www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Corsi di Laurea in Ingegneria Edile Architettura

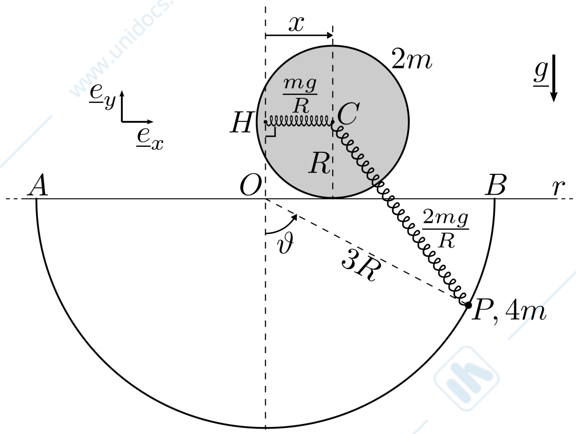
Esame scritto di Meccanica Razionale [500153]

02 febbraio 2023

COGNOME: **ESITO** (in trentesimi)**:**

NOME:

Esercizio 1. In un piano verticale, un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio R rotola senza strisciare lungo una guida orizzontale r passante per un punto fisso O. Un corpo puntiforme P di massa $4m$ è libero di muoversi lungo una guida fissa semicircolare di raggio $3R$ centrata in O, con estremi A e B su r e la concavità verso l'alto. Una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k_{HC} := \frac{mg}{R}$ attrae il centro C del disco verso il punto fisso H posto sulla verticale per O e alla stessa quota di C; una seconda molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k_{CP} := \frac{2mg}{R}$ attrae P verso C. La coordinata lagrangiana $x \in \mathbb{R}$ rappresenta l'ascissa di C rispetto ad H, mentre l'inclinazione del raggio OP rispetto alla direzione verticale è indicata dalla coordinata lagrangiana $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, come in figura. L'accelerazione di gravità è $\underline{g} = -g\underline{e}_y$.



Scrivere il vettore velocità angolare $\underline{\omega}$ del disco in funzione di $\dot{x}$ [**1 punto**] e l'energia cinetica totale $T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta})$ del sistema [**2 punti**].

$$\underline{\omega} = -\frac{\dot{x}}{R}\underline{e}_z, \qquad T = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + 18mR^2\dot{\vartheta}^2$$

Scrivere l'energia potenziale totale $V(x, \vartheta)$ del sistema [**3 punti**], controllando che la sua matrice Hessiana sia $B = 3mg \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -2\cos\vartheta \\ -2\cos\vartheta & 2R\cos\vartheta + 2x\sin\vartheta \end{pmatrix}$

$$V = \frac{mg}{R}\left(\frac{3}{2}x^2 - 6Rx\sin\vartheta - 6R^2\cos\vartheta\right)$$

Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità [**5 punti**].

$$c_1 : (x_1 = 0, \vartheta_1 = 0)\,,\ c_2 : \left(x_2 = \sqrt{3}R, \vartheta_2 = \frac{\pi}{3}\right),\ c_3 : \left(x_3 = -\sqrt{3}R, \vartheta_3 = -\frac{\pi}{3}\right)$$

c_1 instabile; c_2, c_3 stabili

In una configurazione di equilibrio instabile determinare gli autovalori relativi λ_1 e λ_2 della matrice B rispetto alla matrice quadratica A associata all'energia cinetica e indicare il tipo di modo normale corrispondente a ciascuno di essi [**2 punti**].

$$\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{73}}{12}\frac{g}{R} \text{ modo oscillatorio,} \qquad \lambda_1 = \frac{7-\sqrt{73}}{12}\frac{g}{R} \text{ modo iperbolico}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio 2. Per il seguente sistema di vettori applicati

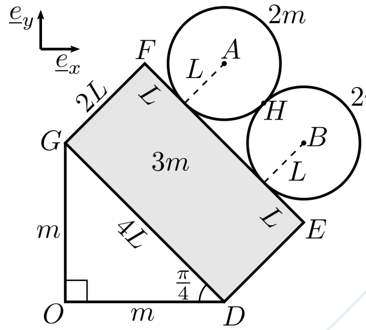
$$\begin{cases} \underline{v}_1 = 2\underline{e}_x - 2\underline{e}_y & \text{applicato in } P_1 \equiv (-2, 3, 0) \\ \underline{v}_2 = \underline{e}_x + \underline{e}_y - 2\underline{e}_z & \text{applicato in } P_2 \equiv (1, -2, 1) \\ \underline{v}_3 = -2\underline{e}_y + \underline{e}_z & \text{applicato in } P_3 \equiv (0, 0, -2) \end{cases}$$

determinare risultante [**1 punto**] e momento risultante rispetto a $O \equiv (0, 0, 0)$ [**2 punti**]. Scrivere la posizione rispetto a O di un generico punto A appartenente all'asse centrale del sistema [**2 punti**].

$$\underline{R} = 3\underline{e}_x - 3\underline{e}_y - \underline{e}_z, \qquad \underline{M}_O = -\underline{e}_x + 3\underline{e}_y + \underline{e}_z, \qquad A - O = \frac{2}{19}(-\underline{e}_y + 3\underline{e}_z) + \lambda(3\underline{e}_x - 3\underline{e}_y - \underline{e}_z), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3.

Il sistema nella figura a destra è costituito da due aste omogenee OD (in orizzontale) e OG (in verticale) entrambe di massa m, da una lamina rettangolare omogenea $DEFG$ di massa $3m$ e lati $\overline{DE} = \overline{FG} = 2L$ e $\overline{EF} = \overline{GD} = 4L$ con il lato EF inclinato di $\frac{\pi}{4}$ rispetto all'orizzonale e da due anelli omogenei di massa $2m$ e raggio L ciascuno, saldati tra loro nel punto di tangenza H e saldati al lato EF della lamina in modo da essere ad essa tangenti. Il punto di saldatura di uno dei due anelli e la lamina è a distanza L dal vertice E, mentre il punto di saldatura tra il secondo anello e la lamina è a distanza L dal vertice F.



Sapendo che all'istante $t = 0$ i punti D e G hanno velocità $\underline{v}_D = v_0\underline{e}_y$ e $\underline{v}_G = -v_0\underline{e}_x$ con $v_0 > 0$, determinare il vettore velocità angolare $\underline{\omega}$ della lamina [**1 punto**] e la posizione del centro di istantanea rotazione K rispetto al punto D [**2 punti**].

$$\underline{\omega} = \frac{v_0}{2\sqrt{2}L}\underline{e}_z, \qquad K - D = -2\sqrt{2}L\underline{e}_x \quad (\text{cioè } K \equiv O)$$

Determinare la posizione $C - O$ del centro di massa C del sistema rispetto al punto O [**2 punti**].

$$C - O = \frac{31}{9}L\underline{e}_1 = \frac{31\sqrt{2}}{18}L(\underline{e}_x + \underline{e}_y)$$

Scrivere i tensori d'inerzia $\underline{\underline{I}}_O^{\text{aste}}$, $\underline{\underline{I}}_O^{\text{lamina}}$ e $\underline{\underline{I}}_O^{\text{anelli}}$ rispetto al punto O del sottosistema costituito dalle due aste, della lamina rettangolare e del sottosistema costituito dai due anelli rispettivamente, indicando con precisione la base scelta, se diversa da quella data $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ [**2 punti ciascuno**].

$$\underline{\underline{I}}_O^{\text{aste}} = \frac{8}{3}mL^2\left(\underline{\underline{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right),$$
$$\underline{\underline{I}}_O^{\text{lamina}} = mL^2\left(4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 28\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 32\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right),$$
$$\underline{\underline{I}}_O^{\text{anelli}} = mL^2\left(6\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 102\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 108\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right),$$
$$\text{con } \underline{e}_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{e}_x + \underline{e}_y), \ \underline{e}_2 := \frac{\sqrt{2}}{2}(-\underline{e}_x + \underline{e}_y)$$

Determinare il momento d'inerzia I^{lamina} della lamina rispetto alla retta contente OD [**1 punto**].

$$I^{\text{lamina}} = 16mL^2.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Come prima cosa scriviamo i vettori posizione (e le velocità) dei punti di interesse per il calcolo delle energie potenziale e cinetica:

$$\begin{aligned}
&C-H = x\underline{e}_x \quad \Rightarrow \quad \|C-H\|^2 = x^2\\
&C-O = x\underline{e}_x + R\underline{e}_y \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_C = \dot{x}\underline{e}_x \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_C^2 = \dot{x}^2\\
&P-O = 3R(\sin\vartheta\underline{e}_x - \cos\vartheta\underline{e}_y) \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_P = 3R\dot{\vartheta}(\cos\vartheta\underline{e}_x + \sin\vartheta\underline{e}_y) \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_P^2 = 9R^2\dot{\vartheta}^2\\
&P-C = (P-O)-(C-O) = (3R\sin\vartheta - x)\underline{e}_x - (3R\cos\vartheta + R)\underline{e}_y\\
&\qquad \Rightarrow \quad \|P-C\|^2 = 10R^2 + x^2 + 6R(R\cos\vartheta - x\sin\vartheta).
\end{aligned}$$

Velocità angolare. Come sempre nei casi di puro rotolamento orizzontale, lo spostamento x (positivo) del centro di massa C del disco rispetto al punto fisso H corrisponde ad una rotazione del disco di angolo $-\varphi$ (rotolamento in senso orario). L'angolo φ si ricava allora in funzione di x dalla proporzione $x : 2\pi R = -\varphi : 2\pi$, cioè $\varphi = -\frac{x}{R}$. La velocità angolare del disco è allora

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi}\underline{e}_z = -\frac{\dot{x}}{R}\underline{e}_z.$$

In alternativa, al medesimo risultato si può arrivare considerando il punto K di contatto tra il disco e la guida r, che è il centro di istantanea rotazione del disco. Allora, scrivendo $\omega := \omega\underline{e}_z$, la prima formula fondamentale della cinematica rigida per i punti C e K diventa

$$\dot{x}\underline{e}_x = \underline{v}_C = \underline{v}_K + \underline{\omega} \wedge (C-K) = \underline{0} + \omega\underline{e}_z \wedge R\underline{e}_y = -\omega R\underline{e}_x,$$

da cui $\omega = -\frac{\dot{x}}{R}$ e $\underline{\omega} = -\frac{\dot{x}}{R}\underline{e}_z$.

Energia cinetica. Scegliendo il centro di massa C come punto di riferimento nella formula dell'energia cinetica del disco e ricordando che $I_{C,zz}^{\text{disco}} = \frac{1}{2}2mR^2$:

$$T = T^P + T^{\text{disco}} = \frac{1}{2}4m\underline{v}_P^2 + \frac{1}{2}2m\underline{v}_C^2 + \frac{1}{2}I_{C,zz}^{\text{disco}}\frac{\dot{x}^2}{R^2} = 18mR^2\dot{\vartheta}^2 + m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + 18mR^2\dot{\vartheta}^2.$$

Energia potenziale. Notiamo come prima cosa che la quota di C resta costante: anche l'energia potenziale del disco è quindi costante e possiamo eliminarla. Scegliendo la quota del punto O come livello ad energia potenziale gravitazionale nulla e trascurando ulteriori costanti:

$$\begin{aligned}
V &= V_g^P + V_k^{HC} + V_k^{CP} = 4mgy_P^O + \frac{1}{2}\frac{mg}{R}\|C-H\|^2 + \frac{1}{2}\frac{2mg}{R}\|P-C\|^2\\
&= -12mgR\cos\vartheta + \frac{1}{2}\frac{mg}{R}x^2 + \frac{mg}{R}\left[x^2 + 6R(R\cos\vartheta - x\sin\vartheta)\right]\\
&= \frac{mg}{R}\left(\frac{3}{2}x^2 - 6Rx\sin\vartheta - 6R^2\cos\vartheta\right).
\end{aligned}$$

Configurazione di equilibrio. Calcoliamo le derivate prime di V rispetto alle coordinate lagrangiane e imponiamole pari a 0:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{3mg}{R}(x - 2R\sin\vartheta) = 0\\
\dfrac{\partial V}{\partial \vartheta} = 6mg\,(R\sin\vartheta - x\cos\vartheta) = 0.
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
x = 2R\sin\vartheta\\
\sin\vartheta\,(1 - 2\cos\vartheta) = 0.
\end{cases}$$

Il sistema è soddisfatto quando $\sin\vartheta = 0$ e $x = 2R\sin\vartheta = 0$ oppure quando $\cos\vartheta = \frac{1}{2}$ e $x = 2R\sin\vartheta$. Nel primo caso l'unico valore di ϑ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ con seno nullo è $\vartheta = 0$, da cui la configurazione

$$c_1 : (x_1 = 0, \vartheta_1 = 0)\,;$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

mentre nel secondo caso $\vartheta = \pm\frac{\pi}{3}$, da cui le due ulteriori configurazioni

$$c_2 : \left(x_2 = \sqrt{3}R, \vartheta_2 = \frac{\pi}{3}\right), \; c_3 : \left(x_3 = -\sqrt{3}R, \vartheta_3 = -\frac{\pi}{3}\right).$$

Stabilità. Per determinare il tipo di stabilità, calcoliamo la matrice Hessiana di V e istanziamola per le differenti configurazioni di equilibrio:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} \end{pmatrix} = 3mg \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -2\cos\vartheta \\ -2\cos\vartheta & 2R\cos\vartheta + 2x\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

con all'equilibrio $2x\sin\vartheta = \frac{x^2}{R}$ e quindi

$$B_1 = 3mg \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -2 \\ -2 & 2R \end{pmatrix} \Rightarrow \det\frac{B_1}{3mg} = -1 < 0 \Rightarrow \text{ autovalori discordi } \Rightarrow c_1 \text{ instabile},$$

$$B_2 = B_3 = 3mg \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & -1 \\ -1 & 4R \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det\frac{B_2}{3mg} = 3 > 0 \\ \operatorname{tr}\frac{B_2}{3mg} = \frac{1}{R} + 4R > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ autovalori positivi } \Rightarrow c_2, c_3 \text{ stabili.}$$

Modi normalie. L'unica configurazione instabile è c_1, mentre la matrice A risulta

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\vartheta}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\vartheta}} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vartheta}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 36mR^2 \end{pmatrix} = 3m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 12R^2 \end{pmatrix}.$$

Istanziando $\det(B - \lambda A)$ in c_1 e imponendolo pari a 0 otteniamo

$$\begin{aligned} 0 = \det\left[3m \begin{pmatrix} \frac{g}{R} - \lambda & -2g \\ -2g & 2gR - 12R^2\lambda \end{pmatrix}\right] &= 9m^2 \left[\left(\frac{g}{R} - \lambda\right)\left(2gR - 12R^2\lambda\right) - 4g^2\right] \\ = 18m^2R^2 \left[\left(\frac{g}{R} - \lambda\right)\left(\frac{g}{R} - 6\lambda\right) - 2\frac{g^2}{R^2}\right] &= 18m^2R^2 \left(6\lambda^2 - 7\frac{g}{R}\lambda - \frac{g^2}{R^2}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$\lambda_1 = \frac{7 + \sqrt{73}}{12}\frac{g}{R} > 0 \text{ modo oscillatorio,} \qquad \lambda_1 = \frac{7 - \sqrt{73}}{12}\frac{g}{R} < 0 \text{ modo iperbolico.}$$

Esercizio 2.

Risultante. $\underline{R} = 3\underline{e}_x - 3\underline{e}_y - \underline{e}_z$.

Momento risultante rispetto a O.

$$\begin{aligned} \underline{M}_O &= (P_1 - O) \wedge \underline{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \underline{v}_2 + (P_3 - O) \wedge \underline{v}_3 \\ &= -2\underline{e}_z \quad + 3\underline{e}_x + 3\underline{e}_y + 3\underline{e}_z \quad - 4\underline{e}_x = -\underline{e}_x + 3\underline{e}_y + \underline{e}_z. \end{aligned}$$

Asse centrale. Dato che $\underline{R}^2 = 9 + 9 + 1 = 19$ e $\underline{R} \wedge \underline{M}_O = -2\underline{e}_y + 6\underline{e}_z = 2(-\underline{e}_y + 3\underline{e}_z)$, il punto A ha vettore posizione

$$A - O = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_O}{\|\underline{R}\|^2} + \lambda\underline{R} = \frac{2}{19}(-\underline{e}_y + 3\underline{e}_z) + \lambda(3\underline{e}_x - 3\underline{e}_y - \underline{e}_z).$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio 3.
Cinematica. Indicando con $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z$ la velocità angolare del sistema e applicando la prima formula fondamentale della cinematica rigida:

$$-v_0\underline{e}_x = \underline{v}_G = \underline{v}_D + \underline{\omega} \wedge (G - D) = v_0\underline{e}_y + \omega\underline{e}_z \wedge 4L\frac{\sqrt{2}}{2}(-\underline{e}_x + \underline{e}_y)$$
$$\Rightarrow \quad -v_0\underline{e}_x - v_0\underline{e}_y = 2\sqrt{2}L\omega(-\underline{e}_x - \underline{e}_y) \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_0}{2\sqrt{2}L} \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega} = \frac{v_0}{2\sqrt{2}L}\underline{e}_z,$$

mentre scrivendo $K - D = x_K\underline{e}_x + y_K\underline{e}_y$:

$$\underline{0} = \underline{v}_K = \underline{v}_D + \underline{\omega} \wedge (K - DF) = v_0\underline{e}_y + \frac{v_0}{2\sqrt{2}L}\underline{e}_z \wedge (x_K\underline{e}_x + y_K\underline{e}_y) = v_0\left[-\frac{y_K}{2\sqrt{2}L}\underline{e}_x + \left(1 + \frac{x_K}{2\sqrt{2}L}\right)\underline{e}_y\right]$$

da cui $x_K = -2\sqrt{2}L$ e $y_K = 0$, cioè $K \equiv O$.
Centro di massa. Poiché entrambe le aste hanno lunghezza $2\sqrt{2}L$ e il centro di massa del sottosistema costituito dai due soli anelli coincide con il punto H (per simmetria), chiamando $\underline{e}_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{e}_x + \underline{e}_y)$ abbiamo

$$C - O = \frac{m(C^{OD} - O) + m(C^{OG} - O) + 3m(C^{DEFG} - O) + 4m(H - O)}{9m}$$
$$= \frac{m\sqrt{2}\underline{e}_x + m\sqrt{2}\underline{e}_y + 3m3\underline{e}_1 + 4m5\underline{e}_1}{9m}L = \frac{2\underline{e}_1 + 9\underline{e}_1 + 20\underline{e}_1}{9}L = \frac{31}{9}L\underline{e}_1 = \frac{31\sqrt{2}}{18}L(\underline{e}_x + \underline{e}_y).$$

Per la lamina, invece, indicando con $\underline{e}_1 := \frac{1}{2}(\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y)$ ed $\underline{e}_2 := \frac{1}{2}(-\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y)$:

$$C^{\text{lamina}} - F = \frac{1}{2}(3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2)L = \left[(3\sqrt{3} - 4)\underline{e}_x + (3 + 4\sqrt{3})\underline{e}_y\right]\frac{L}{4}.$$

Tensori d'inerzia. Notiamo per prima cosa che la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_z)$ con $\underline{e}_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{e}_x + \underline{e}_y)$ e $\underline{e}_2 := \frac{\sqrt{2}}{2}(-\underline{e}_x + \underline{e}_y)$ è principale per tutti i tensori richiesti e per i tensori centrali dei sottosistemi in esame e sarà quindi la base prescelta per il calcolo dei tensori d'inerzia.
Aste.

$$\underline{\underline{I}}_O^{\text{aste}} = \underline{\underline{I}}_O^{OD} + \underline{\underline{I}}_O^{OG} = \frac{1}{3}m(2\sqrt{2}L)^2\left(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right) + \frac{1}{3}m(2\sqrt{2}L)^2\left(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right)$$
$$= \frac{8}{3}mL^2\left(\underline{\underline{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right).$$

Lamina.

$$\underline{\underline{I}}_{C^{\text{lamina}}}^{\text{lamina}} = \frac{1}{12}3mL^2\left(16\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 20\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right) = mL^2\left(4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 5\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right).$$

Poiché il vettore posizione del centro di massa della lamina rispetto a O è $C^{\text{lamina}} - O = 3L\underline{e}_1$, applicando il Teorema di Huygens-Steiner si ottiene

$$\underline{\underline{I}}_O^{\text{lamina}} = \underline{\underline{I}}_{C^{\text{lamina}}}^{\text{lamina}} + 27mL^2\left(\underline{\underline{1}} - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\right) = mL^2\left(4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 28\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 32\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right).$$

Anelli. Notando che $A - B = 2L\underline{e}_2$ e applicando il Teorema di Composizione:

$$\underline{\underline{I}}_H^{\text{anelli}} = 2\frac{1}{2}2mL^2\left(\underline{\underline{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right) + \frac{4m^2}{4m}(2L)^2\left(\underline{\underline{1}} - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\right) = mL^2\left(6\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 8\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right).$$

Applicando poi il Teorema di Huygens-Steiner:

$$\underline{\underline{I}}_O^{\text{anelli}} = \underline{\underline{I}}_H^{\text{anelli}} + 4m(5L)^2\left(\underline{\underline{1}} - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\right) = mL^2\left(6\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 102\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 108\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right).$$

Momento d'inerzia. Il momento d'inerzia cercato è

$$I^{\text{lamina}} = I_{O,xx}^{\text{lamina}} = \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{I}}_O^{\text{lamina}}\underline{e}_x = mL^2\left[4(\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_x)^2 + 28(\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_x)^2\right] = mL^2\left[4\frac{1}{2} + 28\frac{1}{2}\right] = 16mL^2.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari