrow(x,t)} \mathcal{D}[x(t)]\, e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}$$

dal punto di vista pratico calcolare è azione su un insieme non numerabile di cammini non è conveniente

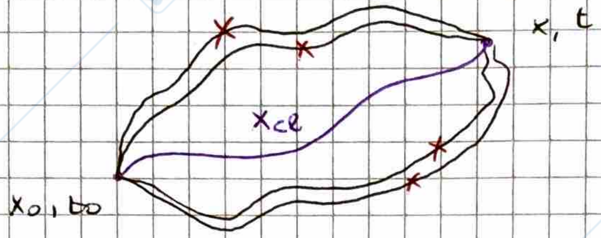
Ciononostante la formulazione di Feynman offre numerosi vantaggi dal punto di vista concettuale

- non è necessario passare dalla quantizzazione canonica: ho a che fare con soli oggetti classici
  non ho più a che fare con OPERATORI
- la formulazione in termini di lagrangiana è utilissima per ~~[illegible]~~ studiare SIMMETRIE
- i cammini di Feynman sono legati direttamente alla teoria perturbativa dipendente dal tempo

In base al principio di corrispondenza, la meccanica classica deve emergere dalla descrizione quantistica nel limite $\hbar \to 0$

In questa descrizione ciò significa che

$S \gg \hbar$ l'azione in gioco è molto maggiore del quanto d'azione in questo limite la somma di cammini nell'esponenziale fa sì che l'esponenziale avrà una fase fortemente oscillante



come conseguenza abbiamo che due cammini vicini (la cui azione differisca per una quantità molto maggiore di $\hbar$) avranno fasi OPPOSTE

I CAMMINI SI CANCELLANO A DUE A DUE COMPENSANDOSI

interferenza distruttiva

l'unico cammino che non si cancella è quello che rende stazionaria l'azione, ossia il cammino classico (in corrispondenza del quale la variazione d'azione non è più lineare ma quadratica) → l'unica interferenza costruttiva)

in questo modo il PRINCIPIO DI AZIONE STAZIONARIA (che è un principio a livello classico) diventa un TEOREMA:

$$\hbar \to 0 \quad \Rightarrow \quad \delta S = 0$$