FORMULARIO

- PRODOTTO SCALARE: $\vec{u}\cdot\vec{V} = |\vec{u}|\cdot|\vec{V}|\cdot\cos\varphi$
- VERSORE: $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$
- PRODOTTO VETTORIALE: $\vec{u}\wedge\vec{V} = |\vec{u}|\cdot|\vec{V}|\cdot\sin\varphi\,\hat{n}$
- MOMENTO DI UN VETTORE: $\vec{M_O} = (P-O)\wedge\vec{V}$ → FORMULA TRASPORTO: $\vec{M_{O'}} = \vec{M_O} + (O-O')\wedge\vec{V}$
- EQ. PARAMETRICA RETTA: $P-Q = \lambda\vec{V} \iff \begin{cases} x = x_Q + \lambda V_x \\ y = y_Q + \lambda V_y \\ z = z_Q + \lambda V_z \end{cases}$

PUNTO MATERIALE

- MOTO DEL PUNTO: $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$
- VELOCITÀ: $\dot{V}(t) = \frac{d}{dt}[P(t)-O] = \dot{x}(t)\hat{\imath} + \dot{y}(t)\hat{\jmath} + \dot{z}(t)\hat{k}$ → sempre tangente alla traiettoria
- ACCELERAZIONE: $a(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{x}(t)\hat{\imath} + \ddot{y}(t)\hat{\jmath} + \ddot{z}(t)\hat{k}$
- ASCISSA CURVILINEA (lunghezza d'arco): $S(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2(\tau)+\dot{y}^2(\tau)+\dot{z}^2(\tau)}\,d$
- TERNA INTRINSECA (o di Frenet): $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ → base ortonormale
  - → VELOCITÀ: $\vec{V}(t) = \dot{S}(t)\,\vec{T}(S(t))$
  - → ACCELERAZIONE: $\vec{a}(t) = \vec{a}_T(t) + \vec{a}_N(t) = \ddot{S}(t)\vec{T}(S(t)) + \dot{S}^2(t)\,K(S(t))\,\vec{N}(S(t))$
- COORDINATE NEL PIANO:
  - → da POLARI a CARTESIANE: $\begin{cases} x_P = r\cdot\cos\theta \\ y_P = r\cdot\sin\theta \end{cases}$
  - → da CARTESIANE a POLARI: $\begin{cases} r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \\ \tan\theta = \frac{y_P}{x_P} \end{cases}$

  → COORDINATE:

  CILINDRICHE: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

  SFERICHE: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cdot\mathrm{co} \\ y = r\sin\theta\cdot\mathrm{si} \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

- MOTO NEL PIANO: $\vec{u_r}(t) = \cos(t)\hat{\imath} + \sin\theta(t)\hat{\jmath}$ // $P(t)-O$

  $\vec{u_\theta}(t) = -\sin\theta(t)\hat{\imath} + \cos\theta(t)\hat{\jmath}$ ⊥ $\vec{u_r}(t)$

  $\begin{cases} \dot{\vec{u_r}} = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta} & \text{direzione radiale} \\ \dot{\vec{u_\theta}} = -\dot{\theta}\,\vec{u_r} & \text{direzione trasversale} \end{cases}$
  - → VELOCITÀ: $\vec{V}(t) = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$
  - → ACCELERAZIONE: $\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u_\theta}$
- MOTO CIRCOLARE: $r(t) = \text{cost.}$ (in coordinate polari)

  $\vec{V}(t) = r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

  $\vec{a}(t) = -r\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ con $-r\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$ = ACC. CENTRIFUGA
- MOTO CIRCOLARE UNIFORME: $r(t) = \text{cost}$ $\quad |\vec{V}(t)| = r|\dot{\theta}| = \text{cost} \Rightarrow |\dot{\theta}| = \text{cost.}$

  $\vec{V}(t) = r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

  $\vec{a}(t) = -r\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$ $\quad (\ddot{\theta} = 0)$

CINEMATICA CORPO RIGIDO

(CR = insieme di punti materiali le cui distanze rimangono costanti nel tempo.)

- CONDIZIONE CR: $|P_i(t) - P_j(t)| = c_{ij} = \text{cost} \quad \forall t \ \forall i,j$
- VELOCITÁ CR: $\vec{V}_i(t) = \frac{d}{dt}[P_i(t) - O]$ (punto i-esimo)
- SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ base
- FORMULE DI POISSON: $\begin{cases} \dot{\vec{e}}_1 = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 \\ \dot{\vec{e}}_2 = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_2 \\ \dot{\vec{e}}_3 = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3 \end{cases}$ con $\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{e}_1 \wedge \dot{\vec{e}}_1 + \vec{e}_2 \wedge \dot{\vec{e}}_2 + \vec{e}_3 \wedge \dot{\vec{e}}_3)$ velocitá angolare rispetto a sistema fisso
- VELOCITÁ DI Q RISPETTO A P: $\vec{V}_Q = \vec{V}_P + \overbrace{\vec{\omega} \wedge (Q-P)}^{\text{in modulo: } \omega^2 d^2}$ per tutti i punti del CR $\longrightarrow (\vec{V}_P - \vec{V}_Q) \cdot (P-Q) = 0$
- MOMENTO RISPETTO A P: $\vec{M}_P = (Q-P) \wedge \vec{\omega}$
- DECOMPOSIZIONE DI V: $\vec{V}_P = \vec{V}_{\parallel} + \vec{V}_{\perp}$
  - $\vec{V}_{\parallel} = (\vec{V}_P \cdot \hat{\omega})\hat{\omega}$
  - $\vec{V}_{\perp} = \vec{V}_P - \vec{V}_{\parallel} = \vec{\omega} \wedge (C-P)$
- ASSE DI MOZZI: $Q - C = \lambda \vec{\omega}$ (tutti i punti hanno velocitá $\vec{V}_{\parallel}$ e $\parallel$ a $\vec{\omega}$) $\rightarrow$ retta per C $\parallel$ ad $\vec{\omega}$.
- MOTO TRASLATORIO: $\vec{\omega}(t) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_Q = \vec{V}_P$ tutti i punti del CR hanno la stessa V ad ogni istante
- MOTO ROTATORIO: CR ruota attorno ad un asse fisso
- MOTO DI ROTOTRASLAZIONE: traslazione + rotazione
- MOTO POLARE: un punto del sistema solidale é fisso
- MOTO RIGIDO PIANO: le velocitá dei punti del CR si mantengono ad ogni istante t $\parallel$ ad un piano fisso

  $\vec{\omega}(t) \parallel \vec{\lambda}_3 \ \forall t$

  $\vec{\omega} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{\parallel} = \vec{0}$ con $\vec{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\vec{\lambda}_3$

  $C = (x_1^c, x_2^c, 0)$ intersezione asse di istantanea rotazione con Λ.

  $C - P = \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \wedge \vec{V}_P$
- CENTRO DI ISTANT. ROTAZ. RISPETTO AL SISTEMA FISSO: $\begin{cases} x_1^c = x_1^P - \frac{V_2^P}{\omega_3} = x_1^P - \frac{\vec{V}_P \cdot \vec{\lambda}_2}{\omega_3} \\ x_2^c = x_2^P + \frac{V_1^P}{\omega_3} = x_2^P + \frac{\vec{V}_P \cdot \vec{\lambda}_1}{\omega_3} \\ x_0^c = 0 \end{cases}$
- C IN COORDINATE CARTESIANE: $\begin{cases} y_1^c = \frac{-\vec{V}_0 \cdot \vec{e}_2}{\omega_3} \\ y_2^c = \frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{e}_1}{\omega_3} \\ y_3^c = 0 \end{cases}$
- POLARE
  - FISSA: $C(t) - \Omega = x_1(t)\vec{\lambda}_1 + x_2(t)\vec{\lambda}_2$
  - MOBILE: $C(t) - O = y_1(t)\vec{e}_1(t) + y_2(t)\vec{e}_2(t)$
- COORDINATE LIBERE (o Lagrangiane): coordinate indipendenti sufficienti ad esprimere la configurazione di un sistema. $\rightarrow$ NUMERO GRADI LIBERTÀ

CINEMATICA RELATIVA

· 1° OSSERVATORE: $\Omega x_1, x_2, x_3 \rightarrow$ base $\{\vec{\imath}_1, \vec{\imath}_2, \vec{\imath}_3\}$

- → POSIZIONE P RISPETTO AL SISTEMA: $P-\Omega = x_1 \vec{\imath}_1 + x_2 \vec{\imath}_2 + x_3 \vec{\imath}_3 \Rightarrow P(x_1, x_2, x_3)$
- → VELOCITÁ P: $\vec{V}_P = \frac{d}{dt}[P-\Omega] = \dot{x}_1 \vec{\imath}_1 + \dot{x}_2 \vec{\imath}_2 + \dot{x}_3 \vec{\imath}_3$
- → ACCELERAZIONE P: $\vec{a}_P = \frac{d}{dt}\vec{V}_P = \ddot{x}_1 \vec{\imath}_1 + \ddot{x}_2 \vec{\imath}_2 + \ddot{x}_3 \vec{\imath}_3$

· 2° OSSERVATORE: $O y_1, y_2, y_3 \rightarrow$ base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

- → POSIZIONE P: $P-O = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3$
- → VELOCITÁ P: $\vec{V}_P' = \frac{d}{dt}[P-O] = \dot{y}_1 \vec{e}_1 + \dot{y}_2 \vec{e}_2 + \dot{y}_3 \vec{e}_3$
- → ACCELERAZIONE P: $\vec{a}_P' = \frac{d}{dt}\vec{V}_P' = \ddot{y}_1 \vec{e}_1 + \ddot{y}_2 \vec{e}_2 + \ddot{y}_3 \vec{e}_3$

· LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÁ: $\vec{V}_P = \vec{V}_P' + \vec{V}_P^T$

osservatore fisso

→ velocità relativa

$\vec{V}_P^T = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (O-\Omega)$ velocità di trascinamento

↳ con $\vec{V}_O$ = velocità di O rispetto a $\Omega x_1 x_2 x_3$

$\vec{\omega}$ = velocità angolare di $O y_1 y_2 y_3$ rispetto a $\Omega x_1 x_2 x_3$

Se P è in quiete rispetto a $O y_1 y_2 y_3$ allora: $\vec{V}_P' = \vec{a}_P' = \vec{0}$

· LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE ACCELERAZIONI: $\vec{a}_P = \vec{a}_P' + \vec{a}_P^T + \vec{a}_P^c$

$\vec{a}_P^T = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)]$

$\vec{a}_P^c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_P'$ → accelerazione di Coriolis.

VINCOLI

→ limitazione al moto di un sistema di punti materiali $P_1, \dots, P_N$.

· BILATERI: $f(P_1, \dots, P_N, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_N, t) = c \rightarrow f(P_1, \dots, P_N, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_N, t) - c = 0$

· UNILATERO: $f(P_1, \dots, P_N, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_N, t) \geq 0$

· FISSO: f non dipende da t

· MOBILE: f dipende da t

· OLONOMO: f non dipende da V

· ANOLONOMO: f dipende da V

· CONDIZIONE DI RIGIDITÁ: $|P_i - P_j| = c_{ij}$ cost. in t. (CR)

· VINCOLI SUI CR:

- → PUNTO FISSO (cerniera fissa): $\begin{cases} x_A = c_1 \\ y_A = c_2 \\ z_A = c_3 \end{cases}$ bilatero fisso olonomo $\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{0}$
- → CERNIERA MOBILE (su coppia di CR): B-C $\iff \begin{cases} x_B = x_C \\ y_B = y_C \\ z_B = z_C \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_C$

- → ASSE FISSO (cerniera cilindrica): equivale a due cerniere fisse. $\vec{V}_P=\vec{0}$ $\forall P$ dell'asse r.
- → CARRELLO: vincola un punto del CR a muoversi lungo una guida $\vec{V}_A \cdot \vec{N} = \vec{0}$
- → VINCOLO DI CONTATTO: $\vec{V}_{Q_1} \cdot \vec{N} = \vec{V}_{Q_2} \cdot \vec{N}$
- → INCASTRO: $\vec{V}_P = \vec{0}$ (ogni punto P del CR é fisso $\vec{V}_P = \vec{0}$.
- → FILO INESTENSIBILE: $\vec{V}_A \cdot \vec{T}_A = \vec{V}_P \cdot \vec{T}_P$
- → PURO ROTOLAMENTO: $\vec{V}_{Q_1} = \vec{V}_{Q_2}$

PRINCIPI DELLA MECCANICA

- 1°: Esistono dei SISTEMI INERZIALI rispetto ai quali un punto materiale isolato rimane in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.
- 2°: $\vec{F} = m\vec{a}$
- 3°, PRINCIPIO DI AZIONE-REAZIONE: Le forze che due punti materiali esercitano l'uno sull'altro sono OPPOSTE (stesso modulo, stessa direzione ma verso opposto).

  $\vec{Q} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$ → quantitá di moto si conserva
- PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE FORZE: Due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ che agiscono su un punto materiale hanno lo stesso effetto di $\vec{F}_1+\vec{F}_2$.
- POSTULATO DELLE REAZIONI VINCOLARI: la REAZIONE VINCOLARE $\vec{\Phi}$ é la forza che un vincolo esercitá su un punto materiale.

  $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\Phi}$

CLASSIFICAZIONE FORZE

- FORZA ATTIVA: $\vec{F}(P, \vec{V}, t)$
  - → FORZA PESO: $\vec{F} = -mg$ con $g \approx 9{,}81\ m/s^2$
  - → FORZA ELASTICA: $\vec{F}_e = -K(P-O)$ con K= costante elastica
  - → FORZA GRAVITAZIONALE: $\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r} \frac{P_1 - P_2}{|P_1 - P_2|}$
  - → RESISTENZA ARIA: $\vec{F} = -\gamma\vec{V}$
- FORZE REATTIVE: reazioni vincolari, attrito
- FORZE INTERNE: attive e reattive
- FORZE ESTERNE: attive e reattive
- FORZE CONSERVATIVE: ammettono energia potenziale (F peso, F gravitazionale, F elastica)

  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ con $\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$

- FORZA DI ATTRITO: forza non conservativa che si oppone al moto.
  - → ATTRITO STATICO: $|\vec{\Phi}_T| \leq \mu_s |\vec{\Phi}_N|$ con μ_s = coefficiente di attrito statico.
  - → ATTRITO DINAMICO: $|\vec{\Phi}_T| = -\mu_d |\vec{\Phi}_N|$ con μ_d = coefficiente di attrito dinamico.

MOTI DI UN PUNTO MATERIALE

- OSCILLATORE ARMONICO: $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ con $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (soluzione generale)

  Sol. particolare: $x(t_0) = x_0$ $\quad \dot{x}(t_0) = V_0$ $\quad t_0$ = istante iniziale

  ↳ se $t_0 = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t)$ con $C_1 = x_0, C_2 =$

  $\overset{!}{=} A \sin(\omega t + \phi)$ con $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2}$ AMPIEZ

  $\tan\phi = \frac{x_0}{V_0}\omega$ FASE

MECCANICA RELATIVA

- 2° PRINCIPIO MECCANICA: $m\vec{a}_P^r + m\vec{a}_P^\tau + m\vec{a}_P^c = \vec{F} + \vec{\Phi}$ (sistema mobile)
- EQ. MOTO NEL SISTEMA MOBILE: $m\vec{a}_P^r = \vec{F} + \vec{\Phi} + \vec{F}^\tau + \vec{F}^c$
- SISTEMA MOBILE IN MOTO RETTILINEO UNIFORME: $m\vec{a}_P = \vec{F} + \vec{\Phi}$ (come sistema fisso)
- FORZA CENTRIFUGA: $\vec{F}^\tau = m\omega^2 (P-Q)$
- SISTEMA IN MOVIMENTO RISPETTO AD UNO FISSO:
  - → $\vec{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i$ (quantità di moto).
  - → $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i^2$ con $V_i = |\vec{V}_i|$ (energia cinetica)
  - → $\vec{K}_A = \sum_{i=1}^{N} (P_i - A) \wedge m_i \vec{V}_i$ (momento q.m. rispetto ad
    - ↳ dipende dal polo A
    - Se $B \neq A$ allora: $\vec{K}_B = \vec{K}_A - (B-A) \wedge \vec{Q}$
  - → $\left.\begin{array}{l} \vec{Q} = m\vec{V}_G \\ \vec{T} = \frac{1}{2} m V_G^2 + T' \end{array}\right\}$ per il centro di massa

- EQ. CARDINALI DELLA DINAMICA:
  - → 1ª: $\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{(e)}$ con (e) = esterne
  - → 2ª: $\dot{\vec{K}}_A = -\vec{V}_A \wedge \vec{Q} + \vec{M}^{(e)}$
- CENTRO DI MASSA:
  - → $m\dot{\vec{V}}_G = \vec{R}^{(e)}$ (eq. moto)
  - → $\vec{M}_A = (P-A) \wedge \vec{F}$ (momento di $\vec{F}$ applicato in P rispetto al polo A).
  - → $\vec{M}_A^{(e)} = \sum_j (P_j - A) \wedge \vec{F}_j^{(e)}$ (risultante momenti forze esterne)
  - → $\vec{M}_A^{(i)} = \sum_j (P_j - A) \wedge \vec{F}_j^{(i)}$ (risultante momenti forze interne)
  - → $\vec{M}_A^{(i)} = \vec{0}$ per ogni scelta del polo A
  - → $\vec{M}_B^{(i)} = \vec{M}_A^{(i)} - (B-A) \wedge \vec{R}^{(i)} = \vec{M}_A^{(i)} = \vec{0} \iff B \neq A$ e $\vec{R}^{(i)} = \vec{0}$

· DETERMINAZIONE MOTO DEI PUNTI: $\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2 \\ m_3\vec{a}_3 = \vec{F}_3 \end{cases}$

LAVORO DI UNA FORZA

· $L = \int_{t_0}^{t} \pi(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})\,dt$ con $\pi(t)$ = potenza di $\vec{F}$ su P all'istante t.

GRADIENTE DI UNA FUNZIONE

· $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$

FORZE CONSERVATIVE

· CONDIZIONE: $\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} V(x,y,z)$ con V = energia potenziale $(-\vec{\nabla}V = \vec{F})$

· LAVORO: $L = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\cdot\vec{V}\,dt = V(A) - V(B)$

se $B = A \longrightarrow L = 0$ (cammino chiuso)

· POTENZA: $\pi(t) = -\frac{d}{dt}[V(P(t))] \longrightarrow$ forze non conservative: $\pi(t) = 0$

· ROTORE DI UNA FORZA: $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \dots\right.$

ENERGIA POTENZIALE

· GRAVITAZIONALE: $V = mgz$

· ELASTICA: $V = \frac{1}{2}K|P-O|^2 = \frac{1}{2}K(x^2+y^2+z^2)$

· TEOREMA FORZE VIVE: $\Delta T = L$

ENERGIA MECCANICA

· TEOREMA CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA: $E = T + V \rightarrow$ solo per:
- forze conservative
- vincoli bilate fissi e lisci

CENTRO DI MASSA

- DEFINIZIONE CENTRO DI MASSA: $G-O = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)$ → non dipende dal polo O

- COORDINATE CARTESIANE C.M.: $\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ y_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ z_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{cases}$ momenti statici

- MOMENTI STATICI: $\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\int_C \rho(x,y,z)\, x \, dV \\ y_G = \frac{1}{m}\int_C \rho(x,y,z)\, y \, dV \\ z_G = \frac{1}{m}\int_C \rho(x,y,z)\, z \, dV \end{cases}$

- DENSITÁ DI MASSA: $\rho(P) = \frac{dm(P)}{d\mu(P)}$ → massa, → volume

- C.M. DI UN SISTEMA DI CORPI: $G-O = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i (G_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$

MOMENTO D'INERZIA

- DEFINIZIONE: $I = md^2 = m\,|(P-O)\wedge \hat{u}|$
- SISTEMA CONTINUO: $I_r = \int_C d^2(P)\,\rho(P)\,d\mu$ con $d = |(P-O)\wedge \hat{u}|$
- MOMENTI D'INERZIA NOTI: I_{rG}
  - → asta omogenea: $I = \frac{m\ell^2}{12}$
  - → rettangolo omogeneo: $I = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$
  - → cerchio omogeneo: $I = \frac{mR^2}{2}$
  - → settore corona circolare: $I = \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2)$
  - → cilindro omogeneo: $I = \frac{mR^2}{2}$
  - → sfera omogenea: $I = \frac{2}{5}mR^2$

- TEOREMA DI HUYGENS-STAINER: $I = I_{rG} + md^2$

- MATRICE D'INERZIA: $\mathbb{I}_O = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{pmatrix}$ → se $\mathbb{I}_O$ diagonale: $\mathbb{I}_O = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$
  - → MOMENTO DELLA QUANTITÁ DI MOTO DI UN C.R.: $\vec{K}_O = (G-O)\wedge m\vec{V}_G + \mathbb{I}_G$
    - ↳ se H = centro istantanea rotazione: $\vec{K}_H = \mathbb{I}_H \vec{\omega}$
  - → E. CINETICA: $T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbb{I}_G$

- ROTOLAMENTO PURO: $Q = R\dot{\theta}$

$$K_C = \mathbb{I}_C\,\omega = -\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta} \quad \text{con } \omega = \dot{\theta} \quad e \quad \mathbb{I}_C = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{pmatrix}$$

$K_H = \mathbb{I}_H\,\omega = I_{zH}\,(\dot{\theta})$ con H = punto di istantanea rotazione

$K_H = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}$ (Teorema H-S)

$T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2$

- ROTOLAMENTO CON STRISCIAMENTO: $Q = mV_G = m\dot{x}_C$

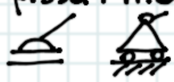
$K_C = \mathbb{I}_O\,\omega = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}$

$\vec{K}_H = (C-H)\wedge\vec{Q} + \mathbb{I}_C\,\vec{\omega} \longrightarrow K_H = mR\left(\dot{x}_C + \frac{R\dot{\theta}}{2}\right)$

$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_C^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2$

- POTENZA CR: $\Pi = \vec{R}\cdot\vec{V}_O + \vec{M}_O\cdot\vec{\omega}$
- VELOCITÁ VIRTUALI: $\tilde{V}_P = \tilde{V}_O + \tilde{\omega}\wedge(P-O)$ (per un CR)
  - → vincoli bilateri: tutte le velocitá virtuali sono reversibili
  - → vincoli unilateri: le velocitá virtuali non sono reversibili
- POTENZA VIRTUALE: $\tilde{\Pi} = \vec{R}\cdot\tilde{V}_O + \vec{M}_O\cdot\tilde{\omega}$ (per un CR)

VINCOLI IDEALI

- DEFINIZIONE: $\tilde{\Pi}^{(v)} = \sum_i \vec{\Phi}_i\cdot\tilde{V}_i \geq 0 \quad \forall \tilde{V}_1,\dots,\tilde{V}_N \ \forall t$
  - → vincolo bilatero: $\tilde{\Pi}^{(v)} = 0 \quad \forall \tilde{V}_1,\dots,\tilde{V}_N \ \forall t$
  - → CR: $\tilde{\Pi}^{(v)} = 0 \quad \forall \tilde{V}_O, \tilde{\omega} \ \forall t$
- VINCOLI SU CORPI RIGIDI:
  - → vincolo di contatto liscio: é IDEALE
  - → vincolo di puro rotolamento: é IDEALE
  - → cerniera mobile: é IDEALE
  - → cerniera fissa: é IDEALE
  - → puro rotolamento su guida fissa: é IDEALE
  - → vincolo d'appoggio liscio (unilatero): é IDEALE
- VINCOLI PIANI IDEALI:
  - → cerniera fissa / mobile
  - → carrello: 
  - → pattino: 
  - → incastro
  - → puro rotolamento

STATICA

- EQUILIBRIO DI UN SISTEMA: Un sistema é in equilibrio se: $P_i(t_0) = P_i^\circ$, $\vec{V_i}(t_0) = \vec{0}$ $\rightarrow$ $P_i(t) = P_i^\circ$, $\vec{V_i}(t) = \vec{0}$
- COND. NECESS E SUFF. PER CONFIGURAZIONE EQUILIBRIO: $\vec{F_i} = \vec{0}$
- EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA: $1^a \longrightarrow \vec{R}^{(e)} = \vec{0}$
  $2^a \longrightarrow \vec{M_O}^{(e)} = \vec{0}$ con (e) = esterno
- PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI: $\delta L^{(a)} = \sum_i \vec{F_i} \cdot \delta P_i \leq 0$
  ↳ vincoli bilateri: $\delta L^{(a)} = 0$
- STABILITÁ EQUILIBRIO SISTEMI CONSERVATIVI: TEOREMA DI DIRICHLET-LAGRANGE → eq. stabil per minim isolato
- EQUAZIONI DI LAGRANGE: $L = T - V$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$