

Il materiale che segue è uno schematico *riassunto* di parte degli argomenti svolti durante il mio corso di Meccanica Razionale.

Le formule, le definizioni ed i teoremi sono riportati in forma succinta e nel tentativo di mantenere la brevità, il raccordo "logico" tra i vari argomenti risulta, in qualche caso, lacunoso.

Questi appunti costituiscono, quindi, un semplice *promemoria* e, nella preparazione all' esame, non possono e non devono in alcun modo sostituire il libro di testo e gli altri riferimenti bibliografici che sono stati consigliati all'inizio del corso. <sup>[1]</sup>

Augusto Muracchini

## Vettori

Un vettore è un ente geometrico caratterizzato da una direzione, un verso e un modulo. Indichiamo un vettore  $\mathbf{v}$  con la notazione

$$\mathbf{v} = AB$$

ove le due lettere maiuscole indicano, rispettivamente, l'origine (A) e l'estremo (B) di un qualunque segmento orientato che rappresenti il vettore (fig.1). Se il modulo di  $\mathbf{v}$ , che rappresentiamo con  $v$  o con  $|\mathbf{v}|$ , vale 1 il vettore si dice unitario o *versore*.

Un generico vettore  $\mathbf{v}$  si può rappresentare in  $E^3$  come combinazione lineare di tre versori linearmente indipendenti ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ : *base*) tra loro mutuamente perpendicolari

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

I numeri reali  $v_1, v_2, v_3$  (spesso indicati anche con  $v_x, v_y, v_z$ ) rappresentano le *componenti* del vettore  $\mathbf{v}$  lungo tre assi cartesiani ortogonali ( $Ox, Oy, Oz$ ) diretti come  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

Ricordiamo le più comuni operazioni tra vettori.

### Prodotto di un vettore per un numero.

Dato un numero reale  $m$  ed un vettore  $\mathbf{v}$ , il prodotto  $m\mathbf{v}$  è il vettore

$$\mathbf{V} = m\mathbf{v}$$

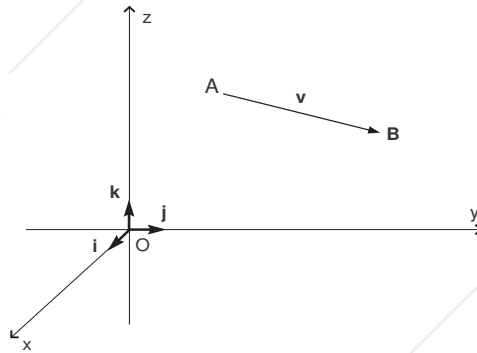
parallelo a  $\mathbf{v}$ , con verso uguale od opposto a  $\mathbf{v}$  a seconda che  $m$  sia positivo o negativo e il cui modulo uguaglia il modulo di  $\mathbf{v}$  moltiplicato per  $|m|$ .

### Prodotto scalare ( $\times$ )

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \cos \theta$$

<sup>1</sup>In ciò che segue indicheremo con l'abbreviazione BRSV il testo consigliato a lezione: Biscari-Ruggeri-Saccomandi-Vianello. *Meccanica Razionale*. Ed. Springer (3<sup>a</sup> ed. 2015).

2

Figura 1: Il vettore AB e la base  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 

È un numero dato dal prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo che essi formano tra loro. Del tutto evidente risulta l'uguaglianza  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Se  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  e i due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  non sono nulli, allora  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono perpendicolari.

Il prodotto scalare gode, tra le altre, della proprietà distributiva

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

e commutativa

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Se consideriamo i versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  si ha

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} ; \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Se  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  e  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ , allora

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_3b_1 - a_1b_3$$

### Prodotto vettoriale ( $\wedge$ )

Il prodotto vettoriale di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  è un vettore  $\mathbf{w}$  il cui modulo  $|\mathbf{w}|$  vale  $ab \sin \theta$ . La sua direzione è perpendicolare al piano individuato da  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  e il suo verso risulta tale che  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{w}$  formino un sistema destrorso. In simboli

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (ab \sin \theta)\mathbf{u}$$

ove  $\mathbf{u}$  è un versore che ha la direzione di  $\mathbf{w}$ . Se  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$  e i vettori non sono nulli, allora  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono paralleli. Il prodotto vettoriale possiede molte proprietà. Elenchiamo le più usate

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$$

Se  $m$  è uno scalare

$$m(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (m\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (m\mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})m$$

Se consideriamo i versori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  si ha

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0 ; \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

Se  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  e  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ , è comodo calcolare  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  mediante il seguente determinante simbolico che si sviluppa secondo la prima riga con le regole note

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

### Prodotti tripli

Il prodotto scalare e quello vettoriale di tre vettori  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  possono dare luogo a due importanti operazioni vettoriali. Precisamente

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$$

che si chiamano, rispettivamente, *prodotto misto* (il cui risultato è un numero) e *doppio prodotto vettoriale* (che è un vettore). Valgono, tra le altre, le seguenti relazioni

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{c} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$$

che esprimono la seguente proprietà: ogni permutazione ciclica dei tre vettori che costituiscono il prodotto misto, così come lo scambio delle operazioni vettoriali, non modifica il risultato.

Un'altra proprietà del prodotto misto che si usa frequentemente è la seguente: condizione necessaria e sufficiente affinché tre vettori non nulli siano complanari è che sia nullo il loro prodotto misto (questa proprietà è conseguenza del fatto che il prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo che ha come spigoli concorrenti in un punto i tre vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ). Il doppio prodotto vettoriale si può esprimere

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} ; (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a}$$

Questa mostra che

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$$

### Vettori applicati

• **Definizione 0.1** Un vettore applicato è la coppia  $(A, \mathbf{v})$  costituita da un vettore  $\mathbf{v}$  e dal suo punto di applicazione  $A$ .

• **Definizione 0.2** Il momento polare di  $(A, \mathbf{v})$  rispetto ad un punto  $Q$  (polo di riduzione) è il vettore (libero)

$$\mathbf{M}_Q = QA \wedge \mathbf{v}$$

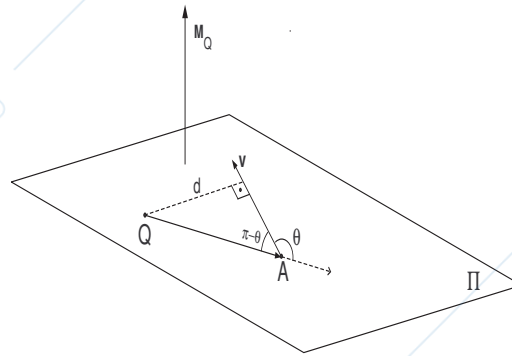


Figura 2: Il momento polare di un vettore applicato.  $\mathbf{M}_Q$  è perpendicolare al piano  $\Pi$  passante per  $Q$  e che contiene  $\mathbf{v}$ .

In modulo (vedi prodotto vettoriale)

$$|\mathbf{M}_Q| = |\mathbf{v}| |QA| \sin \theta = |\mathbf{v}| d$$

ove  $d = |QA| \sin \theta$  è detto *braccio* del vettore  $\mathbf{v}$  rispetto al polo  $Q$  (vedi fig. 2).

Il momento di un vettore varia al variare del polo e/o al variare del punto di applicazione del vettore. Tuttavia sussiste il seguente risultato:

•• **Teorema 0.1** *Il momento rispetto ad un polo  $Q$  di un vettore applicato non cambia se si fa scorrere il vettore lungo la propria retta d'azione.*

• **Definizione 0.3** *Si dice momento assiale del vettore applicato  $(A, \mathbf{v})$ , rispetto ad una retta orientata  $r$  di versore  $\mathbf{u}$ , lo scalare*

$$M_r \stackrel{def}{=} QA \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{u} = M_Q \times \mathbf{u} \quad (Q \in r)$$

Sussiste la proprietà: *il momento assiale  $M_r$  non dipende dalla scelta del punto  $Q$  sull'asse.*

Si noti, poi, che il momento assiale  $M_r$  è nullo o quando il vettore  $\mathbf{v}$  è nullo oppure se il vettore applicato e  $\mathbf{u}$  sono paralleli oppure incidenti.

### Sistemi di vettori applicati (v.a.)

Sono sistemi, che indicheremo con  $\mathcal{S}$ , costituiti da un numero finito  $N$  di vettori applicati (ad esempio, le forze applicate ad un corpo)

$$\mathcal{S} \{(A_s, \mathbf{v}_s); \quad s = 1, 2, \dots, N\}$$

Dato un sistema di v.a. si definiscono il *risultante*, il *momento risultante* (rispetto ad un polo) e il *momento risultante assiale* rispetto ad una retta orientata  $r$

$$\mathbf{R} = \sum_{s=1}^N \mathbf{v}_s, \quad \mathbf{M}_Q = \sum_{s=1}^N QA_s \wedge \mathbf{v}_s, \quad M_r = \sum_{s=1}^N QA_s \wedge \mathbf{v}_s \times \mathbf{u} \quad (Q \in r) \quad (1)$$

$\mathbf{R}$  e  $\mathbf{M}_Q$  sono chiamati *vettori caratteristici* del sistema  $\mathcal{S}$ .

Il momento risultante  $\mathbf{M}_Q$  di un sistema di vettori applicati varia, al variare del polo  $Q$ , in base al seguente teorema:

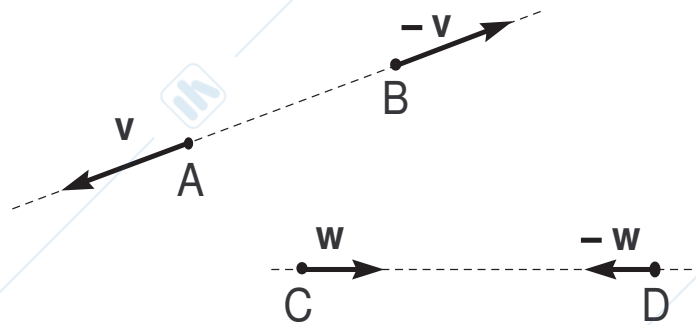


Figura 3: Una coppia di vettori (a) e coppie di braccio nullo (b)

●● **Teorema 0.2 (Legge di distribuzione del momento risultante)** Dato un sistema  $\mathcal{S}$  di vettori applicati il momento risultante  $\mathbf{M}_Q$  varia, al variare del polo, secondo la legge

$$\mathbf{M}_{Q'} = \mathbf{M}_Q + Q'Q \wedge \mathbf{R} \quad (2)$$

dove  $\mathbf{R}$  è il risultante di  $\mathcal{S}$  ed  $\mathbf{M}_{Q'}$ ,  $\mathbf{M}_Q$  i momenti risultanti calcolati rispetto ai poli  $Q'$  e  $Q$ .

In relazione alla (2), si ha poi il seguente

●● **Teorema 0.3** Il momento risultante di un sistema di vettori applicati non dipende dal polo  $Q$  se e soltanto se il risultante  $\mathbf{R}$  risulta nullo ( $\mathbf{R} = 0$ ).

È questo, ad esempio, il caso della coppia:

● **Definizione 0.4** Si dice coppia un sistema di **due** vettori applicati a risultante nullo.

Il fatto che il risultante sia, per definizione, nullo ci assicura che i due vettori sono tra loro paralleli di verso opposto e di eguale modulo (vedi fig. 3).

Il momento della coppia è indipendente dalla scelta del polo (perché  $\mathbf{R} = 0$ ) e può essere calcolato, ad esempio, scegliendo come polo il punto di applicazione di uno dei due vettori della coppia. Si ottiene così

$$\mathbf{M} = QA \wedge \mathbf{v}$$

ossia, in modulo,  $|\mathbf{M}| = |\mathbf{v}|d$  ove il braccio  $d = |QA| \sin \theta$  è uguale alla distanza fra le due rette di azione dei vettori della coppia.

Si può allora dire che: una coppia di vettori (non nulli) ha momento nullo se e solo se il suo braccio è nullo. In tale caso i due vettori sono uguali e contrari e sulla stessa retta d'azione (fig. 3). Per una coppia di braccio nullo si ha  $\mathbf{R} = 0$ ,  $\mathbf{M} = 0$  (sistema equilibrato).

### Invariante scalare

● **Definizione 0.5** Si dice invariante scalare (o trinomio invariante) di un sistema di vettori applicati la quantità scalare

$$J = \mathbf{M}_Q \times \mathbf{R}$$

ove  $\mathbf{M}_Q$  e  $\mathbf{R}$  sono, rispettivamente, il momento risultante e il risultante del sistema di vettori applicati.

6

La denominazione di invariante deriva dal fatto che

•• **Teorema 0.4** *L'invariante scalare  $J$  non dipende dalla scelta del polo  $Q$ .*

### Asse centrale di un sistema di vettori applicati

Si può dimostrare (si veda BRSV, pag.125) che esiste un luogo geometrico di punti dello spazio che, assunti come poli di riduzione, rendono il momento risultante di un sistema di vettori applicati parallelo al risultante  $\mathbf{R}$  (supposto non nullo). Tale luogo è una retta che si chiama *asse centrale* del sistema di vettori applicati. Tale retta ha anche altre proprietà che si possono dimostrare e che riassumiamo nel seguente enunciato:

l'asse centrale è la retta costituita dai punti dello spazio, che presi come poli di riduzione, rendono il momento risultante di un sistema di vettori applicati parallelo al risultante e di minimo modulo. Tale retta è parallela al risultante.

L'asse centrale ha la seguente equazione vettoriale:

$$OP(\lambda) = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O}{R^2} + \lambda \mathbf{R}$$

ove  $\lambda$  è un parametro reale.

### Sistemi di vettori applicati equivalenti

• **Definizione 0.6** *Due sistemi di vettori applicati  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  si dicono equivalenti se hanno gli stessi vettori caratteristici.*

Cioè

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}'_0$$

• **Definizione 0.7** *Un sistema di vettori applicati si dice equivalente a zero (o equilibrato o nullo) se ha risultante e momento risultante nulli (esempio: una coppia di braccio nullo).*

Dato un sistema  $\mathcal{S}$  di vettori applicati le seguenti *operazioni elementari* permettono sempre di ridurlo ad un sistema ad esso equivalente:

- l'aggiunta o la soppressione di una o più coppie di braccio nullo;
- la sostituzione di più vettori applicati in uno stesso punto con il loro vettore risultante applicato nello stesso punto o, viceversa, la decomposizione di un vettore applicato in un punto in più vettori applicati nello stesso punto e il cui risultante sia uguale al vettore di partenza (composizione e decomposizione);
- Il trasporto di un vettore lungo la propria retta d'azione.

È, per questo, che due sistemi equivalenti si dicono anche *riducibili l'uno all'altro*.

Esistono due importanti teoremi che stabiliscono l'equivalenza di un generico sistema di vettori applicati con un sistema più semplice:

$\Sigma$	Polo di riduzione <u>qualsiasi</u>	Polo di riduzione <u>sull'asse centrale</u>
a) $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ , $J \neq 0$	vettore applicato + coppia	v.a. + coppia di <b>momento minimo</b>
b) $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ , $J = 0$	vettore applicato + coppia	vettore applicato
c) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ , $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$	coppia	non esiste l'asse centrale
d) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ , $\mathbf{M} = \mathbf{0}$	coppia di braccio nullo (sistema equilibrato)	non esiste l'asse centrale

Figura 4: Vari casi di riducibilità di un sistema di vettori applicati.

●● **Teorema 0.5** Quando l'invariante scalare  $J$  di un sistema di vettori applicati è uguale a zero allora tale sistema è equivalente ad un solo vettore, applicato ad un punto dell'asse centrale, (quando  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ ) o ad una sola coppia (quando  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ) (o è equilibrato quando si annullano sia il risultante che il momento);

●● **Teorema 0.6** Quando  $J \neq 0$  ogni sistema di vettori applicati è equivalente ad un vettore (applicato in un punto dell'asse centrale) e ad una coppia.

Nella tabella di fig. 4 sono riassunti i vari casi di riducibilità di un sistema di vettori applicati, illustrati dai due teoremi appena enunciati.

### Sistemi di vettori piani

● **Definizione 0.8** Un sistema di vettori applicati è detto piano se tutte le rette di applicazione dei vettori appartengono ad uno stesso piano.

●● **Teorema 0.7** Ogni sistema di vettori piano ha invariante scalare nullo.

Pertanto, un sistema piano è equivalente ad un solo vettore applicato in un punto dell'asse centrale quando  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  (pur di scegliere il polo  $Q$  appartenente all'asse centrale) o ad una sola coppia quando  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ .

### Sistemi di vettori paralleli

● **Definizione 0.9** Chiamiamo sistema di vettori applicati paralleli, quello in cui tutte le rette di azione dei vettori sono parallele.

●● **Teorema 0.8** Un sistema di vettori paralleli ha invariante scalare  $J = 0$ .

Ne segue che un sistema di vettori paralleli è equivalente ad un solo vettore applicato in un punto dell'asse centrale se  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  oppure ad una sola coppia quando  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ .

Per un sistema di vettori paralleli si introduce un concetto molto importante: il concetto di *centro*.

Esso è un punto,  $C$ , che appartiene all'asse centrale ed è individuato dal vettore

$$OC = \frac{1}{R} \sum_{s=1}^n v_s OA_s$$

con  $\sum_{s=1}^n v_s = R$  (modulo del risultante). In componenti

$$x_C = \frac{1}{R} \sum_{s=1}^n v_s x_s; \quad y_C = \frac{1}{R} \sum_{s=1}^n v_s y_s; \quad z_C = \frac{1}{R} \sum_{s=1}^n v_s z_s$$

essendo  $OC = (x_C, y_C, z_C)$ ,  $OA_s = (x_s, y_s, z_s)$ .

Tale punto, per la sua proprietà di appartenere all'asse centrale e di *non mutare qualunque sia la direzione comune dei vettori*, è il punto più conveniente per ridurre il sistema di vettori paralleli ad un vettore applicato  $(C, \mathbf{R})$ .

### Cinematica del punto

#### Cinematica del punto

La descrizione del moto di un corpo a prescindere dalle cause che tali moti determinano, costituisce quella parte della meccanica che si chiama *cinematica*.

Se il corpo è schematizzato con un punto P il suo moto è conosciuto quando sia nota la posizione, in funzione del tempo  $t$ , rispetto ad un assegnato sistema di riferimento di origine O. Ciò significa conoscere la funzione vettoriale

$$OP = OP(t) \tag{3}$$

Assunto come riferimento un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Ox_1x_2x_3$  (di versori  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  rispettivamente), la (3) equivale, in termini scalari, a conoscere le coordinate di P ad ogni istante

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ x_3 = x_3(t) \end{cases} \implies x_i = x_i(t) \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Le (4) rappresentano, geometricamente, le equazioni parametriche (il parametro è il tempo  $t$ ) della curva  $\gamma$  descritta da P e che si chiama *traiettoria* o *orbita* del moto.

Il moto di P su  $\gamma$  può essere descritto, anziché in termini della variabile temporale  $t$ , mediante l'*ascissa curvilinea*  $s$  che è individuata fissando *sulla curva* una origine  $O^*$  e un verso positivo di percorrenza (vedi fig.(5)). In tal modo  $s$  rappresenta la lunghezza (in una certa unità di misura) dell'arco di curva compreso tra  $O^*$  e il punto P. Mediante questo parametro la traiettoria di P è individuata (in modo puramente geometrico) dalla equazione vettoriale

$$OP = OP(s) \implies x_i = x_i(s) \quad i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

La legge che regola il cambiamento di parametro da  $t$  ad  $s$  è rappresentata da un legame funzionale (scalare) del tipo

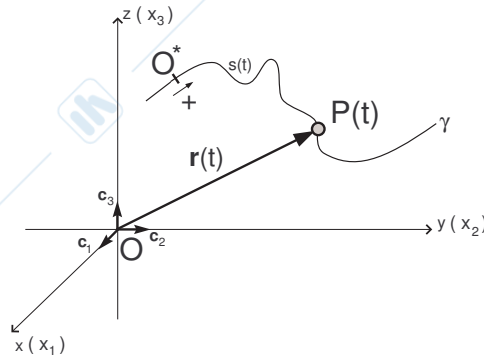


Figura 5: La rappresentazione "geometrica" del moto di P.

$$s = s(t) \quad (6)$$

che prende il nome di *equazione (o legge) oraria del moto*. Ponendo la (6) nella (5) si ottiene  $OP$  come funzione composta di  $t$  mediante  $s$

$$OP = OP(s(t))$$

La (6) definisce le seguenti grandezze caratterizzanti il moto di P:

a) *velocità scalare istantanea* del punto P

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \equiv \dot{s} \quad \left( \cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

b) *accelerazione scalare istantanea* di P

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \equiv \ddot{s}.$$

Ma, velocità ed accelerazione non sono completamente note assegnandone il modulo. Infatti, trattandosi di grandezze vettoriali esse sono caratterizzate anche da una direzione e da un verso. È, pertanto, opportuno definire la velocità e l'accelerazione *vettoriali* di P. Ciò si può fare a partire dall'equazione vettoriale (3) e si ha

a') *velocità vettoriale istantanea* di P

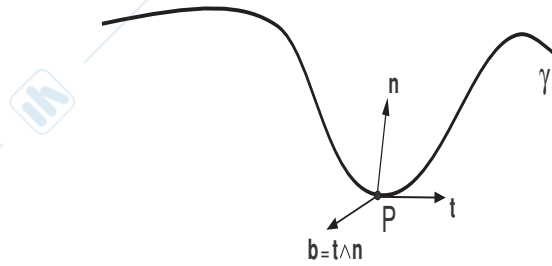
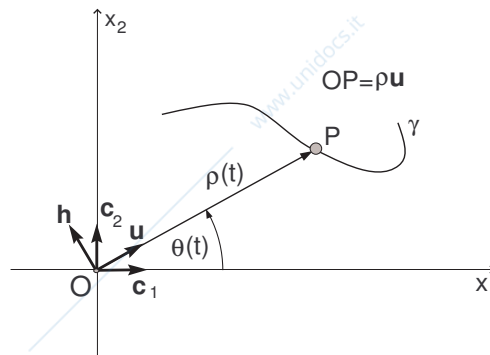
$$\mathbf{v}(t) = \frac{dP}{dt} \equiv \dot{P} \quad (7)$$

b') *accelerazione vettoriale istantanea* di P

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2} \equiv \ddot{P} \quad (8)$$

Ricordando che  $OP(t) = x_1(t)\mathbf{c}_1 + x_2(t)\mathbf{c}_2 + x_3(t)\mathbf{c}_3$ , la (7) e la (8) si possono anche esprimere nella forma

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}_1(t)\mathbf{c}_1 + \dot{x}_2(t)\mathbf{c}_2 + \dot{x}_3(t)\mathbf{c}_3 = \dot{x}_i(t)\mathbf{c}_i \quad (1 \leq i \leq 3)$$

Figura 6: Il triedro di Frenet relativo al punto  $P$  di una curva sghemba.Figura 7: Il moto di un punto  $P$  in coordinate polari.

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{x}_1(t)\mathbf{c}_1 + \ddot{x}_2(t)\mathbf{c}_2 + \ddot{x}_3(t)\mathbf{c}_3 = \ddot{x}_i(t)\mathbf{c}_i \quad (1 \leq i \leq 3)$$

da cui risulta chiaro che le componenti del vettore velocità  $\mathbf{v}$  sono  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  e quelle del vettore accelerazione  $\mathbf{a}$  le  $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3$ .

Dalla

$$OP = OP(s(t))$$

è possibile ottenere la seguente *rappresentazione intrinseca* di velocità ed accelerazione

$$\mathbf{v}(t) = \dot{s}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}(t) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{n} \quad (9)$$

ove  $\boldsymbol{\tau}(s) = dP/ds$  si chiama *versore tangente* alla traiettoria in  $P$  e  $\mathbf{n}(s) = \rho(d\boldsymbol{\tau}/ds)$  si chiama *versore normale principale* ( $\rho$  è il raggio di curvatura della traiettoria nel punto  $P$  considerato).

Insieme ai versori  $\boldsymbol{\tau}$  ed  $\mathbf{n}$  è opportuno introdurre un versore  $\mathbf{b}$  (*binormale*) tale che  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{n}$ . In tale modo si ottiene una base ortonormale levogira legata punto per punto alle proprietà della curva descritta da  $P$ . Tale terna prende il nome di *triedro di Frenet* o *terna intrinseca* (figura 6).

Il moto di un punto  $P$  si dice *piano* quando la sua traiettoria giace su un piano.

È conveniente, in tale situazione, riferire il moto ad un sistema di coordinate polari  $\rho$  (raggio vettore) e  $\theta$  (anomalia) (vedi figura (7)) Si dimostra (BRSV pag.6) che la velocità e l'accelerazione di  $P$  si possono rappresentare così

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dP}{dt} = \dot{\rho}\mathbf{u} + \rho\dot{\theta}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\mathbf{u} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\mathbf{h}$$

### Vincoli

• **Definizione 0.10** *Un punto o un sistema di punti si dice vincolato se le posizioni e/o le velocità sono legate da relazioni che ne limitano la variabilità.*

Si chiama *vincolo* ogni dispositivo atto a limitare le posizioni e/o le velocità dei punti del sistema. La presenza di vincoli in un sistema meccanico è esprimibile, **matematicamente**, mediante una o più relazioni tra le coordinate  $\mathbf{r}$  e le velocità  $\dot{\mathbf{r}}$  degli  $N$  punti del sistema, del tipo  $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \geq 0$ . Tali relazioni si chiamano *equazioni di vincolo*.

Esiste una classificazione dei vincoli (basata sulla struttura delle equazioni di vincolo): si rimanda al capitolo 4 di BRSV per una trattazione completa della teoria dei sistemi vincolati. Ma, in particolare è da ricordare, per la sua importanza, il vincolo olonomo (o *di posizione*) caratterizzato dal fatto che la sua rappresentazione analitica è esprimibile in forma finita (non contiene, cioè, derivate) o è riconducibile a tale forma. In caso contrario il vincolo è anolonomo (o *cinematico* o *di mobilità*).

Un risultato fondamentale che si stabilisce per un sistema olonomo (cioè soggetto a soli vincoli olonomi) consiste nel fatto che è possibile individuarne, in ogni istante, la configurazione mediante un numero,  $n$ , di parametri tra loro indipendenti,  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ , che sono chiamati *coordinate lagrangiane* (o *generalizzate*). Il numero  $n$  di tali parametri costituisce il numero di *gradi di libertà* del sistema.

Allora, gli  $N$  punti di un sistema olonomo possono essere identificati mediante le seguenti relazioni

$$OP_s = OP_s(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t); t) \quad (s = 1, 2, \dots, N).$$

e, conseguentemente, le velocità dei singoli punti  $P_s$  si rappresentano

$$\mathbf{v}_s = \frac{dOP_s(q_j(t), t)}{dt} = \frac{\partial P_s}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

Si possono considerare vari tipi di spostamenti infinitesimi di un sistema olonomo.

• **Definizione 0.11 (Spostamento possibile (o reale))** *Uno spostamento reale è uno spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli e della loro eventuale (nel caso di vincoli reonomi) dipendenza dal tempo.*

Si ha

$$dP_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial P_s}{\partial t} dt$$

• **Definizione 0.12 (Spostamento virtuale)** *Uno spostamento virtuale è un qualsiasi spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli ma non della loro eventuale dipendenza dal tempo.*

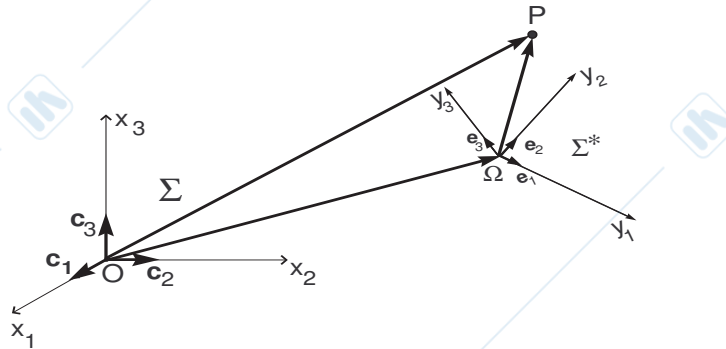


Figura 8: Il punto P nei sistemi di riferimento fisso e solidale.

Si ha

$$\delta P_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_j} \delta q_j \quad (10)$$

### Cinematica del corpo rigido

• **Definizione 0.13 (Corpo rigido)** Si dice rigido un sistema  $\mathcal{C}$  costituito di un insieme di punti tale che la distanza tra due qualsiasi di essi non possa variare nel tempo.

Cioè

$$|PQ| = d = \text{costante} \quad (\forall P, Q \in \mathcal{C}; \forall t)$$

Ad un corpo rigido si può sempre associare una *terna* (o riferimento) *solidale*.

Studiare il moto di un corpo rigido rispetto ad un osservatore (fisso) è, in sostanza, equivalente a studiare il moto di una terna  $\Sigma^*(\Omega, y_1 y_2 y_3)$  solidale col corpo rispetto ad una terna fissa  $\Sigma(O, x_1 x_2 x_3)$  collegata all'osservatore a cui il moto del corpo rigido è riferito.

Lo studio *cinematico* del moto di un corpo rigido è, in tal modo, ricondotto nelle sue linee essenziali al ben noto problema geometrico consistente nello studio delle proprietà connesse alle trasformazioni legate al passaggio da una terna di assi cartesiani ortogonali ad un'altra. Considerando un punto P solidale con il sistema rigido in moto, si può scrivere che (vedi fig. 8)

$$OP = O\Omega + \Omega P = O\Omega + y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3 = O\Omega + y_k \mathbf{e}_k \quad (11)$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = x_{\Omega_1} + \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 = x_{\Omega_2} + \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 \\ x_3 = x_{\Omega_3} + \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3 \end{cases} \quad ; \quad \implies x_i = x_{\Omega_i} + \alpha_{ik}y_k \quad (12)$$

Le (12) esprimono il legame tra le coordinate del punto P nei due sistemi  $\Sigma$  e  $\Sigma^*$  note che siano le coordinate (rispetto a  $\Sigma$ ) del punto  $\Omega$  e le nove quantità

$$\alpha_{ik} = \mathbf{c}_i \times \mathbf{e}_k \quad (13)$$

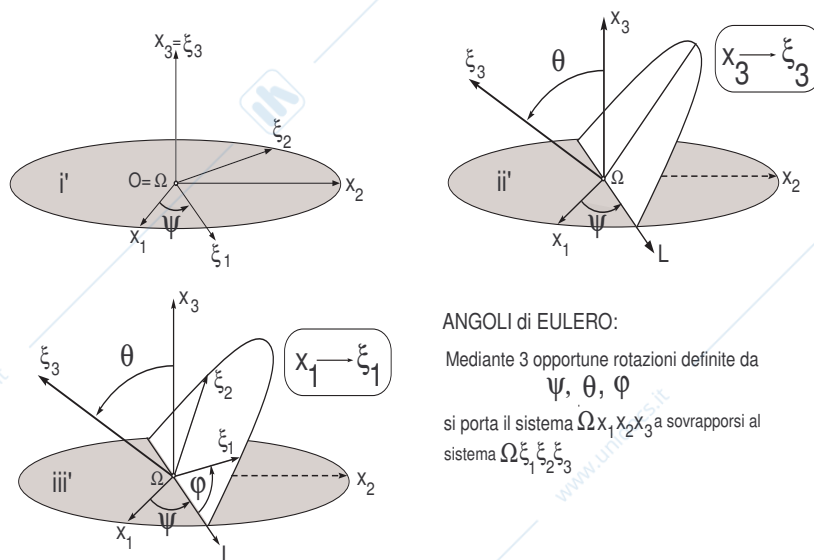


Figura 9: Gli angoli di Eulero.

che rappresentano il coseno dell'angolo che l'asse  $x_i$  (di versore  $\mathbf{c}_i$ ) della terna fissa  $\Sigma$  forma con l'asse  $y_k$  (di versore  $\mathbf{e}_k$ ) della terna solidale  $\Sigma^*$  (ossia, l'orientamento di  $\Sigma^*$  rispetto a  $\Sigma$ ).

Le nove quantità  $\alpha_{ik}$  sono chiamate (*coseni direttori*) e possono essere pensate come gli elementi di una matrice  $\mathcal{R}$  nota come *matrice di rotazione*. Gli elementi  $\alpha_{ik}$  non sono tra loro indipendenti ma sono legati dalle seguenti sei *condizioni di ortogonalità*

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (14)$$

ove  $\delta_{jk}$  è il *delta di Kronecker* così definito

$$\delta_{jk} = 0 \quad (\text{se } j \neq k), \quad \delta_{jk} = 1 \quad (\text{se } j = k)$$

Dalle (12) si deduce che per individuare la posizione di un corpo rigido, libero di muoversi nello spazio, rispetto ad un sistema fisso occorrono 6 parametri indipendenti: le 3 coordinate della origine  $\Omega$  del sistema solidale e 3 coseni direttori (i coseni direttori sono nove ma sono tra loro legati dalle sei condizioni (14)). Nelle applicazioni è comodo utilizzare anzichè tre dei coseni direttori, 3 angoli tra loro indipendenti che si chiamano *angoli di Eulero*.

Si dimostra che esiste una corrispondenza localmente biunivoca tra i valori degli angoli di Eulero e gli orientamenti che può assumere il corpo rigido e che, dati i valori degli angoli, è possibile fare coincidere la terna fissa con la terna solidale mediante tre successive rotazioni eseguite in un ordine ben definito. (la fig.9 mostra i tre angoli di Eulero  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  e le tre rotazioni che portano a coincidere i due sistemi). Si possono ricavare le seguenti espressioni che esprimono il legame tra i versori  $\mathbf{e}_i$  della base solidale e quelli  $\mathbf{c}_k$  della base fissa

$$\mathbf{e}_1 = (\cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi)\mathbf{c}_1 + (\cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi)\mathbf{c}_2 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{c}_3$$

14

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 &= (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi) \mathbf{c}_1 - (\sin \varphi \sin \psi - \cos \theta \cos \varphi \cos \psi) \mathbf{c}_2 + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{e}_3 &= \sin \theta \sin \psi \mathbf{c}_1 - \sin \theta \cos \psi \mathbf{c}_2 + \cos \theta \mathbf{c}_3 \end{aligned}$$

### Velocità angolare di un corpo rigido

Il vettore velocità angolare costituisce una grandezza fondamentale nello studio della cinematica e della dinamica di un corpo rigido e si rappresenta a partire dal seguente teorema (*Teorema di Poisson*)

•• **Teorema 0.9** Sia  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  una terna ortonormale solidale con un corpo rigido. Esiste ed è unico un vettore  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$  tale che

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (15)$$

Le (15) prendono il nome di *formule di Poisson*.

Si dimostra (BRSV pp. 18-20) che il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  ha la rappresentazione

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{e}_i \wedge \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \right)$$

Nello sviluppo della dinamica è necessario rappresentare il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  sulla base solidale  $\Omega \xi_1 \xi_2 \xi_3$  e in funzione degli angoli di Eulero. Si trova che ( $p$  rappresenta la componente di  $\boldsymbol{\omega}$  sull'asse solidale  $\xi_1$ ,  $q = \omega_{\xi_2}$  e  $r = \omega_{\xi_3}$ )

$$p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta, \quad q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta$$

### Velocità dei punti di un corpo rigido

Derivando rispetto al tempo le (11) e tenendo conto delle (15), si ricava *legge di distribuzione delle velocità*

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_\Omega(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \Omega P$$

che permette di determinare la velocità di un generico punto del corpo rigido nota che sia la velocità di un altro punto qualsivoglia,  $\Omega$  (*polo*), del corpo ed il vettore velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ . Partendo da essa si possono ottenere alcuni importanti risultati relativi alla cinematica del corpo rigido:

•

$$dP = d\Omega + d\boldsymbol{\psi} \wedge \Omega P, \quad \delta P = \delta\Omega + \delta\boldsymbol{\psi} \wedge \Omega P$$

che esprimono, rispettivamente, lo spostamento elementare reale e virtuale del generico punto P del corpo rigido ( $d\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\omega} dt$ : vettore rotazione infinitesima);

• Se  $\mathbf{w}$  è un vettore solidale con la terna  $\Sigma^*$  (ovvero con un corpo rigido) si ha

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{w}$$

che fornisce, dunque, la derivata temporale (rispetto al sistema fisso) di un vettore solidale con un corpo rigido;

- $$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \Omega P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P) \quad (16)$$

che rappresenta la legge di distribuzione delle accelerazioni dei punti di un corpo rigido.

### Vari tipi di moti rigidi

I moti di un corpo rigido si possono classificare in base a certe caratteristiche del moto stesso. I diversi tipi di moti rigidi che si possono presentare, in un intervallo di tempo  $t \in [t_1, t_2]$ , sono i seguenti:

- moto *traslatorio* , moto *rototraslatorio* , moto *rotatorio* , moto *elicoidale*.

### Atto di moto di un sistema rigido

In Meccanica Razionale è, però, molto spesso utile considerare il moto di un corpo rigido, limitatamente ad un particolare istante che indichiamo con  $t$ . Più precisamente:

- **Definizione 0.14** *Si chiama atto di moto (o stato cinetico) di un corpo rigido, la distribuzione delle velocità dei suoi punti ad un dato istante.*

Gli atti di moto rigidi si possono classificare servendosi delle leggi di distribuzione delle velocità. Precisamente:

- **Definizione 0.15** *Un atto di moto si dice traslatorio quando, all'istante considerato  $t$ , tutti i punti hanno la stessa velocità*

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_\Omega(t) \quad \forall P, \Omega \in \mathcal{C}$$

- **Definizione 0.16** *Un atto di moto è rototraslatorio quando esiste una retta  $\mathbf{a}$  solidale con il corpo rigido i cui punti, all'istante considerato, hanno la stessa velocità.*

Vale allora

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_\Omega(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \Omega P \quad (\text{con } \boldsymbol{\omega} // \mathbf{a})$$

- **Definizione 0.17** *Un atto di moto è rotatorio quando esiste una retta  $\mathbf{a}$  solidale con il corpo rigido i cui punti, all'istante  $t$ , hanno velocità nulla.*

La legge di distribuzione delle velocità ha, ora, la forma

$$\mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \Omega P$$

- **Definizione 0.18** *Un atto di moto è elicoidale quando esiste una retta  $\mathbf{a}$  solidale con il corpo rigido i cui punti, all'istante  $t$ , hanno tutti la stessa velocità parallela ad  $\mathbf{a}$ .*

16

Si ha, in questo caso,

$$\mathbf{v}_P(t) = \tau(t)\mathbf{e}_3 + \omega(t)\mathbf{e}_3 \wedge \Omega P$$

Riguardo agli atti moto di un sistema rigido, sussiste il seguente teorema fondamentale (per la dimostrazione si veda BRSV pag. 33.).

●● **Teorema 0.10 (di Mozzi)** *L'atto di moto rigido più generale è quello elicoidale.*

La discussione relativa ai moti rigidi e alla loro classificazione è vasta e, ovviamente, molto più articolata di quella precedente. Si rinvia per l'approfondimento di questo importante argomento a BRSV pp. 9-37.

### Cinematica dei moti relativi

La velocità e l'accelerazione non sono grandezze fisiche assolute ma dipendono dall'osservatore del moto. Il problema del moto relativo consiste, allora, nel determinare quale forma assuma il legame tra il moto di un punto  $P$  in due diversi sistemi di riferimento (uno fisso o *assoluto* e l'altro mobile o *relativo*; per le dimostrazioni dei teoremi che seguono si veda BRSV pp. 39-45). Alla base di questo studio si pone il seguente teorema

●● **Teorema 0.11 (di derivazione relativa)** *La derivata temporale di un generico vettore  $\mathbf{w}$  calcolata da un osservatore fisso ( $\Sigma$ ) è legata alla derivata rispetto all'osservatore mobile ( $\Sigma'$ ) dalla relazione*

$$\frac{d^{(\Sigma)} \mathbf{w}}{dt} = \frac{d^{(\Sigma')} \mathbf{w}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{w} \quad (17)$$

Mediante esso si dimostra che

$$\mathbf{v}^{(a)} = \mathbf{v}^{(r)} + \mathbf{v}^{(\tau)}$$

ove  $\mathbf{v}^{(r)}$  rappresenta la *velocità relativa* di  $P$ , cioè, la velocità di  $P$  rispetto al sistema mobile. La velocità

$$\mathbf{v}^{(\tau)} = \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P$$

si chiama *velocità di trascinamento* di  $P$  e rappresenta la velocità che tale punto avrebbe, rispetto all'osservatore assoluto  $\Sigma$ , se nell'istante considerato fosse solidale (rigidamente collegato) col sistema mobile  $\Sigma'$ . Vale, in definitiva, il seguente *Teorema di Galileo*:

●● **Teorema 0.12** *La velocità assoluta di un punto è data, in ogni istante, dalla somma della velocità relativa e di trascinamento.*

Per l'accelerazione di  $P$  si ha

$$\mathbf{a}^{(a)} = \mathbf{a}^{(r)} + \mathbf{a}^{(\tau)} + \mathbf{a}^{(c)} \quad (18)$$

ove  $\mathbf{a}^{(c)} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^{(r)}$  si dice *accelerazione di Coriolis*, mentre

$$\mathbf{a}^{(\tau)} = \mathbf{a}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \Omega P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P)$$

si chiama *accelerazione di trascinamento* ed ha la stessa forma dell'accelerazione di un punto del corpo rigido (si veda la (16)) e si può definire come l'accelerazione che avrebbe  $P$  (rispetto a  $\Sigma$ !) se fosse rigidamente collegato con  $\Sigma'$ . La (18) costituisce il *Teorema di Coriolis*:

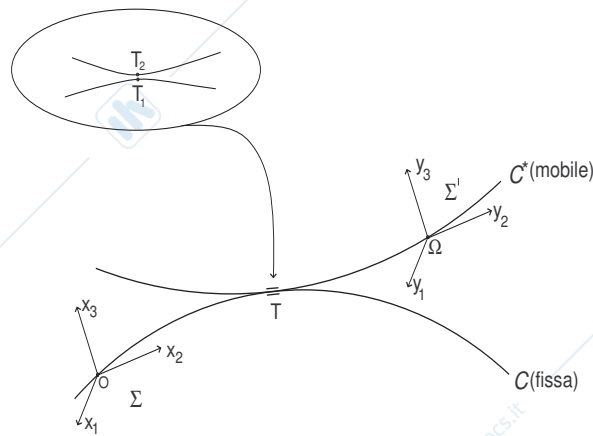


Figura 10: Due curve regolari in moto relativo l'una rispetto all'altra; il punto  $T$  percorre la curva  $C$  rispetto all'osservatore fisso  $\Sigma$  e la curva  $C^*$  rispetto all'osservatore mobile  $\Sigma'$ .

●● **Teorema 0.13** *L'accelerazione assoluta di un punto è data in ogni istante, dalla somma dell'accelerazione relativa, di quella di trascinamento e di quella di Coriolis.*

Anche per la velocità angolare di un corpo rigido vale un teorema formalmente analogo al teorema di composizione delle velocità:

●● **Teorema 0.14** *La velocità angolare assoluta di un corpo rigido è la somma vettoriale delle velocità angolari relative e di trascinamento*

$$\boldsymbol{\omega}^{(a)} = \boldsymbol{\omega}^{(r)} + \boldsymbol{\omega}^{(\tau)}$$

ove  $\boldsymbol{\omega}^{(\tau)}$  rappresenta la velocità angolare di trascinamento, ossia, la velocità angolare che il corpo rigido avrebbe se, nell'istante considerato, fosse solidale con il sistema relativo (risulta ovvio che  $\boldsymbol{\omega}^{(\tau)} = \boldsymbol{\omega}$  essendo quest'ultima la velocità angolare del sistema relativo).

### Mutuo rotolamento di due curve rigide

I risultati della cinematica relativa ci consentono di esaminare il moto di due curve (o due superfici) rigide che *rotolano* l'una sull'altra.

Consideriamo due curve regolari in moto relativo l'una rispetto all'altra (vedi fig. 10). Una delle due curve, (sia essa  $C$ ) è, cioè, supposta fissa mentre la seconda ( $C^*$ ) si muove mantenendo sempre il contatto con la prima almeno in un punto  $T$ .

Nelle condizioni suddette il moto di  $C^*$  su  $C$  si dice *moto di rotolamento*.

Si definisce velocità di *strisciamento* ( $\mathbf{v}_T^{(s)}$ ) di  $C^*$  in  $T$  la velocità, rispetto a  $C$ , di quel punto, appartenente a  $C^*$ , che nell'istante considerato si trova sovrapposto a  $T$ . Dai risultati del precedente paragrafo risulta chiaramente (vedi anche fig.10) che la velocità di strisciamento coincide con la velocità di trascinamento di  $T$ .

Quindi, in base al teorema di Galileo,

$$\mathbf{v}_T^{(s)} = \mathbf{v}_T^{(a)} - \mathbf{v}_T^{(r)} \quad (19)$$

ove  $\mathbf{v}_T^{(a)}$  è la velocità assoluta di  $T$  (nel suo moto su  $C$ ) e  $\mathbf{v}_T^{(r)}$  la sua velocità relativa (nel moto su  $C^*$ ).

18

• **Definizione 0.19** Il moto di  $\mathcal{C}^*$  su  $\mathcal{C}$  si dice di puro rotolamento se la velocità di strisciamento nel punto di contatto è nulla.

In tal caso  $\mathbf{v}_T^{(s)} = 0$  e, dalla (19),

$$\mathbf{v}_T^{(a)} = \mathbf{v}_T^{(r)} \quad (20)$$

Se la velocità assoluta e relativa si rappresentano in forma intrinseca (vedi (9)<sub>1</sub>),

$$\mathbf{v}_T^{(a)} = \dot{s}^{(a)} \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{v}_T^{(r)} = \dot{s}^{(r)} \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \dot{s}^{(a)} = \dot{s}^{(r)} \Rightarrow s^{(a)}(t) - s_o^{(a)} = s^{(r)}(t) - s_o^{(r)}$$

che esprime il fatto che nel moto di puro rotolamento di una curva rigida mobile su una curva rigida fissa, il punto di contatto  $T$  percorre, sulle due curve, archi uguali in tempi uguali. Si noti che essa esprime anche la proprietà fondamentale del vincolo di puro rotolamento: si tratta di un vincolo olonomo.

### Moti rigidi piani

• **Definizione 0.20** Un moto rigido è piano se esiste un piano ( $\pi'$ ) solidale con il corpo rigido che si mantiene sempre parallelo ed equidistante ad un piano ( $\pi$ ) fisso (piano direttore).

In conseguenza di questa definizione si dimostra il seguente

•• **Teorema 0.15** Un sistema in moto rigido piano possiede atto di moto

- o traslatorio
- o rotatorio

La rotazione avviene intorno ad un asse istantaneo ortogonale al piano  $\pi'$ . Si dà, allora, la seguente

• **Definizione 0.21** Si chiama centro istantaneo di rotazione il punto di intersezione dell'asse istantaneo di rotazione con il piano del moto.

Indicando con  $C$  tale punto e con  $P$  un generico punto del piano direttore potremo scrivere

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge CP$$

che mostra che il vettore velocità di un qualsiasi punto  $P$  del piano direttore è ortogonale alla congiungente tale punto con il centro istantaneo di rotazione  $C$ . Ne deriva il seguente:

•• **Teorema 0.16 (di Chasles)** Siano  $A$  e  $B$  due punti di un corpo rigido in moto piano. Se in un dato istante le normali, nel piano direttore, alle velocità  $\mathbf{v}_A$  e  $\mathbf{v}_B$  passanti per  $A$  e per  $B$  si incontrano in un punto, esso è il centro di istantanea rotazione ( $C$ ) dell'atto di moto.

Questo teorema permette, tra l'altro, di determinare la posizione del centro di istantanea rotazione per via puramente geometrica.

È ovvio che  $C$  cambia la sua posizione durante il moto del corpo sia rispetto ad un osservatore fisso posto in  $O$  che rispetto all'osservatore, con origine in  $\Omega$ , solidale con il corpo in moto. Si dà la seguente

● **Definizione 0.22** *Il luogo dei punti occupati dal centro istantaneo rispetto all'osservatore fisso si chiama base. Quello rispetto all'osservatore solidale si chiama rulletta. La base e la rulletta nel loro insieme sono note come traiettorie polari.*

Le due curve ora definite hanno in comune, per definizione, ad ogni istante il centro istantaneo di rotazione e possiedono un'importante proprietà espressa dal seguente

●● **Teorema 0.17** *La rulletta rotola senza strisciare sulla base.*

Vale anche il "viceversa" di questo teorema. Cioè

●● **Teorema 0.18** *Se due curve rotolano senza strisciare l'una sull'altra allora tali curve sono base e rulletta.*

### Geometria delle masse

#### Baricentro

Un *punto materiale* è un punto dotato di massa e un *sistema particellare* o *sistema di punti materiali* è un insieme di  $N$  punti materiali ( $\{P_s, m_s\}; s = 1, 2, \dots, N$ ).

Dato un sistema di  $N$  punti materiali ( $\{P_s, m_s\}; s = 1, 2, \dots, N$ ) si dà la seguente

● **Definizione 0.23** *Si dice baricentro (o centro di massa) di un sistema di punti materiali il punto  $G$  definito da*

$$OG \stackrel{def}{=} \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s OP_s \quad (21)$$

ove il punto  $O$  è l'origine di un sistema di riferimento ed  $M = \sum_{s=1}^N m_s$ .

Le coordinate del baricentro  $G$  rispetto agli assi di un sistema cartesiano ortogonale  $Oxyz$  sono quindi

$$x_G = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s x_s, \quad y_G = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s y_s, \quad z_G = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^N m_s z_s$$

ove si è indicato con  $OG \equiv (x_G, y_G, z_G)$ ,  $OP_s \equiv (x_s, y_s, z_s)$  le coordinate del baricentro e dei punti del sistema.

A partire dalla definizione di centro di un sistema di vettori applicati, si può dimostrare che

●● **Teorema 0.19** *Il baricentro di un sistema di punti materiali  $(P_s, m_s)$  coincide con il centro di un sistema di vettori paralleli e concordi di modulo proporzionale alle masse dei punti di applicazione.*

In dinamica si mostra che tali vettori sono le forze peso applicate ai punti del sistema.

Nel caso di un continuo la (21) assume la forma ( $\rho(P)$  è la densità del corpo in  $P$ ,  $dm = \rho(P)d\tau$ ,  $M = \int_{\tau} \rho(P)d\tau$  e  $d\tau$  è un elemento infinitesimo del corpo)

$$OG = \frac{1}{M} \int_{\tau} OP dm = \frac{1}{M} \int_{\tau} \rho(P) OP d\tau$$

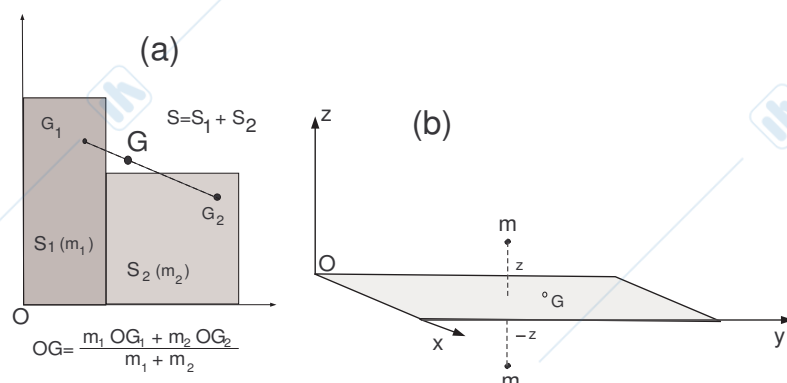


Figura 11: Illustrazione dei teoremi 0.22 (a) e 0.23 (b)

o, in componenti,

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\tau} \rho(P)x d\tau, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_{\tau} \rho(P)y d\tau, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_{\tau} \rho(P)z d\tau.$$

Ci sono alcuni teoremi di ubicazione del baricentro che servono a localizzare il baricentro (o alcune sue coordinate) senza dover ricorrere al calcolo integrale.

●● **Teorema 0.20** *Quando le masse di un sistema sono distribuite lungo un segmento di retta o su un piano, il baricentro appartiene a quel segmento di retta o a quel piano.*

●● **Teorema 0.21** *Se un sistema di punti materiali è non esterno ad una superficie convessa (o ad una curva convessa) il baricentro si trova non esternamente alla superficie (o curva) convessa.*

●● **Teorema 0.22 (proprietà distributiva del baricentro)** *Se un sistema  $S$  è suddivisibile in più sottosistemi  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , allora il suo baricentro coincide con quello dei baricentri  $G_1, G_2, \dots, G_k$  dei sottosistemi attribuendo a tali punti le masse  $m_1, m_2, \dots, m_k$  di  $S_1, S_2, \dots, S_k$ . (Si veda la fig.11 (a) in un caso con  $k = 2$ ).*

● **Definizione 0.24** *Si chiama piano di simmetria di massa per un sistema materiale, un piano di simmetria per il sistema geometrico corrispondente e tale che i punti simmetrici rispetto a tale piano hanno uguale massa.*

●● **Teorema 0.23** *Se un sistema materiale è dotato di un piano di simmetria di massa, allora il baricentro appartiene a tale piano (fig.11 (b)).*

### Momenti di inerzia

• **Definizione 0.25** Si chiama momento di inerzia di un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , rispetto ad un asse  $a$ , la grandezza scalare non negativa

$$I = mr^2$$

ove  $r$  è la distanza del punto dall'asse. Per un sistema particellare di  $N$  punti materiali si ha

$$I = \sum_{s=1}^N m_s r_s^2 \quad (22)$$

che esprime la *proprietà di additività* dei momenti d'inerzia. Se il corpo è un continuo di "misura"  $\tau$  si ha

$$I = \int_{\tau} r^2 dm = \int_{\tau} r^2(P) \rho(P) d\tau$$

essendo  $r$  e  $\rho$  (densità) funzioni delle coordinate del punto variabile  $P$  del corpo nel quale è centrato l'elemento  $d\tau$ .

Il momento d'inerzia dipende dalla retta rispetto alla quale viene calcolato. Esistono alcuni teoremi che permettono di semplificare le procedure di calcolo dei momenti d'inerzia. Il primo di tali teoremi permette di collegare fra loro i valori dei momenti d'inerzia relativi a rette loro parallele di cui una passi per il baricentro del sistema.

•• **Teorema 0.24 (di Huygens-Steiner)** Il momento d'inerzia  $I_a$  di un corpo rispetto ad un asse arbitrario  $\mathbf{a}$  è uguale al momento d'inerzia  $I_G$  rispetto ad un asse baricentrale parallelo ad  $\mathbf{a}$ , sommato alla massa  $M$  del corpo moltiplicata per la distanza al quadrato ( $d^2$ ) fra i due assi

$$I_a = I_G + Md^2$$

Il secondo teorema permette di collegare fra loro i momenti d'inerzia relativi a rette uscenti tutte da uno stesso punto  $O$  dello spazio (o, in altri termini, permette di studiare come varia il momento d'inerzia di un corpo al variare della direzione di un asse).

Se consideriamo un generico asse  $l$  passante per un punto  $O$  (assunto come origine di un sistema cartesiano ortogonale  $Oxy$ ) e indichiamo con  $\mathbf{u}$  il versore di tale asse (vedi fig. 12) si

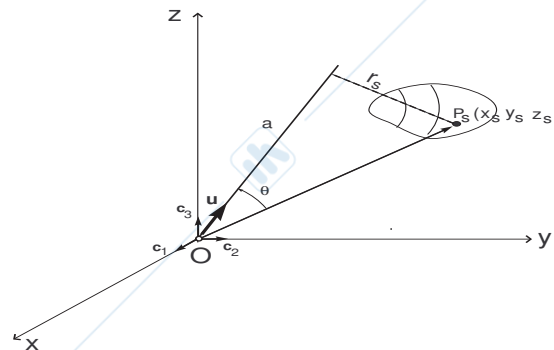


Figura 12: Il sistema di riferimento e la retta  $l$  nel teorema degli assi concorrenti.

trova che il momento d'inerzia cercato vale

$$I_{\mathbf{u}} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\alpha\gamma - 2C'\alpha\beta \quad (23)$$

ove abbiamo posto

$$\begin{aligned} A &= \sum_{s=1}^n m_s (y_s^2 + z_s^2), & B &= \sum_{s=1}^n m_s (x_s^2 + z_s^2), & C &= \sum_{s=1}^n m_s (x_s^2 + y_s^2) \\ A' &= \sum_{s=1}^n m_s y_s z_s, & B' &= \sum_{s=1}^n m_s x_s z_s, & C' &= \sum_{s=1}^n m_s x_s y_s \end{aligned} \quad (24)$$

essendo  $x_s, y_s, z_s$  le coordinate del generico punto  $P_s$  del corpo e  $\alpha, \beta, \gamma$  le componenti del vettore  $\mathbf{u}$  che sono anche i coseni direttori della retta  $l$ . La (23) si mantiene valida nel caso di un sistema continuo pur di pensare  $A, B, \dots$  espresse, anzichè dalle (24), dalle

$$\begin{aligned} A &= \int_{\tau} \rho (y^2 + z^2) d\tau, & B &= \int_{\tau} \rho (x^2 + z^2) d\tau, & C &= \int_{\tau} \rho (x^2 + y^2) d\tau \\ A' &= \int_{\tau} \rho y z d\tau, & B' &= \int_{\tau} \rho x z d\tau, & C' &= \int_{\tau} \rho x y d\tau \end{aligned}$$

Le quantità  $A, B, C$  coincidono con i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi  $Ox, Oy, Oz$  rispettivamente. Le quantità  $A', B', C'$ , sono chiamati *momenti di deviazione* o *prodotti di inerzia*.

### Matrice d'inerzia

Le quantità  $A, B, C, A', B', C'$  possono essere pensati come gli elementi di una matrice chiamata *matrice d'inerzia*

$$\sigma_O = \begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix}$$

che permette di scrivere la (23) nella forma compatta  $I = \mathbf{u} \times \sigma_O \mathbf{u}$  e che ha due importantissime proprietà:

- a) è simmetrica;                      b) è definita positiva

Il fatto che la matrice  $\sigma$  sia simmetrica implica che

essa è sicuramente diagonalizzabile e possiede autovalori reali e una base ortonormale di autovettori.

• **Definizione 0.26** Si dice *asse principale d'inerzia* relativo alla matrice d'inerzia  $\sigma$  una retta che ha la direzione di un autovettore di  $\sigma$ .

Se si riferisce la matrice d'inerzia ad un sistema cartesiano i cui assi sono principali d'inerzia (cioè, sono gli autovettori della matrice), essa assume forma diagonale ( $A' = B' = C' = 0$ ) e i momenti  $A, B, C$  relativi agli assi cartesiani prendono il nome di *momenti principali d'inerzia* (per la descrizione della tecnica di diagonalizzazione di  $\sigma$  si veda BRSV pp. 388-391).

La condizione b) implica che gli autovalori di  $\sigma$  sono positivi e che la quadrica che può essere associata alla matrice  $\sigma$  risulta essere un ellissoide (*ellissoide d'inerzia*).

### Ellissoide d'inerzia

È noto dalla geometria che ad ogni matrice simmetrica può essere associata una quadrica. Quando la matrice è definita positiva (come nel caso della matrice d'inerzia  $\sigma$ ) la quadrica,

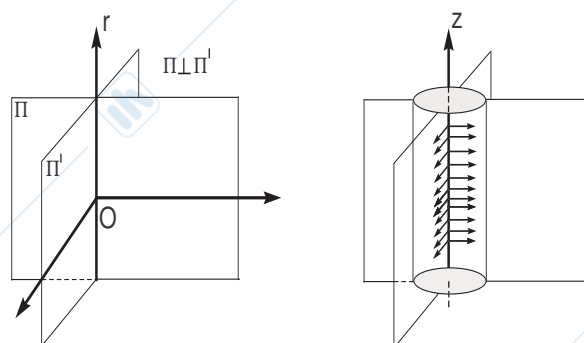


Figura 13: Illustrazione del teorema 0.26. Il cilindro (omogeneo) è a sezione ellittica ed ha, quindi, due piani di simmetria di massa: tutti i sistemi rappresentati sono principali d'inerzia.

il cui centro coincida con l'origine degli assi ai quali si riferisce la matrice, è un *ellissoide*. Si dimostra che esso ha equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A'yz - 2B'xz - 2C'xy = 1 \implies \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_O \mathbf{x} = 1 \quad (25)$$

e, nel caso in cui gli assi cartesiani siano assi principali d'inerzia, tale equazione assume la *forma canonica*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

### Ricerca degli assi principali d'inerzia

La conoscenza degli assi principali d'inerzia consente di rappresentare la matrice d'inerzia mediante tre soli elementi non nulli anzichè i sei che si hanno rispetto ad assi cartesiani qualunque. Risulta quindi importante determinare gli assi principali d'inerzia di un corpo. La ricerca degli assi principali d'inerzia si può sempre effettuare calcolando gli autovettori della matrice  $\sigma$  (cosa, peraltro, non sempre agevole), tuttavia quando il corpo possiede particolari simmetrie gli assi principali d'inerzia si possono trovare applicando alcuni teoremi.

- **Teorema 0.25** *Ogni asse normale ad un piano di simmetria di massa è principale d'inerzia.*
- **Teorema 0.26** *Se un corpo ha due piani di simmetria di massa tra loro ortogonali, allora gli assi principali rispetto ad ogni punto  $O$  della retta  $r$  d'intersezione dei due piani, sono dati da  $r$  e dalle rette passanti per  $O$  appartenenti ai due piani ed ortogonali ad  $r$  (vedi, ad esempio, la fig. 13).*
- **Teorema 0.27** *Se un corpo ha una retta  $r$  di simmetria di massa, allora tutti gli assi perpendicolari ad  $r$  sono principali d'inerzia e quindi anche  $r$  sarà principale d'inerzia (vedi, ad esempio, la fig. 14).*
- **Teorema 0.28** *Quando un corpo è una figura piana ogni retta normale al piano della figura è un asse principale d'inerzia.*

**Forze, lavoro, potenziale**

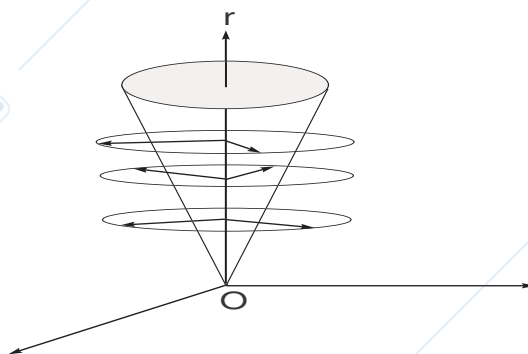


Figura 14: Illustrazione del teorema 0.27. L'asse del cono (omogeneo) è di simmetria di massa: esso ed altri due qualsiasi perpendicolari tra loro e perpendicolari ad  $r$  costituiscono un sistema d'assi principali.

### Il concetto di forza

Una *forza*,  $\mathbf{F}$ , è un vettore applicato  $(A, \mathbf{F})$  che descrive l'insieme delle influenze che un punto materiale o un elemento di materia esercita su un altro punto o elemento.

Una forza può essere costante o dipendere da qualche variabile come, ad esempio il tempo, le coordinate del punto di applicazione, la sua velocità ecc...

Indicando con  $\mathbf{F}$  la forza agente su un singolo punto materiale avremo, nella sua caratterizzazione più generale

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(P, \mathbf{v}, t) \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

ove  $x, y, z$  sono le coordinate del punto  $P$ ,  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  le componenti della sua velocità,  $t$  è il tempo. In particolare

• **Definizione 0.27** Una forza si dice *posizionale* se dipende solo dal suo punto di applicazione:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P) = \mathbf{F}(x, y, z)$ .

Dai concetti di forza, di massa e dalle caratteristiche cinematiche del moto, si possono dedurre concetti meccanici derivati. Ha particolare interesse il concetto di *lavoro*.

### Lavoro elementare e lavoro totale

Il *lavoro elementare* è una forma differenziale ottenuta facendo il prodotto scalare della forza per uno spostamento infinitesimo  $dP$  del suo punto di applicazione (cioè da  $P(t)$  a  $P(t + dt)$  compiuto da  $P$  nel tempo infinitesimo  $dt$ )

$$dL = \mathbf{F} \times dP = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

ove  $dP \equiv (dx, dy, dz)$  e  $\mathbf{F} \equiv (F_x, F_y, F_z)$ .

A volte è utile rappresentare il lavoro in termini di velocità del punto di applicazione  $P$ . Si ha, in tale caso

$$dL = \mathbf{F} \times dP \equiv \mathbf{F} \times \mathbf{v} dt = (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt$$

Il *lavoro totale* (cioè il lavoro lungo un cammino finito) fatto dalla  $\mathbf{F}$  durante il moto di  $P$  nell'intervallo di tempo da  $t_0$  a  $t_1$  lungo l'arco di traiettoria  $\gamma$  è dato dall'integrale del lavoro

elementare su  $\gamma$

$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \times dP = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \times \mathbf{v} dt = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{t_0}^{t_1} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt$$

Introducendo la *potenza* sviluppata dalla forza  $\mathbf{F}$  e definita come  $W(t) = \mathbf{F} \times \mathbf{v}$  si può esprimere il lavoro totale nella forma

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \times \mathbf{v} dt \Rightarrow L = \int_{t_0}^{t_1} W(t) dt \quad (26)$$

Se  $s = s(t)$ , ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) rappresenta la legge oraria con la quale il punto  $P$  percorre la traiettoria  $\gamma$  e ricordando che  $\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{t}$ , dalla (26), si ottiene

$$L = \int_{t_0}^{t_1} F_{\tau} \dot{s} dt. \quad (F_{\tau} = \mathbf{F} \times \mathbf{t}) \quad (27)$$

La (27) rappresenta, nel caso più generale, il lavoro totale di una forza lungo un cammino finito: *tale lavoro dipende dalla traiettoria* (attraverso il versore  $\mathbf{t}$ ) *e dalla legge oraria con cui si muove il punto di applicazione  $P$ .*

### Forze posizionali

Quando la forza è *posizionale* (cioè  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(P)$ ) l'integrale che fornisce il lavoro totale può essere ricondotto ad un integrale nella sola variabile  $s$  senza coinvolgere il tempo che ora non figura più nella forza. Infatti, ricordando che  $dP = ds\mathbf{t}$ , si ha

$$L = \int_{\gamma} \mathbf{F} \times dP = \int_{s_0}^{s_1} \mathbf{F} \times \mathbf{t} ds = \int_{s_0}^{s_1} F_{\tau} ds \quad (28)$$

La (28) si può interpretare dicendo che: *il lavoro lungo un cammino finito di una forza posizionale dipende solo dalla traiettoria percorsa da  $P$ .*

### Forze conservative

Una importantissima classe di forze posizionali sono le forze *conservative*. Per queste forze si verifica la circostanza notevolissima che per il calcolo del lavoro non si richiede nemmeno più la conoscenza della traiettoria del punto di applicazione della forza ma basta che ne siano assegnati gli estremi  $P_0$  e  $P_1$ .

• **Definizione 0.28** *Una forza si dice conservativa quando la forma differenziale del suo lavoro è un differenziale esatto.*

Nel nostro caso la forma differenziale  $dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$  risulta essere esatta se esiste una funzione regolare  $U = U(x, y, z)$  (*potenziale*) tale che

$$dL = dU$$

ossia

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

da cui segue l'identificazione

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (29)$$

Poiché  $U = U(x, y, z)$ , si vede da queste che se una forza è conservativa le sue componenti essendo le derivate parziali di una funzione di  $x, y, z$  possono essere funzioni solo delle coordinate del punto di applicazione della forza. Una forza conservativa è quindi senz'altro posizionale ma non vale necessariamente il viceversa in quanto possono esistere forze posizionali che non sono conservative dato che il loro lavoro non è un differenziale esatto (cioè le loro componenti non soddisfano la (29)).

Vale, per le forze conservative il seguente risultato: *il lavoro di una forza conservativa quando il suo punto di applicazione  $P$  si sposta da  $P_0$  a  $P_1$  seguendo un qualunque cammino  $\gamma$ , non dipende dal cammino percorso ma solo dalle posizioni iniziale e finale di  $P$ .* Infatti, dalla condizione  $dL = dU$ , segue (poiché  $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ )

$$L = \int_{s_0}^{s_1} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial U}{\partial s} ds = U(P_1) - U(P_0) \quad (30)$$

essendo  $s_0$  ed  $s_1$  le ascisse curvilinee di  $P_0$  e  $P_1$  sulla curva  $\gamma$ .

### Lavoro di un sistema di forze

Nel caso di un sistema discreto di  $N$  forze applicate in  $N$  punti  $P_s$  si definisce lavoro elementare del sistema di forze la somma dei lavori elementari compiuti dalle singole forze. Si ha, cioè, con ovvio significato dei simboli, per il lavoro reale e virtuale, rispettivamente

$$dL = \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s \times dP_s \quad , \quad \delta L = \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s \times \delta P_s$$

Particolarmente importanti sono le rappresentazioni del lavoro elementare di un sistema di forze applicate:

- ad un corpo rigido
- ad un sistema olonomo

### Lavoro di forze agenti su un corpo rigido

Siano date  $N$  forze applicate ad  $N$  punti di un corpo rigido. Poiché il corpo in esame è supposto rigido gli spostamenti dei suoi punti non sono arbitrari ma, (vedi cinematica rigida) devono soddisfare

$$dP_s = d\Omega + d\psi \wedge \Omega P_s \quad , \quad \delta P_s = \delta\Omega + \delta\psi \wedge \Omega P_s$$

Allora, sostituendo tali espressioni in  $dL$  e in  $\delta L$  rispettivamente, si ottiene che

$$dL = \mathbf{R} \times d\Omega + \mathbf{M}_\Omega \times d\psi \quad , \quad \delta L = \mathbf{R} \times \delta\Omega + \mathbf{M}_\Omega \times \delta\psi$$

ove  $\mathbf{R}$  è il vettore risultante delle forze applicate,  $\mathbf{M}_\Omega$  è il momento risultante delle forze applicate.

Si può interpretare il risultato ottenuto dicendo che: *il lavoro, sia reale che virtuale, di un sistema di forze applicate ad un corpo rigido dipende solo dal risultante e dal momento risultante delle forze.*

### Lavoro di forze agenti su un sistema olonomo

Tenendo conto della (10) (ci limitiamo a considerare il caso del lavoro virtuale  $\delta L$  perché questo è il caso che si incontra più frequentemente nella teoria. Per la rappresentazione di  $dL$  si veda BRSV pag. 131) si ottiene

$$\delta L = \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s \times \delta P_s = \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h = Q_h \delta q_h$$

avendo definito le seguenti quantità note come *forze generalizzate di Lagrange* o *componenti lagrangiane della forza*

$$Q_h = \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (31)$$

Nel caso di un sistema olonomo e conservativo si ha che  $U = U(q_h)$  e, dalla condizione  $\delta L = \delta U$ , si ottiene facilmente

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (32)$$

**Osservazione** - Si noti che le forze generalizzate di Lagrange sono, nel caso generale, funzioni dei parametri lagrangiani e delle loro derivate:  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ .

## I principi della dinamica

### I principi della dinamica

Scopo della *dinamica* è quello di studiare il movimento dei corpi sulla base delle relazioni che intercorrono tra le cause del moto ed il moto stesso. Tre principi stanno alla base di questo studio. Li formuliamo nel caso di un punto materiale e, nel seguito, generalizzeremo i principi al caso dei sistemi di punti (anche rigidi) ottenendo, in tal modo, quelle che sono note come *equazioni cardinali* della dinamica.

#### ♠ I<sup>0</sup> principio della dinamica (o principio d'inerzia)

Un punto materiale P non soggetto a forze è in quiete o si muove di moto rettilineo ed uniforme.

#### ♠ II<sup>0</sup> principio della dinamica

Un punto materiale soggetto ad una forza ( $\mathbf{F}$ ) acquista una accelerazione parallela e concorde alla forza stessa e di modulo proporzionale a quello della forza

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (33)$$

### ♣ III<sup>0</sup> principio della dinamica (o principio di azione e reazione)

Dato un sistema di punti materiali interagenti tra loro, le forze che tali punti si scambiano a due a due sono uguali in modulo, di verso opposto ed hanno la stessa retta d'azione che coincide con la retta congiungente i due punti. Costituiscono, cioè, un sistema di coppie di braccio nullo.

**Osservazione** - Proiettando la (33) su un sistema  $Oxyz$  di assi cartesiani ortogonali si trova

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases} \quad (34)$$

Questo è un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine (o, equivalentemente, un sistema differenziale del sesto ordine) che integrato, dopo avere assegnato le *condizioni iniziali*  $x = x_o, y = y_o, z = z_o$  (posizione iniziale del punto),  $\dot{x} = \dot{x}_o, \dot{y} = \dot{y}_o, \dot{z} = \dot{z}_o$  (velocità iniziale del punto), permette di determinare le funzioni incognite  $x(t), y(t)$  e  $z(t)$ , cioè, il moto del punto materiale.

### Qualche considerazione sui principi della dinamica

Il primo principio della dinamica, nella sua formulazione classica, è una diretta conseguenza del secondo. Infatti, se si pone  $\mathbf{F} = 0$  nella (33) si ha che

$$\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \text{costante} .$$

Tale risultato, costituisce proprio l'enunciato del primo principio. Tuttavia esso è stato formulato in modo indipendente per ragioni storiche; infatti esso fu stabilito da Galileo alcuni decenni prima del secondo principio.

Osserviamo poi che, nell'enunciare una qualunque legge in cui intervengono i concetti di forza e di moto, occorre precisare quale sia il sistema di riferimento rispetto a cui essa è valida. La meccanica classica ammette, come proprietà naturale (postulato), l'esistenza di (almeno) una terna di riferimento rispetto a cui sono validi i principi enunciati, terna che (convenzionalmente) si chiama *assoluta* come assoluto si dice lo spazio rigido ad essa solidale. Secondo la concezione newtoniana si assume quale spazio assoluto quello solidale alle stelle fisse. Chiamando *inerziale* o *galileiana* **ogni** terna che rispetto ad una terna assoluta si muova di moto traslatorio uniforme si può enunciare il cosiddetto

#### ✓ Principio di relatività galileiana

Le leggi della meccanica si mantengono valide, senza mutare espressione (sono invarianti), rispetto ad ogni terna inerziale.

Tenendo conto di quanto precede possiamo enunciare il primo principio della dinamica in forma più rigorosa così:

Esistono dei sistemi di riferimento (*inerziali*) rispetto ai quali un punto materiale P non soggetto a forze è in quiete o si muove di moto rettilineo ed uniforme.

Ci sono alcune altre leggi che si suole aggiungere ai tre principi enunciati.

#### ✓ Principio di sovrapposizione delle forze

Se due forze agiscono simultaneamente su un punto materiale, l'accelerazione prodotta è il risultante delle due accelerazioni prodotte singolarmente dalle due forze, pensate agenti l'una indipendentemente dall'altra.

In altri termini, se  $\mathbf{F}_1$  ed  $\mathbf{F}_2$  sono due forze e  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  le accelerazioni che esse producono su un punto materiale di massa  $m$  agendo singolarmente, l'accelerazione prodotta dalle due forze, quando agiscono simultaneamente è

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \frac{1}{m}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

Questo principio permette di sostituire all'insieme delle  $N$  forze agenti su un punto materiale la forza risultante  $\mathbf{R} = \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s$  (*principio di composizione delle forze*). Ne segue che il moto di un punto materiale soggetto a più forze si studia ancora mediante la legge (33) pur di identificare  $\mathbf{F}$  con il vettore risultante di tutte le forze applicate.

### ✓ Postulato delle reazioni vincolari

L'azione che un vincolo esplica su un punto materiale è rappresentabile con una forza.

Tale postulato si giustifica pensando che è naturale ritenere che un vincolo, impedendo o modificando il movimento che determinate forze produrrebbero su un sistema libero, espliciti delle forze. Tali forze si chiamano *reazioni vincolari*. Si usa chiamare invece *forza attiva* ogni forza non dovuta ai vincoli. Se il risultante delle forze attive agenti su un punto materiale vincolato è indicato con  $\mathbf{F}$  e  $\Phi$  rappresenta la forza dovuta al vincolo, la forza totale agente sul punto è allora, in base al principio di sovrapposizione delle forze,  $\mathbf{F} + \Phi$ . Pertanto la legge (33), può essere riformulata così

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \Phi$$

Nei problemi tecnici concreti le reazioni vincolari sono incognite ma, spesso, la loro determinazione presenta un grande interesse perché permette di determinare la sollecitazione a cui un corpo risulta soggetto durante il moto (o all'equilibrio).

### Il II° principio rispetto ad una terna non inerziale

Quando si desidera studiare il moto di un punto rispetto ad un riferimento non assoluto si deve sostituire la (33) con una equazione che tenga conto della non inerzialità del sistema.

Denotiamo con  $\mathbf{v}^{(r)}$  ed  $\mathbf{a}^{(r)}$  la velocità e l'accelerazione, rispetto alla terna (non inerziale) prescelta, di un punto materiale  $P$  che sia soggetto alla forza risultante  $\mathbf{F}$ . Sia, inoltre,  $\boldsymbol{\omega}$  la velocità angolare della terna non inerziale rispetto a quella assoluta.

Facendo uso del teorema di Coriolis ( $\mathbf{a}^{(a)} = \mathbf{a}^{(r)} + \mathbf{a}^{(\tau)} + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^{(r)}$ ) si ottiene

$$m\mathbf{a}^{(r)} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}^{(\tau)} - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^{(r)} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{(\tau)} + \mathbf{F}^{(c)} \quad (35)$$

avendo introdotto la *forza di trascinamento* e la forza di *Coriolis* (o *complementare*)

$$\mathbf{F}^{(\tau)} = -m\mathbf{a}^{(\tau)}, \quad \mathbf{F}^{(c)} = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^{(r)}$$

Queste due forze sono dette *forze apparenti*. La (35) si può interpretare dicendo che nel moto di un corpo rispetto ad un sistema non inerziale il prodotto della massa per l'accelerazione è uguale alla forza totale (assoluta) sommata alle forze *apparenti*.

**Osservazione** - Si noti che se nella (35),  $\mathbf{F} = 0$  non risulta  $\mathbf{a}_r = 0$  e quindi  $\mathbf{v}_r = \text{cost}$ . Se anche dunque il punto materiale non è soggetto a forze, esso non persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo ed uniforme: in un riferimento non inerziale non vale, quindi, il principio d'inerzia!

**Osservazione** - Gli effetti che le forze apparenti provocano sulla statica e sulla dinamica di sistemi di punti materiali e sui corpi rigidi sono molto importanti e la loro trattazione risulta vasta e articolata. Tra i fenomeni coinvolti in questa problematica ricordiamo, soltanto a titolo di esempio, la deviazione verso est dei gravi in caduta, la dipendenza della forza peso dalla latitudine. Ricordiamo inoltre che lo studio della statica e della dinamica relative entra in gioco in problematiche legate ai moti dei corpi celesti (meccanica celeste), in meteorologia (moti delle masse d'aria in prossimità della superficie terrestre), in geodesia (studio delle maree, forma della Terra), in astronomia ecc. Per una trattazione di alcuni di questi problemi si rimanda al capitolo 12 del testo BRSV (pagg. 285-309).

### Dinamica dei sistemi

#### Quantità di moto, momento della quantità di moto, energia cinetica

Definiamo *quantità di moto* ( $\mathbf{q}$ ), *momento della quantità di moto rispetto ad un polo*  $\Omega$  ( $\mathbf{K}_\Omega$ ) ed *energia cinetica* ( $T$ ) per un punto materiale  $P$  (di massa  $m$  e velocità  $\mathbf{v}$ ) le seguenti grandezze

a) *Punto materiale*

$$\mathbf{q} = m\mathbf{v}, \quad \mathbf{K}_\Omega = \Omega P \wedge m\mathbf{v}, \quad T = \frac{1}{2}mv^2$$

Per un sistema di punti materiali ( $\{P_s, m_s\}; s = 1, 2, \dots, N$ ), si ha

b') *Sistema discreto*

$$\mathbf{Q} = \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}_s, \quad \mathbf{K}_\Omega = \sum_{s=1}^N \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{v}_s, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_s^2 \quad (36)$$

b'') *Sistema continuo*

$$\mathbf{Q} = \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau, \quad \mathbf{K}_\Omega = \int_{\tau} \Omega P \wedge \rho \mathbf{v} d\tau, \quad T = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho v^2 d\tau$$

ove  $dm = \rho d\tau$  rappresenta la massa di un elemento infinitesimo  $d\tau$  il cui centro ha velocità  $\mathbf{v}$ .

Per un qualsiasi sistema materiale (discreto o continuo) sussiste, comunque, il seguente

●● **Teorema 0.29** *La quantità di moto di un sistema coincide con quella del suo baricentro pensato come un punto materiale avente la massa dell'intero sistema*

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_G$$

#### Moto relativo al baricentro

Le grandezze introdotte dipendono dal sistema di riferimento (perché contengono la velocità  $\mathbf{v}$  che è una grandezza 'relativa'). Assunta una terna di riferimento *assoluta* ( $\Sigma$ ), si chiama *moto relativo al baricentro* il moto di un corpo (supposto, senza perdita di generalità, particellare) rispetto ad

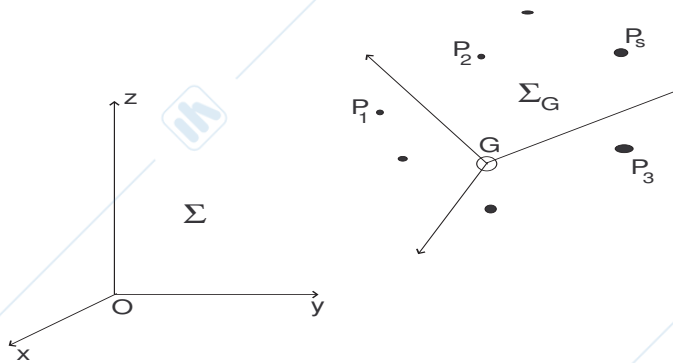


Figura 15: Sistema di riferimento baricentrale. Poiché gli assi di tale sistema mantengono direzione invariabile rispetto a quelli del sistema assoluto, possiamo affermare che  $\frac{de_i}{dt} = 0 (i = 1, 2, 3)$  e, pertanto,  $\Sigma_G$  si muove di moto traslatorio.

una terna ( $\Sigma_G$ ), avente l'origine nel baricentro  $G$  del corpo ed assi di direzione invariabile rispetto al sistema assoluto (vedi fig. 15). La terna  $\Sigma_G$  si chiama *sistema baricentrale*.

Si vede facilmente a partire dalla definizione di terna baricentrale che

*il moto di  $\Sigma_G$  rispetto a  $\Sigma$  coincide con il moto di trascinamento del corpo e risulta (dalla definizione di sistema baricentrale) traslatorio.*

Di conseguenza, le velocità relative (cioè quelle rispetto al sistema  $\Sigma_G$ ) dei singoli punti  $P_s$  del corpo sono espresse da (si ricordi il teorema di Galileo)

$$\mathbf{v}_s^{(r)} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_G$$

ove  $\mathbf{v}_s$  è la velocità assoluta (cioè rispetto a  $\Sigma$ ) del punto  $s$ -esimo e  $\mathbf{v}_G$  è la velocità di trascinamento del punto  $s$ -esimo che coincide con quella del baricentro  $G$  perchè  $\Sigma_G$  si muove di moto traslatorio. Basandosi su tale osservazione si dimostra che "rispetto al sistema baricentrale  $G$ ", le grandezze  $\mathbf{Q}$ ,  $T$  e  $\mathbf{K}_\Omega$  hanno le seguenti rappresentazioni

$$\mathbf{Q}^{(G)} = 0 \quad (37)$$

$$T = T^{(G)} + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2 \quad (38)$$

$$\mathbf{K}_\Omega = \mathbf{K}_\Omega^{(G)} + \Omega G \wedge m \mathbf{v}_G \quad (39)$$

Le (37), (38), (39) costituiscono, rispettivamente, i seguenti teoremi

- **Teorema 0.30** *Per un qualunque corpo, la quantità di moto rispetto al baricentro è nulla.*
- **Teorema 0.31 (1° teorema di König)** *L'energia cinetica di un corpo rispetto ad un osservatore assoluto è uguale alla energia cinetica calcolata rispetto al sistema baricentrale sommata all'energia cinetica del baricentro pensato come un punto materiale avente la massa del corpo.*
- **Teorema 0.32 (2° teorema di König)** *Il momento della quantità di moto di un corpo rispetto ad un osservatore assoluto è uguale al momento della quantità di moto rispetto al sistema baricentrale sommato al momento della quantità di moto del baricentro pensato come un punto materiale al quale viene associata la massa dell'intero sistema materiale.*

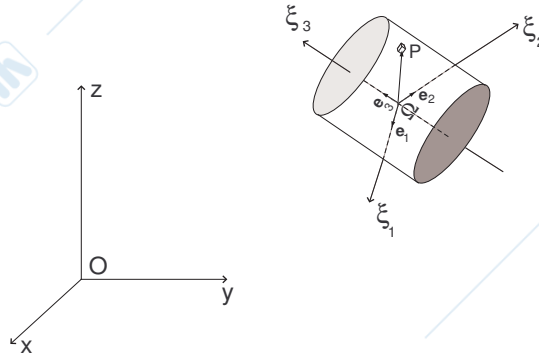


Figura 16: Sistema di riferimento  $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$  solidale con il corpo rigido.

### Rappresentazione di $\mathbf{Q}$ , $\mathbf{K}_\Omega$ e $\mathbf{T}$ per un corpo rigido

Per un corpo rigido (per il quale, cioè,  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P_s$ ) si ottengono i risultati che seguono (vedi dimostrazione in BRSV p.220 [per  $\mathbf{K}_\Omega$ ], pag. 226 [per  $\mathbf{T}$ ]).

#### Quantità di moto

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_G$$

#### Momento della quantità di moto

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\Omega &= m\Omega G \wedge \mathbf{v}_\Omega + (Ap - C'q - B'r)\mathbf{e}_1 + (Bq - A'r - C'p)\mathbf{e}_2 + \\ &+ (Cr - B'p - A'q)\mathbf{e}_3 = m\Omega G \wedge \mathbf{v}_\Omega + \sigma_\Omega \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (40)$$

ove  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sono i versori di una terna  $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$  **solidale** con il corpo e  $p, q, r$  sono le componenti di  $\boldsymbol{\omega}$  rispetto a tali assi **solidali** (vedi fig. 16). Se il polo  $\Omega$  è fisso oppure coincide con il baricentro del sistema  $m\Omega G \wedge \mathbf{v}_\Omega = 0$  e

$$\mathbf{K}_\Omega = \sigma_\Omega \boldsymbol{\omega} \quad (41)$$

Una ulteriore semplificazione si ha se la terna solidale è principale d'inerzia rispetto ad  $\Omega$ . In tale caso  $A' = B' = C' = 0$  e, dunque

$$\mathbf{K}_\Omega = Ape_1 + Bqe_2 + Cre_3$$

che può rappresentare il momento della quantità di moto, di un *corpo rigido con un punto fisso*  $\Omega$ . La (40) si particolarizza facilmente al caso di un *corpo rigido con un asse fisso*.

Scegliendo il sistema solidale in modo che, ad esempio, l'asse  $\xi_3$  coincida con l'asse fisso del moto e osservando che la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  del corpo è parallela a tale asse si ha  $p = q = 0$ . Se, poi,  $\Omega$  viene scelto sull'asse fisso risulta anche  $\mathbf{v}_\Omega = 0$ . La (40) diventa quindi

$$\mathbf{K}_\Omega = -(B'e_1 + A'e_2 - Ce_3)r \quad (42)$$

**Osservazione** - Si osservi che se l'asse fisso risulta essere principale d'inerzia, allora il momento della quantità di moto risulta essere parallelo all'asse fisso. Infatti, dalla (42) se l'asse fisso è principale d'inerzia e coincide (come qui abbiamo supposto) con l'asse  $\xi_3 \equiv z$ , allora  $A' = B' = 0$  e la (42) diventa

$$\mathbf{K}_\Omega = Cre_3 = C\dot{\theta}\mathbf{e}_3 \quad (43)$$

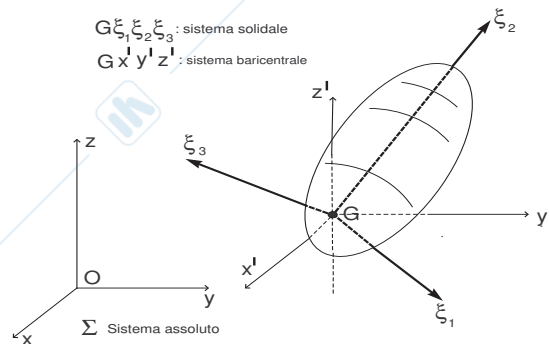


Figura 17: L'energia cinetica di un corpo rigido è rappresentabile come l'energia cinetica del baricentro  $\frac{1}{2}mv_G^2$ , sommata ad una energia cinetica  $T^G (= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'pr - 2C'pq)$  di rotazione del corpo intorno a  $G$  come se  $G$  fosse fisso.

ove  $\theta$  è l'angolo formato da un semipiano uscente dall'asse  $\xi_3$  e solidale al corpo con uno fisso anch'esso uscente da  $\xi_3$ .

**Osservazione** - Derivata temporale di  $\mathbf{K}_G$ : si dimostra (BRSV pag.224) che la derivata temporale del momento della quantità di moto baricentrale  $\mathbf{K}_G$  per un corpo rigido vale

$$\dot{\mathbf{K}}_G = \sigma_G \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma_G \boldsymbol{\omega}$$

Questa rappresentazione è particolarmente utile nello studio della dinamica del corpo rigido.

### Energia cinetica

L'energia cinetica di un corpo rigido in moto generico si rappresenta nella forma

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'pr - 2C'pq) = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \sigma_G \boldsymbol{\omega}) \quad (44)$$

o (se gli assi solidali sono principali d'inerzia)

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

La figura 17 illustra questa rappresentazione della energia cinetica di un corpo.

**Osservazione** - Dalla rappresentazione generale (44) si possono dedurre le espressioni per l'energia cinetica di un corpo rigido con un asse fisso  $\mathbf{a}$  ( $T = \frac{1}{2}I_{\mathbf{a}}\omega^2$ ), con un punto fisso  $O$  ( $T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \sigma_o \boldsymbol{\omega})$ ) e in moto traslatorio ( $T = \frac{1}{2}mv_G^2$ ).

### Energia cinetica di un sistema olonomo

Per un sistema olonomo la posizione e la velocità del generico punto  $P_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) sono esprimibili tramite le

$$OP_s = OP_s(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \Rightarrow \mathbf{v}_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_s}{\partial t}, \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

Sostituendo nella  $T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{v}_s^2$  si ottiene che

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N \overbrace{m_s}^{a_{hk}} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \times \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{s=1}^N \overbrace{m_s}^{b_h} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \times \frac{\partial P_s}{\partial t} \dot{q}_h + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N \overbrace{m_s}^d \left( \frac{\partial P_s}{\partial t} \right)^2$$

34

o

$$T = \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + b_h \dot{q}_h + d \quad (45)$$

Vale, cioè, il seguente risultato

*L'energia cinetica di un sistema olonomo è espressa da un polinomio di secondo grado nelle derivate prime delle coordinate lagrangiane.*

Nel caso che i vincoli non dipendano dal tempo ( $\partial P_s / \partial t = 0$ ) si ha  $b_h = 0$  e  $d = 0$  e, pertanto,

$$T = \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (46)$$

ove  $a_{hk}$  sono gli elementi di una matrice nota come *matrice della energia cinetica* o *matrice di massa*. Tale matrice possiede due importanti proprietà: a) è una matrice simmetrica e b) è definita positiva.

### Le equazioni cardinali della dinamica

Le equazioni cardinali della dinamica sono un insieme di condizioni necessarie e sufficienti per determinare il moto di un singolo corpo rigido.

Si possono ottenere partendo, senza perdita di generalità, da un sistema particellare costituito da  $N$  punti; denotando con  $m_s$  e  $\mathbf{a}_s$  rispettivamente, la massa e l'accelerazione di un suo generico punto  $P_s$  e con  $\mathbf{F}_s^{(e)}$  ed  $\mathbf{F}_s^{(i)}$  i risultanti delle forze esterne ed interne agenti su esso, il II° principio della dinamica, applicato a  $P_s$ , si scrive

$$m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{F}_s^{(e)} + \mathbf{F}_s^{(i)} \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (47)$$

Sommando sull'indice  $s$  e tenendo conto che il risultante delle forze interne  $\mathbf{R}^{(i)} = \sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s^{(i)} = 0$ , in base al III° principio, si ottiene

$$\sum_{s=1}^N m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{R}^{(e)}$$

Considerando, poi, ancora la (47) e agendo su di essa, a sinistra, con l'operatore di prodotto vettoriale  $\Omega P_s \wedge$  e sommando, si ha

$$\sum_{s=1}^N \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{M}_\Omega^{(e)} + \mathbf{M}_\Omega^{(i)} \quad (48)$$

ove  $\mathbf{M}_\Omega^{(e)}$  e  $\mathbf{M}_\Omega^{(i)}$  rappresentano i momenti risultanti rispetto ad  $\Omega$  delle forze esterne e di quelle interne, applicate nei punti  $P_s$ . Ma  $\mathbf{M}_\Omega^{(i)} = 0$  (per il III° principio). Pertanto, la (48) si può scrivere

$$\sum_{s=1}^N \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{M}_\Omega^{(e)}$$

Le equazioni differenziali del 2° ordine

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{R}^{(e)} \\ \sum_{s=1}^N \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{M}_\Omega^{(e)} \end{cases} \quad (49)$$

prendono il nome di *equazioni cardinali della dinamica* (per sistemi particellari).

Le (49) si possono, poi, esprimere in una forma utile nelle applicazioni.

Infatti, si può dimostrare che

$$\sum_{s=1}^N m_s \mathbf{a}_s = \dot{\mathbf{Q}}, \quad \sum_{s=1}^N \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s = \dot{\mathbf{K}}_\Omega + \mathbf{v}_\Omega \wedge \mathbf{Q} \quad (50)$$

Osservando che  $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_G \Rightarrow \dot{\mathbf{Q}} = m\mathbf{a}_G$  e tenendo conto di (50), le equazioni cardinali (50) si scrivono

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(e,a)} + \mathbf{R}^{(e,v)} \\ \dot{\mathbf{K}}_\Omega + \mathbf{v}_\Omega \wedge m\mathbf{v}_G = \mathbf{M}_\Omega^{(e,a)} + \mathbf{M}_\Omega^{(e,v)} \end{cases} \quad (51)$$

avendo anche distinto le forze esterne in attive e vincolari. La (51)<sub>1</sub> prende il nome di *equazione del moto del baricentro* ed esprime la seguente proprietà: *il baricentro di un qualunque sistema materiale si muove come un punto materiale dotato della massa dell'intero sistema e sollecitato dal risultante delle forze esterne (attive e vincolari).*

### Integrali primi del moto

• **Definizione 0.29** Per un sistema discreto di punti materiali ( $\{ P_s, m_s \}; s = 1, 2, \dots, N$ ), si chiama *integrale primo del moto* una funzione  $\psi = \psi(P_s, \mathbf{v}_s; t)$  che si mantiene costante al variare di  $t$

$$\psi(P_s(t), \mathbf{v}_s(t); t) = \text{costante} = \psi(P_s(t_0), \mathbf{v}_s(t_0); t_0)$$

ove  $t_0$  rappresenta l'istante iniziale del moto.

A partire dalle equazioni cardinali della dinamica si possono ricavare degli integrali primi. In particolare, ci sono due tipi di integrali primi riconducibili alle (51)

- l'integrale primo della quantità di moto;
- l'integrale primo del momento della quantità di moto.

A partire dalle equazioni del moto è possibile anche ottenere il *teorema della energia cinetica* (BRSV pag. 240)

$$dT = dL \implies \frac{dT}{dt} = W$$

che esprime il legame che durante il moto sussiste tra la variazione della energia cinetica  $T$  e la potenza  $W$  sviluppata dalle forze agenti. Nel caso che le forze agenti siano conservative (e che i vincoli siano ideali, bilaterali e fissi) vale (BRSV pag. 243)

$$E = T - U = \text{costante}$$

che esprime il teorema di conservazione della energia meccanica totale.

**Statica**

### Definizione di quiete e di equilibrio

Consideriamo un sistema di forze  $\mathbf{F}(P, \mathbf{v})$  indipendenti dal tempo e sia

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(P, \mathbf{v})$$

Tra le soluzioni che questa equazione differenziale può avere c'è la cosiddetta *quiete* che rappresenta una soluzione costante  $P(t) = P^*$  ( $\forall t \geq t_0$ ) e corrispondente ai dati iniziali  $P(t_0) = P^*, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{0}$

Cioè: il punto, che ha inizialmente velocità nulla, rimane fermo nella posizione in cui si trovava all'istante iniziale.

Si chiama, invece, *equilibrio* una configurazione  $P^*$  che sia soluzione di  $\mathbf{F}(P^*, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ .

Cioè: una configurazione  $P^*$  è di equilibrio se è una posizione in cui si annulla la forza calcolata per valori nulli della velocità.

La quiete implica l'equilibrio ma il viceversa sussiste purchè le forze applicate siano lipschitziane (come è il caso di tutte le forze di natura fisica). In tal caso ricercare le posizioni di equilibrio equivale ad individuare le posizioni in cui un dato sistema è in quiete.

**Osservazione** - La precedente definizione di equilibrio implica, dal punto di vista matematico, che il problema della ricerca delle posizioni di equilibrio di un sistema si presenti come un problema **algebrico** che consiste nella ricerca degli zeri della funzione forza  $\mathbf{F}$  supposta, d'ora innanzi, essere di tipo posizionale.

### Condizioni di equilibrio di un punto materiale

Il problema della ricerca delle posizioni di equilibrio di un punto materiale libero si riconduce alla determinazione degli zeri della funzione  $\mathbf{F}(P) = \mathbf{0}$  mentre se il punto è vincolato si riconduce alla soluzione della equazione

$$\mathbf{F}(P) + \Phi = 0 \quad (52)$$

Nella (52) è nota solo la forza attiva  $\mathbf{F}$  mentre sono incognite, oltre alla coordinate del punto  $P$  (che rappresentano le posizioni di equilibrio del punto), anche le componenti della reazione vincolare  $\Phi$ . Proiettando l'equazione vettoriale (52) su un sistema di assi cartesiani si ottengono, al più, tre equazioni scalari in cui le incognite possono essere più di tre. Si dice che il problema è *staticamente determinato* quando il numero delle equazioni indipendenti uguaglia il numero delle incognite. In caso contrario si dice che il problema è *staticamente indeterminato*.

Se il sistema di riferimento non è inerziale basterà inglobare nella (52) anche il risultante delle forze di trascinamento che si manifestano nel moto relativo. Ossia, si deve avere per l'equilibrio *relativo* di un punto materiale

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^{(\tau)} + \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} - m\mathbf{a}^{(\tau)} + \Phi = 0 \quad (53)$$

Per potere avere qualche informazione sulle reazioni vincolari (incognite) che figurano nella (52) e/o (53) occorre introdurre il concetto di *attrito* che ci permetterà di ottenere informazioni su certe proprietà delle reazioni vincolari.

### Attrito (coulombiano)

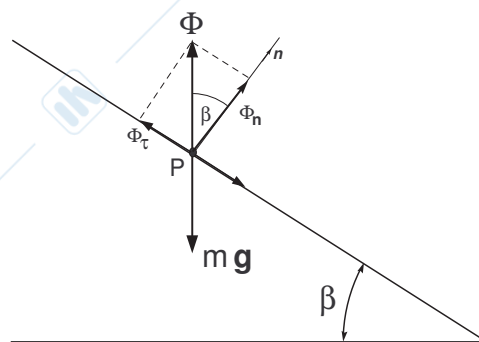


Figura 18: Il punto  $P$  può stare in equilibrio su un piano inclinato perché la reazione del piano annulla la forza peso (ha, cioè, una componente tangente al piano).

Per illustrare questo concetto ci riferiamo ad un caso particolare (studio dell'equilibrio di un punto materiale  $P$  pesante appoggiato ad un piano inclinato di un angolo (variabile)  $\beta$  rispetto all'orizzontale) che ci permette, poi, di generalizzare a un insieme molto vasto di situazioni i risultati per esso ottenuti.

Si osserva **sperimentalmente** che l'equilibrio del punto  $P$  sul piano sussiste fino a che  $\beta$  non superi un valore critico  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < \pi/2$ ) essendo  $\varphi$  un angolo (noto come *angolo di attrito statico*) che, come hanno dimostrato alcune esperienze di Coulomb, dipende solo dalla natura dei corpi a contatto. Deve valere, cioè, il seguente postulato sull'attrito

$$0 \leq \beta \leq \varphi$$

Quindi, nel caso del punto in equilibrio sul piano inclinato, esso sta in equilibrio perché la risultante  $\Phi$  delle reazioni vincolari è inclinata (rispetto alla normale all'appoggio) in modo tale da essere uguale, contraria e con la stessa linea di azione del peso  $\mathbf{P}$  (vedi fig. 18). In altre parole, all'equilibrio, la reazione  $\Phi$  ha una componente tangenziale di modulo  $\Phi_t$  ma fra questa e il modulo  $\Phi_n$  della componente normale deve sussistere la relazione

$$|\Phi_t| \equiv \operatorname{tg} \beta |\Phi_n| \leq \operatorname{tg} \varphi |\Phi_n| \quad (54)$$

Ponendo

$$f_s = \operatorname{tg} \varphi \geq 0$$

la (54) si può scrivere

$$|\Phi_t| \leq f_s |\Phi_n| \quad (55)$$

La quantità  $f_s$  si chiama *coefficiente di attrito statico* e la (55) è la *legge di Coulomb-Morin* per l'attrito statico. La componente tangenziale della reazione vincolare  $|\Phi_t|$  si chiama, *attrito*. Il coefficiente di attrito statico si determina sperimentalmente in base alla natura dei corpi a contatto. Se  $f_s = 0$  l'angolo di attrito è nullo e, in tale caso,  $\Phi_t = 0$  (vincolo privo di attrito) e tutta la reazione  $\Phi$  è, cioè, normale.

La (54) illustrata nel caso particolare di un punto su un piano inclinato, è valida anche nel caso che il punto sia vincolato su una superficie qualsiasi.

**Osservazione** - Se un sistema ammette certe posizioni di equilibrio, supponendo gli appoggi lisci, tali posizioni saranno ancora di equilibrio in presenza di attrito. Cioè: *l'attrito favorisce l'equilibrio*.

Dalle considerazioni svolte in precedenza risulta che quando due corpi sono a contatto le reazioni che vicendevolmente si esplicano attraverso le areole di contatto non sono, generalmente, ad esse ortogonali. Tuttavia, l'esperienza mostra che le reazioni tendono a divenire normali tanto più quanto maggiore è lo stato di levigatezza delle superfici a contatto. Si giunge così ad ammettere l'esistenza di *vincoli lisci* o privi di attrito esplicitanti, cioè, solo reazioni normali. Un gran numero di problemi si trattano quindi con facilità supponendo che i vincoli siano lisci e i risultati a cui si giunge sono accettabili sia perché in molti casi l'attrito è praticamente nullo (se si applicano lubrificanti alle superfici di contatto) sia perché nei problemi di equilibrio trascurando l'attrito si agisce in favore della sicurezza e, pertanto, le configurazioni di equilibrio che si trovano supponendo i vincoli lisci sussistono, a maggior ragione, se i vincoli sono scabri.

### Vincoli ideali

Alla base della statica si pone un importantissimo principio detto *principio delle reazioni vincolari* che definisce una classe speciale di vincoli nota col nome di vincoli *ideali*.

Esso si può enunciare nei termini seguenti:

I vincoli ideali sono quelli che possono esplicare tutte e sole quelle reazioni vincolari il cui lavoro virtuale è positivo o nullo per **ogni** spostamento virtuale del sistema a partire da una generica configurazione

$$\delta L^{(v)} = \sum_{s=1}^N \Phi_s \times \delta P_s \geq 0 \quad \forall \delta P_s$$

l' = valendo nel caso di spostamenti reversibili.

Nella classe dei vincoli ideali rientrano tutti i vincoli lisci (cioè privi di attrito) ma anche tutti quei vincoli in cui l'attrito, pur essendo presente non dissipa energia. Quindi la classe dei vincoli ideali definita dal principio delle reazioni vincolari è più generale della classe dei vincoli lisci (cioè privi di attrito).

Ricordiamo, come esempi di sistemi soggetti a vincoli ideali (non necessariamente lisci) e che soddisfano, tuttavia, il principio delle reazioni vincolari i seguenti: un corpo rigido con un punto fisso, il vincolo di puro rotolamento, un punto vincolato a stare su una curva liscia (o superficie liscia), il vincolo di rigidità, un corpo rigido con un asse fisso, un solido appoggiato ad un piano liscio, ecc...

### Principio dei lavori virtuali ed equazioni cardinali della statica

Le due principali metodologie di cui ci si serve, usualmente, per la determinazione delle configurazioni di equilibrio di un sistema meccanico sono

- il principio dei lavori virtuali;
- le equazioni cardinali della statica.

Il principio dei lavori virtuali si può enunciare

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema meccanico soggetto a vincoli ideali sia in equilibrio in una posizione  $\mathcal{C}^*$  è che il lavoro virtuale delle forze attive risulti non positivo per ogni spostamento virtuale  $\delta P$  compiuto a partire da  $\mathcal{C}^*$ .

È, cioè, caratteristica delle posizioni di equilibrio di un qualunque sistema a vincoli ideali la disuguaglianza

$$\delta L^{(a)} \leq 0 \quad \forall \delta P \text{ da } \mathcal{C}^*$$

In particolare, il lavoro risulta nullo per tutti gli spostamenti virtuali reversibili effettuati a partire da  $\mathcal{C}^*$

$$\delta L^{(a)} = 0 \quad \forall \delta P \text{ reversibile da } \mathcal{C}^*$$

Si presti attenzione all'importantissimo fatto che il principio dei lavori virtuali presenta il vantaggio di chiamare in causa, ai fini della determinazione delle configurazioni di equilibrio di un sistema, soltanto le forze attive agenti sul sistema. Le reazioni vincolari non intervengono nella sua formulazione; esso è perciò molto utile quando si voglia studiare l'equilibrio di un sistema meccanico senza preoccuparsi della determinazione delle reazioni vincolari (generalmente incognite). Inoltre, esso è costituito da una relazione di tipo scalare (a differenza delle equazioni cardinali della statica) e si può applicare ad un sistema costituito da un numero qualsivoglia di gradi di libertà.

La limitazione nel suo uso consiste nel fatto che esso è applicabile solo a sistemi soggetti a vincoli ideali (che tuttavia costituiscono la gran parte dei sistemi meccanici oggetto di studio nella Meccanica Razionale).

La dimostrazione di tale principio (ma meglio sarebbe chiamarlo teorema visto che lo si dimostra; si legga al proposito in BRSV l'osservazione 8.5 a pag.156) si trova in BRSV pagg. 155-156.

In molti problemi di statica è comunque necessario calcolare anche le reazioni vincolari che rappresentano e descrivono le forze alle quali vengono sottoposte le strutture di un sistema: è quindi fondamentale, in molti problemi tecnici, conoscere tali informazioni.

La seconda metodologia, che si fonda sulle equazioni cardinali della statica, chiama in causa anche le reazioni vincolari. Tali equazioni, sono le seguenti

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(e,a)} + \mathbf{R}^{(e,v)} = 0 \\ \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} + \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,v)} = 0 \end{cases} \quad (56)$$

Esse esprimono delle condizioni a cui debbono soddisfare risultanti e momenti (rispetto ad un polo  $\Omega$ ) di sistemi di forze esterne (attive e vincolari) agenti su un corpo che si trovi in equilibrio.

Le equazioni cardinali della statica sono sempre condizioni necessarie per l'equilibrio ma, in generale, non sufficienti; tuttavia esse sono necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un sistema rigido.

### Principio dei lavori virtuali per sistemi olonomi

Il principio dei lavori virtuali assume una forma estremamente utile ed importante nel caso che venga applicato ad un sistema olonomo (ad  $n$  gradi di libertà) e soggetto a vincoli ideali.

Infatti, ricordando che per un sistema olonomo il lavoro virtuale ha la forma

$$\delta L^{(a)} = \mathbf{Q} \times \delta \mathbf{q}$$

( $\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $\mathbf{Q} \equiv (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  sono vettori nello spazio delle configurazioni e  $\times$  rappresenta il prodotto scalare in tale spazio  $\mathcal{R}^n$ ), la condizione di equilibrio  $\delta L^{(a)} \leq 0$  assume la forma

$$\mathbf{Q} \times \delta \mathbf{q} \leq 0 \quad (\forall \delta \mathbf{q}) \quad (57)$$

A questo punto dobbiamo riferirci a due possibili situazioni: vincoli bilaterali e vincoli unilaterali.

#### • Equilibrio in presenza di vincoli bilaterali

Assumiamo che i vincoli siano tutti bilaterali. In questo caso lo spazio delle configurazioni è tutto ammissibile e, pertanto, tutti gli spostamenti sono reversibili. Il principio dei lavori virtuali ci dice che

$$\mathbf{Q} \times \delta \mathbf{q} = 0 \quad (\forall \delta \mathbf{q})$$

Poiché i  $\delta \mathbf{q}$  sono arbitrari e tenendo conto del fatto che le  $\mathbf{Q}$  non dipendono dagli spostamenti (ossia da  $\delta \mathbf{q}$ ) quest'ultima si può scrivere

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = 0 \implies Q_h(q_k) = 0$$

Questa condizione, scritta per esteso, rappresenta un sistema algebrico di  $n$  equazioni per le  $n$  incognite  $q_1, q_2, \dots, q_n$

$$\begin{cases} Q_1(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \\ Q_2(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \\ \vdots \\ Q_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \end{cases} \quad (58)$$

Le soluzioni di tale sistema sono le configurazioni di equilibrio (note come *ordinarie* o *interne*). Se le forze agenti sul sistema sono conservative, sappiamo che  $Q_h = \partial U / \partial q_h$  per cui le (58) diventano

$$\frac{\partial U}{\partial q_h}(q_h) = 0$$

Possiamo dunque enunciare il

•• **Teorema 0.33** *Le configurazioni di equilibrio ordinarie di un sistema olonomo, conservativo e a vincoli ideali sono i punti di stazionarietà della funzione potenziale.*

#### • Equilibrio in presenza di vincoli unilaterali

In presenza di vincoli unilaterali, lo spazio delle configurazioni non è tutto ammissibile e vi saranno dei punti di tale spazio per cui gli spostamenti non sono reversibili. Per esaminare questo problema bisogna, allora, applicare la

$$\mathbf{Q} \times \delta \mathbf{q} \leq 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (59)$$

in presenza di spostamenti virtuali sia reversibili che irreversibili.

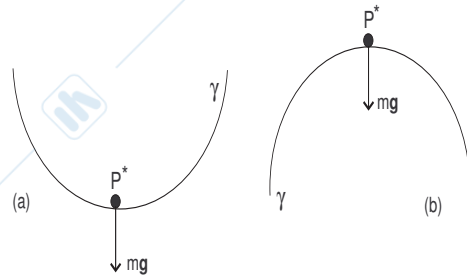


Figura 19: Equilibrio e stabilità di un punto pesante.

Limitandoci a considerare il caso particolare e semplice in cui il sistema abbia  $n$  gradi di libertà (i parametri che descrivono il sistema siano  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) e vi siano limitazioni per un solo parametro (ad es.  $q_1$ ) del tipo

$$a \leq q_1 \leq b$$

osserviamo che il sistema può avere sia configurazioni in cui

$$a < q_1 < b$$

che configurazioni tali che

$$\text{I) } q_1 = a \Rightarrow \delta q_1 \geq 0$$

$$\text{II) } q_1 = b \Rightarrow \delta q_1 \leq 0$$

Esprimendo il lavoro virtuale delle forze agenti sul sistema si ottiene, con alcune considerazioni e applicando la (59), che le condizioni di equilibrio per la configurazione di confine corrispondente a  $q_1 = a$  sono date da

$$\begin{cases} Q_1(a, q_2, \dots, q_n) \leq 0 \\ Q_h(a, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad h = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

e quelle relative a  $q_1 = b$

$$\begin{cases} Q_1(b, q_2, \dots, q_n) \geq 0 \\ Q_h(b, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad h = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

### Stabilità dell'equilibrio (in senso statico)

Gli stati di equilibrio di un sistema meccanico si possono distinguere in *stabili* o *instabili*. Nella parte (a) della fig.19 possiamo vedere un punto pesante che sta sul "fondo" di una curva  $\gamma$  posta in un piano verticale e in (b) lo stesso punto è posto sul "vertice" di  $\gamma$ . Entrambe le posizioni sono di equilibrio ma la loro natura è completamente diversa. Immaginiamo, infatti, di spostare di "poco" il punto dalla sua posizione  $P^*$  con velocità "piccola". È intuitivo che in (a) il punto resta ( $\forall t$ ) in un intorno di  $P^*$ ; in (b) il punto tende ad allontanarsi da  $P^*$ . Nel primo caso parleremo di *equilibrio stabile* e nel secondo di *equilibrio instabile*. Lo studio rigoroso della stabilità dell'equilibrio richiede argomenti tipici della dinamica e considerazioni non elementari di tipo analitico (si veda BRSV pp. 332-340).

Ci si può tuttavia limitare a dare una definizione di stabilità di tipo statico che fa leva su alcune riflessioni basate sul concetto di lavoro e che conduce, infine, alla seguente

• **Definizione 0.30 (statica di equilibrio)** Una configurazione di equilibrio  $\mathbf{q}^*$  si dice stabile se il lavoro (effettivo) compiuto dalle forze attive per portare il sistema da  $\mathbf{q}^*$  a  $\tilde{\mathbf{q}}$  è sempre strettamente negativo.

In formula

$$\Delta L^{(a)}(\mathbf{q}^* \rightarrow \tilde{\mathbf{q}}) < 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{I}(\mathbf{q}^*, \epsilon) \quad (60)$$

essendo  $\mathcal{I}$  un opportuno intorno di  $\mathbf{q}^*$  di raggio  $\epsilon$ .

La (60) risulta di immediata valutazione nel caso in cui le forze agenti sul sistema siano conservative. Infatti, in tale caso

$$\Delta L^{(a)}(\mathbf{q}^* \rightarrow \tilde{\mathbf{q}}) = U(\tilde{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}^*) < 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{I}(\mathbf{q}^*, \epsilon); \quad \tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{q}^*$$

Quest'ultima ci informa che nel caso conservativo, il potenziale ha un massimo relativo in  $\mathbf{q}^*$ . Quindi, (si ricordi che  $V = -U$ ):

•• **Teorema 0.34** Le configurazioni di equilibrio stabile di un sistema olonomo e conservativo corrispondono ai massimi relativi (minimi relativi) del potenziale  $U$  (energia potenziale  $V$ ). Le restanti configurazioni sono di equilibrio instabile.

### Meccanica lagrangiana

Nella ricerca delle configurazioni di equilibrio di un sistema meccanico abbiamo ottenuto il principio dei lavori virtuali, che ci permette di risolvere i problemi della statica conoscendo soltanto le forze attive agenti senza coinvolgere le reazioni vincolari, in generale, incognite. È evidente che è di estremo interesse ottenere anche nel caso dinamico una formulazione equivalente al principio dei lavori virtuali; in particolare, sarebbe molto utile potere disporre di equazioni del moto in forma scalare e che, a differenza delle equazioni cardinali della dinamica, non contengano le reazioni vincolari.

**Osservazione** - Il principio delle reazioni vincolari che ci ha permesso di definire in ambito statico la particolare classe dei vincoli ideali, viene comunemente ammesso come valido anche in ambito dinamico e, ciò, in base al fatto che l'esperienza mostra che esso viene rispettato anche in regime dinamico da quei vincoli che lo soddisfano in regime di equilibrio. Pertanto, assumiamo la validità del principio delle reazioni vincolari anche in ambito dinamico.

### Equazioni di Lagrange

Consideriamo il II° principio della dinamica per un sistema di punti ( $s = 1, 2, \dots, N$ )

$$m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{F}_s + \Phi_s \implies \Phi_s = -(\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s) \quad (s = 1, 2, \dots, N)$$

Da questa si perviene, moltiplicandone scalarmente ambo i membri per  $\delta P_s$ , sommando sull'indice  $s$  e tenendo conto del principio delle reazioni vincolari, a

$$\sum_{s=1}^N (\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s) \times \delta P_s \leq 0 \quad \forall \delta P_s \quad (61)$$

l' = valendo nel caso che tutti gli spostamenti virtuali siano reversibili. La (61) è nota come *disuguaglianza variazionale della dinamica* o, quando vale il segno di uguaglianza, come *equazione simbolica della dinamica*.

Per potere utilizzare la (61) ed ottenere le equazioni di Lagrange bisogna fare tre ipotesi concernenti la struttura del sistema meccanico:

vincoli ideali; vincoli bilaterali; sistema olonomo.

Introducendo l'espressione di  $\delta P_s$  (vedi (10)) nella equazione simbolica della dinamica avremo

$$\sum_{s=1}^N \mathbf{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h - \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h = 0 \quad \forall \delta q_h \quad (62)$$

Ponendo

$$\tau_h = \sum_{s=1}^N m_s \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h}$$

che si chiamano *binomi lagrangiani* e ricordando (31), la (62) si può scrivere

$$(Q_h - \tau_h) \delta q_h = 0 \quad \forall \delta q_h$$

che implica (teorema 13.5 BRSV p.317), grazie all'arbitrarietà degli spostamenti virtuali  $\delta q_h$  e al fatto che sia  $Q_h$  che  $\tau_h$  non dipendono da essi

$$Q_h(q_h, \dot{q}_h, t) = \tau_h(q_h, \dot{q}_h, \ddot{q}_h, t) \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (63)$$

Queste ultime sono  $n$  equazioni differenziali del secondo ordine nelle  $n$  funzioni incognite  $q_h(t)$  (*equazioni di Lagrange di prima specie*). Integrandole (ammesso che ciò sia possibile...) si ottengono tali funzioni e, cioè, il moto del sistema olonomo.

Si dimostra che sussiste il seguente legame tra i binomi lagrangiani  $\tau_h$  e l'energia cinetica  $T$  del sistema

$$\tau_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}$$

Valendosi di tale identità, le equazioni (63) si possono riscrivere così

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (64)$$

Le (64) si chiamano *equazioni di Lagrange*.

### Equazioni di Lagrange nel caso di forze conservative

Nel caso particolarmente importante in cui la sollecitazione attiva sia conservativa, sappiamo che  $Q_h = \partial U / \partial q_h$ . In tal caso, le (64) diventano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h} \quad (65)$$

che, ponendo  $\mathcal{L} = T + U$ , (o  $\mathcal{L} = T - V$ ), si possono riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (66)$$

La funzione  $\mathcal{L}(q_h, \dot{q}_h; t)$  si chiama *funzione lagrangiana* del sistema.

### Integrali primi del moto in ambito lagrangiano

Quando il moto di un sistema meccanico è governato da una lagrangiana  $\mathcal{L}$  è possibile dare la definizione di *coordinata ciclica* (o *ignorabile*).

• **Definizione 0.31** Una coordinata lagrangiana  $q_{\bar{h}}$  si dice *coordinata ciclica* (o *ignorabile*) se non compare esplicitamente nella funzione lagrangiana.

In tale caso  $\mathcal{L}$  risulta indipendente da  $q_{\bar{h}}$  e si ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\bar{h}}} = 0$$

Di conseguenza l'equazione di Lagrange corrispondente alla variabile  $q_{\bar{h}}$  fornisce

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\bar{h}}} = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\bar{h}}} = \text{costante} \quad (67)$$

che rappresenta un integrale primo del moto. In meccanica analitica la quantità  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_h$  si chiama *momento cinetico* (o *momento coniugato*) alla coordinata  $q_h$  e si indica con  $p_h$

$$p_h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}$$

La (67) si può quindi riscrivere

$$\frac{d}{dt} p_{\bar{h}} = 0 \implies p_{\bar{h}} = \text{costante}$$

Vale, così, il seguente

•• **Teorema 0.35** *Il momento coniugato ad una variabile ciclica si conserva.*

È anche possibile avere, in ambito lagrangiano, l'integrale primo della energia meccanica totale. Infatti vale il seguente (teorema 13.12, BRSV pag.327)

•• **Teorema 0.36** *In un sistema meccanico soggetto a vincoli indipendenti dal tempo e sollecitato da sole forze conservative, si conserva l'energia meccanica totale  $E = T - U$ .*

### Piccole oscillazioni

Il formalismo lagrangiano ci permette di studiare, nella forma più appropriata, l'importante problema dei *piccoli moti* di un sistema conservativo nell'intorno di una sua posizione di equilibrio stabile. Tale studio si effettua linearizzando le equazioni differenziali del moto del sistema nell'intorno della suddetta configurazione; le equazioni così approssimate si possono integrare analiticamente fornendoci, in tal modo, tutte le informazioni che cerchiamo. Per potere applicare la metodologia che segue, il sistema meccanico deve essere

- olonomo; soggetto a vincoli fissi; sottoposto a forze conservative.

La linearizzazione delle equazioni differenziali del moto del sistema si effettua approssimando la funzione potenziale  $U$  e l'energia cinetica  $T$  del sistema in un intorno della configurazione stabile  $\mathbf{q}^*$ . A tal fine, si sviluppano in serie di Taylor tali funzioni troncando lo sviluppo al secondo ordine.

Lo sviluppo della funzione potenziale  $U = U(q_l)$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ; numero di gradi di libertà del sistema) ha la forma

$$U(q_l) = U(q_l^*) + \left\{ \frac{\partial U}{\partial q_h}(q_l^*) \right\} (q_h - q_h^*) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}(q_l^*) \right\} (q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*) + \dots \quad (68)$$

I termini

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}(q_l^*)$$

rappresentano gli elementi della matrice hessiana  $\mathbf{H}$  valutati nella posizione  $\mathbf{q}^*$ . Inoltre, poichè  $\mathbf{q}^*$  è una posizione di equilibrio, in essa si annulla la derivata della funzione potenziale  $U$

$$\frac{\partial U}{\partial q_h}(q_l^*) = 0$$

e, quindi, lo sviluppo (68) si riduce a

$$U(q_l) - U(q_l^*) = \frac{1}{2} \{H_{hk}^*\} (q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*)$$

È comodo, infine, introdurre le "coordinate relative" alla configurazione di equilibrio stabile  $z_h = q_h - q_h^*$  ( $\dot{z}_h = \dot{q}_h$ ,  $\ddot{z}_h = \ddot{q}_h$ ).

In tal modo il potenziale approssimato  $U$  (che indichiamo con  $\tilde{U}$ ) può essere, in definitiva, scritto ( $U(q_l^*)$  è una costante trascurabile)

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} H_{hk}^* z_h z_k$$

ove  $H_{hk}^*$  rappresenta la matrice Hessiana calcolata nella posizione di equilibrio stabile  $\mathbf{q}^*$ .

Per approssimare l'energia cinetica  $T$  del sistema, lo sviluppo in serie deve essere arrestato all'ordine zero perchè, dato che i vincoli a cui è soggetto il sistema sono supposti fissi, l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea nelle  $\dot{\mathbf{q}}$ . Pertanto, lo sviluppo si presenta semplicemente così

$$a_{hk}(q_l) = a_{hk}(q_l^*) \equiv a_{hk}^*$$

che è la matrice della energia cinetica calcolata nel punto di equilibrio stabile. Ne segue

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} a_{hk}^* \dot{z}_h \dot{z}_k$$

La funzione lagrangiana approssimata a forma quadratica ( $\tilde{L}$ ) è, dunque, infine

$$\tilde{L} = \tilde{T} + \tilde{U} = \frac{1}{2} a_{hk}^* \dot{z}_h \dot{z}_k + \frac{1}{2} H_{hk}^* z_h z_k$$

46

A partire da tale funzione possiamo ottenere le seguenti equazioni di Lagrange del moto linearizzate

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}_j} \right) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial z_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (69)$$

che forniscono, con alcuni calcoli,

$$a_{jk}^* \ddot{z}_k - H_{jk}^* z_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^* \ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{H}^* \mathbf{z} = 0$$

Si tratta di un sistema di  $n$  equazioni differenziali **lineari** del secondo ordine, omogenee e a coefficienti costanti che descrivono piccole oscillazioni (di tipo armonico!) del sistema nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile.