

UNIVERSITÀ
DI PAVIA

Corsi di Laurea in Ingegneria Edile Architettura

Esame scritto di Meccanica Razionale [500153]

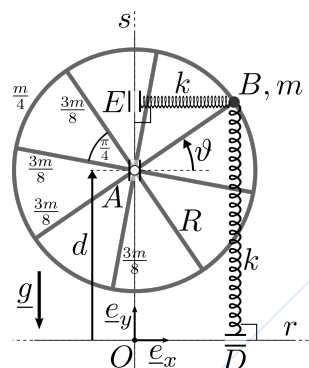
30 settembre 2022

COGNOME:

ESITO (in trentesimi):

NOME:

Esercizio 1. Il corpo rigido in figura rappresenta una ruota disposta in un piano verticale e costituita da un anello omogeneo di raggio R e massa $\frac{m}{4}$ a cui sono state saldate quattro aste omogenee di massa $\frac{3m}{8}$ ciascuna, coincidenti con quattro diametri dell'anello, tra loro inclinati di $\frac{\pi}{4}$. Nell'estremo B di una delle aste è anche saldato un punto materiale di massa m . Il punto B è inoltre attratto da due molle ideali BD e BE , di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$, costrette a rimanere verticale la prima e orizzontale la seconda: il punto D scorre sulla guida orizzontale r , mentre il punto E scorre sulla guida verticale s e le due guide si intersecano nel punto fisso O .



Il corpo rigido ruota liberamente attorno al centro A dell'anello, che a sua volta può scorrere senza attrito sulla guida verticale s . L'altezza di A rispetto a O è indicata dalla variabile lagrangiana $d \in \mathbb{R}$, mentre l'angolo $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ rappresenta l'inclinazione del raggio AB rispetto alla direzione orizzontale. L'accelerazione di gravità è $\underline{g} = -g\mathbf{e}_y$.

Scrivere l'energia potenziale totale del sistema [3 punti].

$$V = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{11}{4}mgd + (mg + kd)R \sin \vartheta$$

Dire per quali k esistono configurazioni di equilibrio in cui il raggio AB non è verticale [2 punti].

$$k > \frac{7}{4} \frac{mg}{R}$$

Per $k = \frac{7}{2} \frac{mg}{R}$, determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e la loro stabilità [4 punti].

$$c_1 : \left(d_1 = -\frac{25}{14}R, \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{e} \quad c_2 : \left(d_2 = \frac{3}{14}R, \vartheta_2 = -\frac{\pi}{2} \right) \quad \text{stabili,}$$

$$c_3 : \left(d_3 = -\frac{2}{7}R, \vartheta_3 = -\frac{\pi}{6} \right) \quad \text{e} \quad c_4 : \left(d_4 = -\frac{2}{7}R, \vartheta_4 = -\frac{5\pi}{6} \right) \quad \text{instabili.}$$

Scrivere l'energia cinetica totale del sistema [2 punti].

$$T = \frac{11}{8}md\dot{d}^2 + \frac{7}{8}mR^2\dot{\vartheta}^2 + mRd\dot{\vartheta} \cos \vartheta$$

Per $k = \frac{7}{2} \frac{mg}{R}$, scrivere le accelerazioni lagrangiane \ddot{d} e $\ddot{\vartheta}$ nel moto incipiente, quando il sistema parte in quiete dalla configurazione con $d = 0$ e $\vartheta = 0$ [2 punti].

$$\ddot{d} = -g, \quad \ddot{\vartheta} = 0$$

Esercizio 2. Per il seguente sistema di vettori applicati

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = -1\underline{e}_x + 2\underline{e}_y + 3\underline{e}_z & \text{applicato in } P_1 \equiv (3, 2, 1) \\ \underline{v}_2 = -3\underline{e}_y + 2\underline{e}_z & \text{applicato in } P_2 \equiv (1, 1, 1) \\ \underline{v}_3 = 3\underline{e}_x - \underline{e}_y + 3\underline{e}_z & \text{applicato in } P_3 \equiv (6, 3, 4) \end{cases}$$

determinare risultante [**1 punto**] e momento risultante rispetto a $O \equiv (0, 0, 0)$ [**2 punti**]. Scrivere poi un sistema equivalente costituito da un unico vettore applicato [**2 punti**].

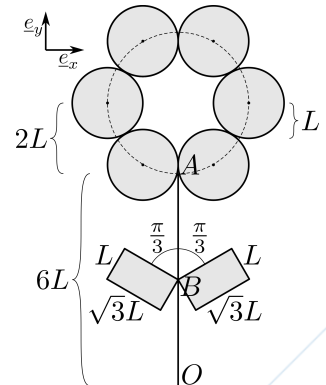
$$\underline{R} = 2(\underline{e}_x - \underline{e}_y + 4\underline{e}_z), \quad \underline{M}_O = 2(11\underline{e}_x - 9\underline{e}_y - 5\underline{e}_z), \quad \{(P, \underline{R})\}, \text{ con } P \equiv \left(\frac{41}{18}, \frac{49}{18}, \frac{1}{9}\right)$$

Esercizio 3. Il fiore stilizzato in figura è composto dai tre seguenti sottosistemi:

stelo: asta omogenea verticale OA di lunghezza $6L$ e massa m ;

petali: sei dischi omogenei di raggio R e massa m ciascuno, tangenti a due a due e con i centri disposti su una circonferenza di raggio $2L$, in modo che due di essi si trovino sul diametro orizzontale della circonferenza;

foglie: due rettangoli omogenei di lati L e $2L$ e massa m ciascuno, con i lati lunghi inclinati di $\frac{\pi}{3}$ rispetto alla verticale e un vertice B in comune e coincidente con il punto medio di OA .



Sapendo che all'istante $t = 0$ le velocità di A e O sono, rispettivamente, $\underline{v}_A = -v_0(2\underline{e}_x + \underline{e}_y)$ e $\underline{v}_O = -v_0\underline{e}_y$ determinare la velocità angolare $\underline{\omega}$ [**1 punto**] e la posizione rispetto a O del centro di istantanea rotazione K del sistema [**1 punto**].

$$\underline{\omega} = \frac{v_0}{3L}\underline{e}_z, \quad K - O = 3L\underline{e}_x$$

Determinare il momento d'inerzia $I_{G,zz}^{\text{petali}}$ (nella direzione $\underline{e}_z := \underline{e}_x \wedge \underline{e}_y$) del sottosistema *petali* rispetto al suo centro di massa G [**2 punti**] e scrivere poi il tensore centrale d'inerzia $\underline{I}_G^{\text{petali}}$ del medesimo sottosistema [**1 punto**].

$$I_{G,zz}^{\text{petali}} = 27mL^2, \quad \underline{I}_G^{\text{petali}} = \frac{27}{2}mL^2(\mathbf{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z).$$

Scrivere il tensore centrale d'inerzia del sottosistema *foglie* utilizzando la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ [**3 punti**].

$$\underline{I}_B^{\text{foglie}} = \frac{1}{12}(3\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + 29\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 32\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)mL^2$$

Scrivere la posizione rispetto a B del centro di massa C del sistema [**1 punto**] e determinare il momento d'inerzia I_C^{stelo} del sottosistema *stelo* rispetto alla retta passante per C e con direzione pari a quella del vettore $\underline{v} := 3\underline{e}_x + 4\underline{e}_y$ [**3 punti**].

$$C - B = \frac{10}{3}L\underline{e}_y, \quad I_C^{\text{stelo}} = \frac{127}{25}mL^2$$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Come prima cosa scriviamo i vettori posizione (e le velocità) dei punti di interesse per il calcolo delle energie potenziale e cinetica:

$$B - A = R (\cos \vartheta \underline{e}_x + \sin \vartheta \underline{e}_y),$$

$$A - O = d \underline{e}_y \Rightarrow \underline{v}_A = \dot{d} \underline{e}_y \Rightarrow v_A^2 = \dot{d}^2,$$

$$B - O = (B - A) + (A - O) = R \cos \vartheta \underline{e}_x + (d + R \sin \vartheta) \underline{e}_y$$

$$\Rightarrow \underline{v}_B = -R \dot{\vartheta} \sin \vartheta \underline{e}_x + (\dot{d} + R \dot{\vartheta} \cos \vartheta) \underline{e}_y \Rightarrow v_B^2 = \dot{d}^2 + R^2 \dot{\vartheta}^2 + 2R \dot{d} \dot{\vartheta} \cos \vartheta,$$

$$B - D = (d + R \sin \vartheta) \underline{e}_y \Rightarrow \|B - D\|^2 = d^2 + R^2 \sin^2 \vartheta + 2Rd \sin \vartheta,$$

$$B - E = R \cos \vartheta \underline{e}_x \Rightarrow \|B - E\|^2 = R^2 \cos^2 \vartheta.$$

Energia potenziale. Scegliendo la quota del punto O come livello ad energia potenziale gravitazionale nulla:

$$\begin{aligned} V &= V_g^B + V_g^{\text{ruota}} + V_k^{BD} + V_k^{BE} = mgy_B + \frac{7}{4}mgy_A + \frac{1}{2}k\|B - D\|^2 + \frac{1}{2}k\|B - E\|^2 \\ &= mg(d + R \sin \vartheta) + \frac{7}{4}mgd + \frac{1}{2}k(d^2 + R^2 \sin^2 \vartheta + 2Rd \sin \vartheta) + \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \vartheta \\ &= mgR \sin \vartheta + \frac{11}{4}mgd + \frac{1}{2}k(d^2 + R^2 \sin^2 \vartheta + 2Rd \sin \vartheta + R^2 \cos^2 \vartheta) \end{aligned}$$

ed eliminando le costanti dell'energia potenziale elastica:

$$V = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{11}{4}mgd + (mg + kd)R \sin \vartheta.$$

Configurazione di equilibrio ammissibili e non di confine. Calcoliamo le derivate prime di V rispetto alle coordinate lagrangiane e imponiamole pari a 0:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial d} = kd + \frac{11}{4}mg + kR \sin \vartheta = 0 & \Rightarrow d = -\frac{11}{4} \frac{mg}{k} - R \sin \vartheta \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = (mg + kd)R \cos \vartheta = 0 & \Rightarrow \cos \vartheta = 0 \text{ oppure } kd = -mg. \end{cases}$$

Nel caso $\cos \vartheta = 0$, le possibili configurazioni di equilibrio hanno il raggio AB verticale:

$$c_1 : \left(d_1 = -\frac{11}{4} \frac{mg}{k} - R, \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} \right), \quad c_2 : \left(d_2 = -\frac{11}{4} \frac{mg}{k} + R, \vartheta_2 = -\frac{\pi}{2} \right),$$

mentre il caso $kd = -mg$ comporta l'equilibrio per

$$\frac{11}{4}mg + kR \sin \vartheta = mg \Rightarrow \sin \vartheta = -\frac{7}{4} \frac{mg}{kR}.$$

Quest'ultima situazione può verificarsi e portare a configurazioni in cui AB non è verticale solo per $-1 < -\frac{7}{4} \frac{mg}{kR} < 1$, cioè $k > \frac{7}{4} \frac{mg}{R}$:

$$c_3 : \left(d_3 = -\frac{mg}{k}, \vartheta_3 = -\vartheta^* \right), \quad c_4 : \left(d_4 = -\frac{mg}{k}, \vartheta_4 = -\pi + \vartheta^* \right),$$

con $\vartheta^* := \arcsin \frac{7}{4} \frac{mg}{kR}$ e per $k > \frac{7}{4} \frac{mg}{R}$.

Quando $k = \frac{7}{2} \frac{mg}{R}$, le configurazioni sono allora

$$\begin{aligned} c_1 : \left(d_1 = -\frac{25}{14}R, \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} \right), & \quad c_2 : \left(d_2 = \frac{3}{14}R, \vartheta_2 = -\frac{\pi}{2} \right), \\ c_3 : \left(d_3 = -\frac{2}{7}R, \vartheta_3 = -\frac{\pi}{6} \right), & \quad c_4 : \left(d_4 = -\frac{2}{7}R, \vartheta_4 = -\frac{5\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Stabilità. Per determinare il tipo di stabilità, calcoliamo la matrice Hessiana di V e istanziamola per le differenti configurazioni di equilibrio, notando che la stabilità di c_2 e c_4 è la medesima (essendo configurazioni simmetriche l'una all'altra rispetto alla guida s):

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & kR \cos \vartheta \\ kR \cos \vartheta & -(mg + kd) R \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\det B}{kR} = -(mg + kd) \sin \vartheta - kR \cos^2 \vartheta \\ \text{tr } B = k - (mg + kd) R \sin \vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\det B}{kmgR} = -\left(1 + \frac{7d}{2R}\right) \sin \vartheta - \frac{7}{2} \cos^2 \vartheta \\ \frac{\text{tr } B}{mg} = \frac{7}{2R} - \left(1 + \frac{7d}{2R}\right) R \sin \vartheta. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} \frac{\det B_1}{kmgR} = \frac{21}{4} > 0 \\ \frac{\text{tr } B_1}{mg} = \frac{7}{2R} + \frac{21}{4} R > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{autovalori positivi} \Rightarrow c_1 \text{ stabile,}$$

$$\begin{cases} \frac{\det B_2}{kmgR} = \frac{7}{4} > 0 \\ \frac{\text{tr } B_2}{mg} = \frac{7}{2R} + \frac{7}{4} R > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{autovalori positivi} \Rightarrow c_2 \text{ stabile,}$$

$$\frac{\det B_3}{kmgR} = -\frac{21}{8} < 0 \Rightarrow \text{autovalori discordi} \Rightarrow c_3, c_4 \text{ instabili.}$$

Energia cinetica. Scegliendo il centro di massa A della ruota come punto di riferimento nella formula dell'energia cinetica della ruota stessa, riconoscendo che la velocità angolare è $\underline{\omega} = \dot{\vartheta} \underline{e}_z$ e ricordando i valori del momenti d'inerzia $I_{A,zz}^{\text{asta}} = \frac{1}{12} \frac{3}{8} m(2R)^2 = \frac{1}{8} mR^2$ e $I_{A,zz}^{\text{anello}} = \frac{1}{4} mR^2$ delle singole aste e dell'anello rispetto ad A e alla direzione di $\underline{\omega}$:

$$T = 4T^{\text{asta}} + T^{\text{anello}} + T^B = 4 \left(\frac{1}{2} \frac{3}{8} m \underline{v}_A^2 + \frac{1}{2} I_{A,zz}^{\text{asta}} \underline{\omega}^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{4} m \underline{v}_A^2 + \frac{1}{2} I_{A,zz}^{\text{anello}} \underline{\omega}^2 \right) + \frac{1}{2} m \underline{v}_B^2$$

$$= \frac{7}{8} m \underline{v}_A^2 + \frac{3}{8} m R^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m \underline{v}_B^2 = \frac{11}{8} m d^2 + \frac{7}{8} m R^2 \dot{\vartheta}^2 + m R d \dot{\vartheta} \cos \vartheta.$$

Equazioni di moto. Scriviamo le equazioni di moto riutilizzando i calcoli sulle derivate di V già effettuati, ricordando che $L = T - V$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{d}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial d} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{11}{4} m \dot{d} + m R \dot{\vartheta} \cos \vartheta \right) = -kd - \frac{11}{4} mg - kR \sin \vartheta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{7}{4} m R^2 \dot{\vartheta} + m R d \dot{\vartheta} \cos \vartheta \right) = -m R d \dot{\vartheta} \sin \vartheta - (mg + kd) R \cos \vartheta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{4} m \ddot{d} + m R \ddot{\vartheta} \cos \vartheta - m R \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta = -\frac{7}{2} \frac{mg}{R} d - \frac{11}{4} mg - \frac{7}{2} \frac{mg}{R} R \sin \vartheta \\ \frac{7}{4} m R^2 \ddot{\vartheta} + m R \ddot{d} \cos \vartheta - m R d \dot{\vartheta} \sin \vartheta = -m R d \dot{\vartheta} \sin \vartheta - \left(mg + \frac{7}{2} \frac{mg}{R} d \right) R \cos \vartheta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{4} \ddot{d} + R \ddot{\vartheta} \cos \vartheta - R \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta = -\left(\frac{7d}{2R} + \frac{11}{4} + \frac{7}{2} \sin \vartheta \right) g \\ \frac{7}{4} R \ddot{\vartheta} + \ddot{d} \cos \vartheta = -\left(1 + \frac{7d}{2R} \right) g \cos \vartheta. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni imposte dalla domanda $\dot{d} = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$ (quiete), $d = 0$ e $\vartheta = 0$, otteniamo

$$\begin{cases} \frac{11}{4}\ddot{d} + R\ddot{\vartheta} = -\frac{11}{4}g \\ \frac{7}{4}R\ddot{\vartheta} + \ddot{d} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\ddot{\vartheta} = -\frac{11}{4}(\ddot{d} + g) \\ R\ddot{\vartheta} = -\frac{4}{7}(\ddot{d} + g) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{d} = -g \\ \ddot{\vartheta} = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2.

Risultante. $\underline{R} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = 2(\underline{e}_x - \underline{e}_y + 4\underline{e}_z)$.

Momento risultante rispetto a O.

$$\begin{aligned} \underline{M}_O &= (P_1 - O) \times \underline{v}_1 + (P_2 - O) \times \underline{v}_2 + (P_3 - O) \times \underline{v}_3 \\ &= 4\underline{e}_x - 10\underline{e}_y + 8\underline{e}_z + 5\underline{e}_x - 2\underline{e}_y - 3\underline{e}_z + 13\underline{e}_x - 6\underline{e}_y - 15\underline{e}_z = 2(11\underline{e}_x - 9\underline{e}_y - 5\underline{e}_z). \end{aligned}$$

Invariante scalare e sistema equivalente. Calcolando l'invariante scalare del sistema $\mathcal{I} = \underline{R} \cdot \underline{M}_O = 0$, ci accorgiamo che \underline{M}_O e \underline{R} sono tra loro perpendicolari. Il sistema dato è allora equivalente ad un secondo sistema $\{(P, \underline{R})\}$, a patto che $(P - O) \times \underline{R} = \underline{M}_O$, cioè

$$P - O = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_O}{\|\underline{R}\|^2} + \lambda \underline{R} = \frac{1}{72}(164\underline{e}_x + 196\underline{e}_y + 8\underline{e}_z) = \frac{1}{18}(41\underline{e}_x + 49\underline{e}_y + 2\underline{e}_z) + \lambda \underline{R}.$$

Scegliendo, ad esempio, $\lambda = 0$, troviamo $P \equiv \left(\frac{41}{18}, \frac{49}{18}, \frac{1}{9}\right)$.

Esercizio 3.

Tra le molte possibili soluzioni di questo esercizio, la seguente è una delle più brevi.

Cinematica. Indicando con $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z$ la velocità angolare del sistema e applicando la prima formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\begin{aligned} -v_0(2\underline{e}_x + \underline{e}_y) = \underline{v}_A = \underline{v}_O + \underline{\omega} \times (A - O) &= -v_0\underline{e}_y + \omega \underline{e}_z \times 6L\underline{e}_y \Rightarrow -2v_0\underline{e}_x = -6L\omega \underline{e}_x \\ \Rightarrow \omega &= \frac{v_0}{3L} \Rightarrow \underline{\omega} = \frac{v_0}{3L} \underline{e}_z. \end{aligned}$$

Ancora grazie alla prima formula fondamentale della cinematica rigida e ricordando che $\underline{v}_K = \underline{0}$:

$$\begin{aligned} -v_0\underline{e}_y = \underline{v}_O = \underline{v}_K + \underline{\omega} \times (O - K) &= -\frac{v_0}{3L} \underline{e}_z \times (K - O) = -\frac{v_0}{3L} \underline{e}_z \times (x_K \underline{e}_x + y_K \underline{e}_y) \\ \Rightarrow \underline{e}_y &= \frac{1}{3L} \times (-y_K \underline{e}_x + x_K \underline{e}_y) \Rightarrow x_K = 3L, y_K = 0 \Rightarrow K - O = 3L \underline{e}_x. \end{aligned}$$

Petali. Osserviamo per prima cosa che, per simmetria, il sistema petali ha centro di massa coincidente con il centro della circonferenza tratteggiata e che ogni base sul piano xy è principale. Il tensore centrale d'inerzia di questo sottosistema è allora a simmetria cilindrica:

$$\underline{I}_G^{\text{petali}} = \frac{1}{2} I_{G,zz}^{\text{petali}} (\mathbb{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z).$$

Le tre coppie di petali tra loro opposti, inoltre, sono tra loro identiche e semplicemente ruotate (di $\frac{\pi}{3}$) attorno alla retta passante per G e di direzione \underline{e}_z : per calcolare $I_{G,zz}^{\text{petali}}$ basta allora triplicare il momento $I_{G,zz}^{\text{coppia}}$ di una singola coppia. Prendendo, per semplicità, la coppia con i centri sul diametro orizzontale della circonferenza e componendo il loro tensori centrali d'inerzia otteniamo:

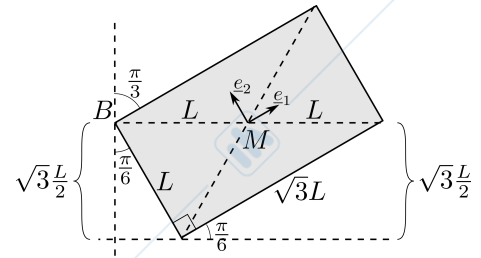
$$\underline{I}_G^{\text{coppia}} = 2 \frac{1}{4} m L^2 (\mathbb{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + \frac{m^2}{2m} (4L)^2 (\mathbb{1} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x), = \frac{1}{2} m L^2 (\mathbb{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 8m L^2 (\mathbb{1} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x)$$

da cui

$$I_{G,zz}^{\text{petali}} = 3I_{G,zz}^{\text{coppia}} = 3mL^2 + 24mL^2 = 27mL^2 \quad \text{e} \quad \underline{I}_G^{\text{petali}} = \frac{27}{2}mL^2 (\mathbf{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z).$$

Foglie.

Come si evince dalla figura qui a fianco, il centro di massa M del rettangolo di destra è alla medesima quota del punto B . Grazie inoltre alla simmetria rispetto alla retta AO , B è il centro di massa del sottosistema *foglie*, la base data è principale per $\underline{I}_B^{\text{foglie}}$ e i momenti d'inerzia $I_{B,xx}^{\text{rett}}$, $I_{B,yy}^{\text{rett}}$ e $I_{B,zz}^{\text{rett}}$ dei due rettangoli presi separatamente sono (a coppie) uguali.



Scriviamo allora il tensore centrale d'inerzia $\underline{I}_M^{\text{rett}}$ del rettangolo di destra utilizzando le sue direzioni principali $\underline{e}_1 := \frac{1}{2}(\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y)$ e $\underline{e}_2 := \frac{1}{2}(-\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y)$ e calcoliamo poi $\underline{I}_B^{\text{rett}}$:

$$\underline{I}_B^{\text{rett}} = \frac{1}{12}mL^2 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 4\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + mL^2 (\mathbf{1} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x).$$

Allora

$$I_{B,xx}^{\text{foglie}} = 2I_{B,xx}^{\text{rett}} = 2\underline{e}_x \cdot \underline{I}_B^{\text{rett}} \underline{e}_x = 2 \left\{ \frac{1}{12}mL^2 [(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_1)^2 + 3(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_2)^2] \right\} = \frac{1}{6}mL^2 \left(\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}mL^2,$$

$$I_{B,zz}^{\text{foglie}} = 2I_{B,zz}^{\text{rett}} = 6mL^2 \left(\frac{4}{12} + 1 \right) = \frac{8}{3}mL^2,$$

$$I_{B,yy}^{\text{foglie}} = I_{B,zz}^{\text{foglie}} - I_{B,xx}^{\text{foglie}} = \frac{29}{12}mL^2 \quad (\text{per il Teorema degli Assi Perpendicolari}),$$

da cui

$$\underline{I}_B^{\text{foglie}} = \frac{1}{12} (3\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + 29\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 32\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) mL^2.$$

Centro di massa. Stelo e foglie hanno centro di massa B , pertanto

$$C - B = \frac{6m(G - B) + 2(B - B) + m(B - B)}{(6 + 2 + 1)m} = \frac{2}{3}(G - B) = \frac{10}{3}Le_y.$$

Stelo. Il tensore d'inerzia del sottosistema *stelo* rispetto a C è

$$\begin{aligned} \underline{I}_C^{\text{stelo}} &= \underline{I}_B^{\text{stelo}} + m \left(\frac{10}{3}L \right)^2 (\mathbf{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) = \frac{1}{12}m(6L)^2 (\mathbf{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \frac{100}{9}mL^2 (\mathbf{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \\ &= \left(3 + \frac{100}{9} \right) mL^2 (\mathbf{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) = \frac{127}{9}mL^2 (\mathbf{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y). \end{aligned}$$

Per trovare il momento cercato, normalizziamo prima il vettore \underline{v} per ricavarne la direzione unitaria:

$\underline{n} := \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{3}{5}\underline{e}_x + \frac{4}{5}\underline{e}_y$. Infine calcoliamo

$$I_C^{\text{stelo}} = \underline{n} \cdot \underline{I}_C^{\text{stelo}} \underline{n} = \underline{n} \cdot \frac{127}{9}mL^2 (\mathbf{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \underline{n} = \frac{127}{9}mL^2 (\underline{n} \cdot \underline{e}_x)^2 = \frac{127}{9}mL^2 \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{127}{25}mL^2.$$