UNIVERSITÀ DI PAVIA

Corsi di Laurea in Ingegneria Edile Architettura

Esame di Meccanica Razionale [500153]

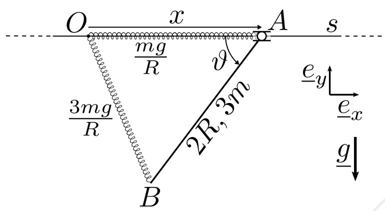
03 luglio 2023

COGNOME:

ESITO (teoria + esercizi)**:**

NOME:

Esercizio 1. In un piano verticale, un'asta omogeneA di lunghezza $2R$ e massa $3m$ è libera di ruotare attorno al suo stremo A, ha sua volta vincolato da un carrello a scorrere senza attrito su una guida orizzontale s. Due molle ideali di lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche $k_1 = \frac{mg}{R}$ e $k_2 = \frac{3mg}{R}$ attraggono l'estremo A e l'estremo B, rispettivamente, ad un punto fisso O posto sulla guida s.



La distanza tra O e A (con segno positivo quando A è a destra di O) è indicata dalla variabile lagrangiana $x \in \mathbb{R}$, mentre l'angolo $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ rappresenta l'angolo formato dalla guida s e dall'asta AB (come in figura). L'accelerazione di gravità è $\underline{g} = -g\underline{e}_y$.

Scrivere l'energia cinetica totale del sistema [**2 punti**].

$$T = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + 2mR^2\dot{\vartheta}^2 + 3mR\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta$$

Scrivere l'energia potenziale totale del sistema [**2 punti**].

$$V = mg\left(\frac{2}{R}x^2 - 6x\cos\vartheta - 3R\sin\vartheta\right)$$

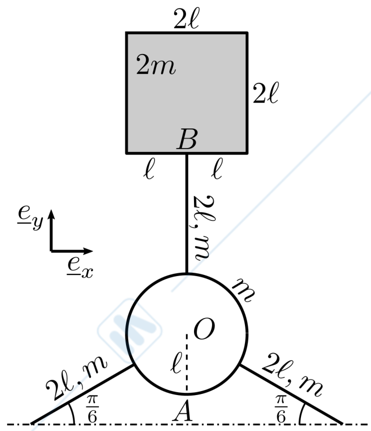
Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e i rispettivi tipi di stabilità [**3 punti**], dopo aver controllato che la matrice Hessiana dell'energia potenziale sia $B = mg\begin{pmatrix} \frac{4}{R} & 6\sin\vartheta \\ 6\sin\vartheta & 6x\cos\vartheta + 3R\sin\vartheta \end{pmatrix}$. *Svolgere i conti ricordando, se serve, che* $|\cos\arcsin(z)| = \sqrt{1-z^2}$.

$$c_1 : \left(x_1 = 0, \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}\right), \; c_2 : \left(x_2 = 0, \vartheta_2 = -\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{instabili}$$
$$c_3 : \left(x_3 = \sqrt{2}R, \vartheta_3 = \arcsin\frac{1}{3}\right), \; c_4 : \left(x_4 = -\sqrt{2}R, \vartheta_4 = \pi - \arcsin\frac{1}{3}\right) \quad \text{stabili}$$

Nella configurazione di equilibrio con $-\pi < \vartheta < 0$, determinare gli autovalori relativi λ della matrice B rispetto alla matrice A associata all'energia cinetica e dire a quale modo normale è associato ciascuno di essi [**2 punti**].

$$\lambda_1 = \frac{-29 + \sqrt{1417}}{6}\frac{g}{R} \text{ modo oscillatorio,} \qquad \lambda_2 = \frac{-29 - \sqrt{1417}}{6}\frac{g}{R} \text{ modo iperbolico}$$

Esercizio 2. Il sistema nella figura a destra è costituito da



1. una lamina omogenea quadrata di massa $2m$ e lato 2ℓ, con i lati paralleli a $\underline{e}_x$ e $\underline{e}_y$ rispettivamente;

2. tre aste omogenee, ciascuna di massa m e lunghezza 2ℓ, una verticale e le altre inclinate di $\frac{\pi}{6}$ rispetto alla direzione orizzontale;

3. un anello omogeneo di massa m, raggio ℓ e centro O.

Ciascuna asta è saldata in un suo estremo all'anello, mentre la lamina quadrata è saldata all'estremo superiore dell'asta verticale, nel punto medio B del suo lato orizzontale inferiore. Il punto A è il punto più in basso dell'anello.

Rispondere alle seguenti domande, indicando analiticamente la base scelta se diversa da quella data $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z := \underline{e}_x \wedge \underline{e}_y)$.

Scrivere il vettore posizione $C - A$ del centro di massa C del sistema rispetto al punto A [**1 punto**].

$$C - A = \frac{7}{3}\ell \underline{e}_y$$

Scrivere i momenti I_r^{vert} e I_r^{aste} relativi alla retta r passante per O e parallela a $\underline{e}_z$ dell'asta verticale (vert) e del sottosistema costituito dalle tre aste insieme (aste), rispettivamente [**1 punto ciascuno**].

$$I_r^{\text{vert}} = \frac{13}{3}m\ell^2 \qquad I_r^{\text{aste}} = 13m\ell^2$$

Scrivere i momenti I_s^{obl} e I_s^{aste} relativi alla retta s passante per O e parallela a $\underline{e}_y$ di una delle due aste oblique (obl) e del sottosistema costituito dalle tre aste insieme (aste), rispettivamente [**1 punto ciascuno**].

$$I_s^{\text{obl}} = \frac{13}{4}m\ell^2 \qquad I_s^{\text{aste}} = \frac{13}{2}m\ell^2$$

Scrivere i tensori d'inerzia $\underline{I}_A^{\text{aste}}$, $\underline{I}_A^{\text{anello}}$ e $\underline{I}_A^{\text{quadrato}}$ rispetto ad A del sottosistema costituito dalle tre aste insieme, dell'anello e della lamina quadrata, rispettivamente [**1 punto ciascuno**].

$$\underline{I}_A^{\text{aste}} = \frac{19}{2}m\ell^2 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{13}{2}m\ell^2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 16m\ell^2 \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$
$$\underline{I}_A^{\text{anello}} = \frac{3}{2}m\ell^2 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{1}{2}m\ell^2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 2m\ell^2 \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$
$$\underline{I}_A^{\text{quadrato}} = \frac{152}{3}m\ell^2 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{2}{3}m\ell^2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{154}{3}m\ell^2 \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

Scrivere il momento I_t di tutto il sistema rispetto alla retta t passante per A e parallela al vettore $\underline{v} := \underline{e}_x + 2\underline{e}_y$ [**1 punto**].

$$I_t = \frac{32}{3}m\ell^2$$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Come prima cosa scriviamo i vettori posizione (e le velocità) dei punti di interesse per il calcolo delle energie potenziale e cinetica, indicando con C il centro di massa di AB:

$$\begin{aligned}
&A-O = x\underline{e}_x \quad \Rightarrow \quad \|A-O\|^2 = x^2 \quad \text{e} \quad \underline{v}_A = \dot{x}\underline{e}_x \\
&B-A = 2R(-\cos\vartheta\underline{e}_x - \sin\vartheta\underline{e}_y) \\
&B-O = (B-A)+(A-O) = (x-2R\cos\vartheta)\underline{e}_x - 2R\sin\vartheta\underline{e}_y \\
&\qquad \Rightarrow \quad \|B-O\|^2 = x^2+4R^2-4xR\cos\vartheta \\
&C-A = \frac{1}{2}(B-A) = R(-\cos\vartheta\underline{e}_x - \sin\vartheta\underline{e}_y) \\
&C-O = (C-A)+(A-O) = (x-R\cos\vartheta)\underline{e}_x - R\sin\vartheta\underline{e}_y \\
&\qquad \Rightarrow \quad \underline{v}_C = (\dot{x}+R\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\underline{e}_x - R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\underline{e}_y \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_C^2 = \dot{x}^2+R^2\dot{\vartheta}^2+2R\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta \\
&\qquad \Rightarrow \quad R\dot{\vartheta}(\sin\vartheta\underline{e}_x - \cos\vartheta\underline{e}_y) = \underline{v}_C - \underline{v}_A = \omega\underline{e}_z \wedge (C-A) = R\omega(\sin\vartheta\underline{e}_x - \cos\vartheta\underline{e}_y) \\
&\qquad \Rightarrow \quad \underline{\omega} = \dot{\vartheta}\underline{e}_z \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega}^2 = \dot{\vartheta}^2.
\end{aligned}$$

Energia cinetica. Utilizzando il momento d'inerzia $I_{C,zz}^{AB} = \frac{1}{12}3m4R^2$:

$$\begin{aligned}
T = T^{AB} &= \frac{1}{2}3m\underline{v}_C^2 + \frac{1}{2}I_{C,zz}^{AB}\dot{\vartheta}^2 = \frac{3}{2}m(\dot{x}^2+R^2\dot{\vartheta}^2+2R\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta) + \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 \\
&= \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + 2mR^2\dot{\vartheta}^2 + 3mR\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta.
\end{aligned}$$

Energia potenziale. Scegliendo la quota del punto O come livello ad energia potenziale gravitazionale nulla ed eliminando le costanti:

$$\begin{aligned}
V &= V_g^{AB} + V_k^{AO} + V_k^{BO} = 3mgy_C + \frac{1}{2}k_1\|A-O\|^2 + \frac{1}{2}k_2\|B-O\|^2 \\
&= -3mgR\sin\vartheta + \frac{1}{2}\frac{mg}{R}x^2 + \frac{3}{2}\frac{mg}{R}(x^2-4xR\cos\vartheta) = mg\left(\frac{2}{R}x^2 - 6x\cos\vartheta - 3R\sin\vartheta\right).
\end{aligned}$$

Controlliamo che l'energia potenziale trovata abbia l'Hessiana suggerita nel testo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= mg\left(\frac{4}{R}x - 6\cos\vartheta\right) \\
\frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= mg\left(6x\sin\vartheta - 3R\cos\vartheta\right)
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = mg\frac{4}{R}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial\vartheta} = 6mg\sin\vartheta, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} = mg\left(6x\cos\vartheta + 3R\sin\vartheta\right),$$

da cui

$$B = mg\begin{pmatrix} \frac{4}{R} & 6\sin\vartheta \\ 6\sin\vartheta & 6x\cos\vartheta + 3R\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Configurazioni di equilibrio. Analizzando il disegno e la fisica del problema, si possono immediatamente riconoscere le due configurazioni di equilibrio in cui O e A coincidono e l'asta AB è verticale:

$$c_1 : \left(x_1 = 0, \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}\right), \; c_2 : \left(x_2 = 0, \vartheta_2 = -\frac{\pi}{2}\right)$$

e poi determinarne la stabilità grazie alla matrice Hessiana appena calcolata:

$$B_1 = mg\begin{pmatrix} \frac{4}{R} & 6 \\ 6 & 3R \end{pmatrix} \Rightarrow \det B_1 = -24m^2g^2 < 0 \quad \Rightarrow \text{autovalori discordi} \Rightarrow c_1 \text{ instabile},$$

$$B_2 = mg\begin{pmatrix} \frac{4}{R} & -6 \\ -6 & -3R \end{pmatrix} \Rightarrow \det B_2 = -48m^2g^2 < 0 \quad \Rightarrow \text{autovalori discordi} \Rightarrow c_2 \text{ instabile}.$$

Per stabilire se ci siano o meno altre configurazioni di equilibrio procediamo imponendo pari a 0 le derivate prime di V rispetto alle coordinate lagrangiangiane:

$$\begin{cases} = mg\left(\frac{4}{R}x - 6\cos\vartheta\right) = 0 \\ = mg\left(6x\sin\vartheta - 3R\cos\vartheta\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}R\cos\vartheta \\ \cos\vartheta\left(3\sin\vartheta - 1\right) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata quando $\cos\vartheta = 0$ (e allora ritroviamo le configurazioni c_1 e c_2) oppure quando $\sin\vartheta = \frac{15}{64}$, cioè per $\vartheta = \arcsin\frac{1}{3}$ oppure $\vartheta = \pi - \arcsin\frac{1}{3}$. Otteniamo allora le ulteriori due configurazioni di equilibrio

$$c_3 : \left(x_3 = \frac{3}{2}R\cos\vartheta_3 = \sqrt{2}R, \vartheta_3 = \arcsin\frac{1}{3}\right), \; c_4 : \left(x_4 = \frac{3}{2}R\cos\vartheta_4 = -\sqrt{2}R, \vartheta_4 = \pi - \arcsin\frac{1}{3}\right)$$

con la medesima stabilità:

$$B_{3,4} = mg\begin{pmatrix} \frac{4}{R} & 2 \\ 2 & 9R \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det B_{3,4} = 32m^2g^2 > 0 \\ \operatorname{tr} B_{3,4} = \frac{4}{R} + 9R > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{autovalori positivi} \Rightarrow c_3, c_4 \text{ stabili}.$$

Modi normali. Scriviamo la matrice A, istanziandola nella configurazione c_2 richiesta:

$$B_2 = mg\begin{pmatrix} \frac{4}{R} & -6 \\ -6 & -3R \end{pmatrix}$$

$$A_2 = m\begin{pmatrix} 3 & 3R\sin\vartheta_2 \\ 3R\sin\vartheta_2 & 4R^2 \end{pmatrix} = mg\begin{pmatrix} \frac{3}{g} & -3\frac{R}{g} \\ -3\frac{R}{g} & 4\frac{R^2}{g} \end{pmatrix}$$

e poi troviamo gli autovalori richiesti

$$0 = \det(B_2 - \lambda A_2) = m^2g^2\left[\left(\frac{4}{R} - \lambda\frac{3}{g}\right)\left(-3R - \lambda\frac{4R^2}{g}\right) - \left(-6 + 3\lambda\frac{R}{g}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 12\frac{R^2}{g^2}\lambda^2 - 7\frac{R}{g}\lambda - 12 - 9\frac{R^2}{g^2}\lambda^2 + 36\frac{R}{g}\lambda - 36 = 3\frac{R^2}{g^2}\lambda^2 + 29\frac{R}{g}\lambda - 48$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-29 \pm \sqrt{841 + 576}}{6}\frac{g}{R} = \frac{-29 \pm \sqrt{1417}}{6}\frac{g}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{-29 + \sqrt{1417}}{6}\frac{g}{R} > 0 \text{ modo oscillatorio} \quad \lambda_2 = \frac{-29 - \sqrt{1417}}{6}\frac{g}{R} < 0 \text{ modo iperbolico}.$$

Esercizio 2.
Centro di massa. Per simmetria, O è il centro di massa sia dell'anello che dal sottosistema costituito dalle tre aste. Chiamiamo invece G il centro di massa della lamina quadrata. Allora

$$C - A = \frac{4m(O-A) + 2m(G-A)}{6m} = \frac{2\ell \underline{e}_y + 5\ell \underline{e}_y}{3} = \frac{7}{3}\ell \underline{e}_y.$$

Momenti per le aste. Utilizzando il Teorema di Huygens-Steiner per calcolare $\underline{I}_O^{\text{vert}}$, otteniamo

$$\begin{aligned} I_r^{\text{vert}} &= I_{O,zz}^{\text{vert}} = \underline{e}_z \cdot \underline{I}_O^{\text{vert}} \underline{e}_z = \underline{e}_z \cdot \left[\frac{1}{12} m 4\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + m 4\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \right] \underline{e}_z \\ &= \left(\frac{1}{3} + 4 \right) m\ell^2 = \frac{13}{3} m\ell^2. \end{aligned}$$

Poiché le altre due aste si possono ottenere ruotando attorno alla retta r l'asta verticale, i loro momenti rispetto ad r saranno entrambi pari a I_r^{vert} e quindi

$$I_r^{\text{aste}} = 3 I_r^{\text{vert}} = 13 m\ell^2.$$

Notiamo che, per simmetria della figura, il tensore in O del sottosistema delle tre aste ha simmetria cilindrica e quindi

$$\underline{I}_O^{\text{aste}} = \frac{1}{2} I_r^{\text{aste}} (\underline{\mathbb{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) = \frac{13}{2} m\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z),$$

da cui

$$I_s^{\text{aste}} = \frac{13}{2} m\ell^2.$$

Inoltre, il momento appena trovato è la somma di quello dovuto all'asta verticale e dei due delle aste oblique che, per simmetria, sono tra loro uguali:

$$I_s^{\text{aste}} = I_s^{\text{vert}} + 2 I_s^{\text{obl}},$$

da cui

$$I_s^{\text{obl}} = \frac{1}{2} \left(I_s^{\text{aste}} - I_s^{\text{vert}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{13}{2} m\ell^2 - 0 \right) = \frac{13}{4} m\ell^2.$$

Tensori. Utilizziamo il Teorema di Huygens-Steiner per spostare i tensori centrali d'inerzia in A:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A^{\text{aste}} &= \underline{I}_O^{\text{aste}} + 3m\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) = \frac{13}{2} m\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 3m\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \\ &= \frac{19}{2} m\ell^2 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{13}{2} m\ell^2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 16 m\ell^2 \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z, \\ \underline{I}_A^{\text{anello}} &= \underline{I}_O^{\text{anello}} + m\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) = \frac{1}{2} m\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + m\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \\ &= \frac{3}{2} m\ell^2 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{1}{2} m\ell^2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 2 m\ell^2 \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z, \\ \underline{I}_A^{\text{quadrato}} &= \underline{I}_G^{\text{quadrato}} + 2m 25\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) = \frac{1}{12} 2m 4\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 50 m\ell^2 (\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \\ &= \frac{152}{3} m\ell^2 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{2}{3} m\ell^2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{154}{3} m\ell^2 \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z. \end{aligned}$$

Momento finale. Sommando i tre tensori appena trovati otteniamoil tensore di tutto il sistema rispetto ad A:

$$\underline{I}_A = \frac{185}{3} m\ell^2 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{23}{3} m\ell^2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{208}{3} m\ell^2 \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z,$$

mentre la direzione della retta t è

$$\underline{n} := \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\underline{e}_x + 2\underline{e}_y).$$

Allora

$$\begin{aligned} I_t = \underline{n} \cdot \underline{I}_A \underline{n} &= \frac{152}{3} m\ell^2 (\underline{n} \cdot \underline{e}_x)^2 + \frac{2}{3} m\ell^2 (\underline{n} \cdot \underline{e}_y)^2 + \frac{154}{3} m\ell^2 (\underline{n} \cdot \underline{e}_z)^2 \\ &= \frac{152}{3} m\ell^2 \frac{1}{5} + \frac{2}{3} m\ell^2 \frac{4}{5} = \frac{160}{15} m\ell^2 = \frac{32}{3} m\ell^2. \end{aligned}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari