

UNIVERSITÀ  
DI PAVIA

Corsi di Laurea in Ingegneria Edile Architettura

## Esame scritto di Meccanica Razionale [500153]

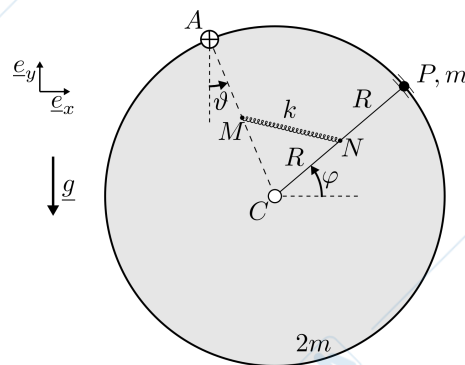
02 dicembre 2022

COGNOME:

ESITO (in trentesimi):

NOME:

**Esercizio 1.** In un piano verticale, un disco omogeneo di massa  $2m$  e raggio  $2R$  è incernierato ad un punto fisso  $A$  appartenente al suo bordo e attorno al quale può ruotare liberamente senza attrito. Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è libero di scorrere senza attrito sul bordo del disco ed è collegato al centro  $C$  di quest'ultimo da un'asta  $CP$  di massa trascurabile. Il punto medio  $N$  dell'asta  $CP$  è collegato al punto medio  $M$  del raggio  $AC$  del disco da una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k := \frac{2mg}{R}$ . L'inclinazione del raggio  $AC$  rispetto alla direzione verticale è indicata dalla variabile lagrangiana  $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ , mentre l'inclinazione dell'asta  $CP$  rispetto alla direzione orizzontale è indicata dalla variabile lagrangiana  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ . L'accelerazione di gravità è  $\underline{g} = -g\underline{e}_y$ .



Scrivere l'energia cinetica totale del sistema [3 punti].

$$T = 2mR^2 \left[ \dot{\varphi}^2 + 4\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} (\cos \varphi \sin \vartheta - \sin \varphi \cos \vartheta) \right]$$

Scrivere l'energia potenziale totale del sistema [4 punti]. Usando eventualmente le identità trigonometriche  $\sin(\vartheta - \varphi) = \sin \vartheta \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \varphi$  e  $\cos(\vartheta - \varphi) = \sin \vartheta \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \varphi$ , controllare poi che la sua matrice Hessiana sia  $B = 2mgR \begin{pmatrix} 3 \cos \vartheta - \sin(\vartheta - \varphi) & \sin(\vartheta - \varphi) \\ \sin(\vartheta - \varphi) & -\sin \varphi - \sin(\vartheta - \varphi) \end{pmatrix}$

$$V = 2mgR (\sin \varphi - 3 \cos \vartheta + \cos \varphi \sin \vartheta - \sin \varphi \cos \vartheta)$$

Se esistono, determinare le configurazioni di equilibrio del sistema in cui l'asta  $CP$  ha la medesima direzione di  $\underline{e}_y$  e studiarne la stabilità [4 punti].

$$c_1 : \left( \vartheta_1 = 0, \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \right), \quad c_2 : \left( \vartheta_2 = 0, \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} \right), \quad c_3 : \left( \vartheta_3 = \pi, \varphi_3 = \frac{\pi}{2} \right), \quad c_4 : \left( \vartheta_4 = \pi, \varphi_4 = -\frac{\pi}{2} \right)$$

sono tutte instabili.

Scrivere le accelerazioni lagrangiane  $\ddot{\vartheta}$  e  $\ddot{\varphi}$  nel moto incipiente, quando il sistema parte in quiete dalla configurazione con  $\vartheta = 0$  e  $\varphi = 0$  [2 punti].

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{1}{4} \frac{g}{R}, \quad \ddot{\varphi} = 0$$

**Facoltativo:** Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema in cui l'asta  $CP$  non è parallela a  $\underline{e}_y$  [2 punti].

$$c_5 : \left( \vartheta_5 = \arccos \frac{17}{18}, \varphi_5 = \pi - \arcsin \frac{1}{6} \right), \quad c_6 : \left( \vartheta_6 = \arccos \frac{17}{18} - \pi, \varphi_6 = -\arcsin \frac{1}{6} \right)$$

**Esercizio 2.** Per il seguente sistema di vettori applicati

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = 5\underline{e}_x - \underline{e}_y + 2\underline{e}_z & \text{applicato in } P_1 \equiv (1, -2, 0) \\ \underline{v}_2 = -2\underline{e}_x + \underline{e}_z & \text{applicato in } P_2 \equiv (3, -1, -1) \\ \underline{v}_3 = \underline{e}_x + 4\underline{e}_y - \underline{e}_z & \text{applicato in } P_3 \equiv (-1, 0, 1) \end{cases}$$

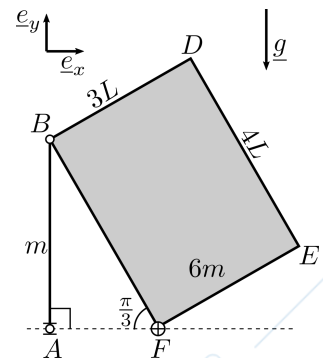
determinare risultante [1 punto] e momento risultante rispetto a  $O \equiv (0, 0, 0)$  [2 punti]. Scrivere la posizione rispetto a  $O$  del punto  $A$  appartenente all'asse centrale del sistema e al piano di equazione  $x - z = \frac{2}{29}$  [2 punti].

$$\underline{R} = 4\underline{e}_x + 3\underline{e}_y + 2\underline{e}_z, \quad \underline{M}_O = 3(-3\underline{e}_x - \underline{e}_y + \underline{e}_z), \quad A \equiv \left( \frac{19}{29}, -\frac{27}{29}, \frac{17}{29} \right)$$

**Esercizio 3.**

Il sistema nella figura a destra è costituito da un'asta omogenea  $AB$  verticale di massa  $m$  e da una lamina rettangolare omogenea  $BDEF$  di massa  $6m$  e lati  $\overline{BD} = 3L$  e  $\overline{DE} = 4L$  con il lato  $FB$  inclinato di  $\frac{\pi}{3}$  rispetto alla direzione orizzontale, il vertice  $B$  in comune con l'asta e il vertice  $F$  posto alla medesima quota dell'estremo  $A$  dell'asta.

Sapendo che all'istante  $t = 0$  il centro di istantanea rotazione della lamina rettangolare è il vertice  $F$  e che la velocità del punto  $E$  è  $\underline{v}_E = v_0(-\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y)$  con  $v_0 > 0$ , determinare il vettore velocità angolare  $\underline{\omega}$  della lamina [1 punto] e la velocità  $\underline{v}_B$  del punto  $B$  [2 punti], usando la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z := \underline{e}_x \wedge \underline{e}_y)$ .



$$\underline{\omega} = \frac{2}{3} \frac{v_0}{L} \underline{e}_z, \quad \underline{v}_B = -\frac{4}{3} v_0 (\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y)$$

Determinare le posizioni  $C^{\text{asta}} - F$  [1 punto] e  $C^{\text{lamina}} - F$  [2 punti] rispetto al punto  $F$  dei centri di massa di asta e lamina rispettivamente.

$$C^{\text{asta}} - F = (-2\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y)L, \quad C^{\text{lamina}} - F = \left[ (3\sqrt{3} - 4)\underline{e}_x + (3 + 4\sqrt{3})\underline{e}_y \right] \frac{L}{4}$$

Scrivere i tensori d'inerzia  $\underline{I}_F^{\text{asta}}$  e  $\underline{I}_F^{\text{lamina}}$  rispetto al punto  $F$  di asta e lamina rispettivamente, indicando con precisione la base scelta, se diversa da quella data  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  [2 punti ciascuno]. Determinare poi i momenti di inerzia  $I_s^{\text{asta}}$  e  $I_s^{\text{lamina}}$  di asta e lamina rispetto alla retta  $s$  contenente il lato  $EF$  della lamina [1 punto ciascuno].

$$\begin{aligned} \underline{I}_F^{\text{asta}} &= mL^2 \left[ 4\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + 4\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 8\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + 2\sqrt{3}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \right] \\ \underline{I}_F^{\text{lamina}} &= mL^2 \left[ 32\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 18\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 50\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - 18(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \right], \\ \text{con } \underline{e}_1 &:= \frac{1}{2}(\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y), \quad \underline{e}_2 := \frac{1}{2}(-\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y), \quad I_s^{\text{asta}} = 7mL^2, \quad I_s^{\text{lamina}} = 32mL^2 \end{aligned}$$

**Facoltativo:** Supponendo che il sistema si trovi in un piano verticale con accelerazione di gravità  $\underline{g} := -g\underline{e}_y$ , che asta e lamina siano collegati da una cerniera in  $B$ , che in  $A$  ci sia un carrello orizzontale e che in  $F$  il sistema sia vincolato da una cerniera fissa, determinare la reazione vincolare  $\underline{\Phi}_A$  esercitata dal carrello in  $A$  [2 punti], sapendo che la configurazione descritta in figura è di equilibrio.

$$\underline{\Phi}_A = \left( 4 - 9\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \underline{e}_y$$

## SVOLGIMENTO

**Esercizio 1.** Come prima cosa scriviamo i vettori posizione (e le velocità) dei punti di interesse per il calcolo delle energie potenziale e cinetica:

$$\begin{aligned} C - A &= 2R (\sin \vartheta \underline{e}_x - \cos \vartheta \underline{e}_y) \Rightarrow \underline{v}_C = 2R\dot{\vartheta} (\cos \vartheta \underline{e}_x + \sin \vartheta \underline{e}_y) \Rightarrow \underline{v}_C^2 = 4R^2 \dot{\vartheta}^2, \\ P - C &= 2R (\cos \varphi \underline{e}_x + \sin \varphi \underline{e}_y), \\ P - A &= (P - C) + (C - A) = 2R [(\cos \varphi + \sin \vartheta) \underline{e}_x + (\sin \varphi - \cos \vartheta) \underline{e}_y] \\ &\Rightarrow \underline{v}_P = 2R \left[ (-\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \vartheta) \underline{e}_x + (\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \underline{e}_y \right] \\ &\Rightarrow \underline{v}_P^2 = 4R^2 \left[ \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} (\cos \varphi \sin \vartheta - \sin \varphi \cos \vartheta) \right], \\ N - M &= \frac{1}{2}(P - A) \quad \text{per similitudine dei triangoli } ACP \text{ e } MCN \\ &\Rightarrow \|N - M\|^2 = 2R^2 (1 + \cos \varphi \sin \vartheta - \sin \varphi \cos \vartheta). \end{aligned}$$

*Energia cinetica.* Scegliendo il punto fisso  $A$  del disco come punto di riferimento nella formula dell'energia cinetica del disco stesso, riconoscendo che la velocità angolare è  $\underline{\omega} = \dot{\vartheta} \underline{e}_z$  e ricordando i valori del momenti d'inerzia  $I_{A,zz}^{\text{disco}} = \frac{3}{2}2m(2R)^2 = 12mR^2$  del disco rispetto ad  $A$  e alla direzione di  $\underline{\omega}$ :

$$T = T^{\text{disco}} + T^P = \frac{1}{2} I_{A,zz}^{\text{disco}} \underline{\omega}^2 + \frac{1}{2} m \underline{v}_P^2 = 2mR^2 \left[ \dot{\varphi}^2 + 4\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} (\cos \varphi \sin \vartheta - \sin \varphi \cos \vartheta) \right].$$

*Energia potenziale.* Scegliendo la quota del punto  $A$  come livello ad energia potenziale gravitazionale nulla e trascurando le costanti:

$$\begin{aligned} V &= V_g^{\text{disco}} + V_g^P + V_k^{MN} = 2mgy_C + mgy_P + \frac{1}{2}k\|N - M\|^2 \\ &= -4mgR \cos \vartheta + 2mgR (\sin \varphi - \cos \vartheta) + 2mgR (\cos \varphi \sin \vartheta - \sin \varphi \cos \vartheta) \\ &= 2mgR (\sin \varphi - 3 \cos \vartheta + \cos \varphi \sin \vartheta - \sin \varphi \cos \vartheta). \end{aligned}$$

*Configurazione di equilibrio.* Calcoliamo le derivate prime di  $V$  rispetto alle coordinate lagrangiane e imponiamole pari a 0:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 2mgR (3 \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2mgR (\cos \varphi - \sin \varphi \sin \vartheta - \cos \varphi \cos \vartheta) = 0 \end{cases}$$

e risolviamo il sistema così ottenuto:

$$\begin{cases} 3 \sin \vartheta + (\cos \varphi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta) = 0 \\ \cos \varphi - (\cos \varphi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = -3 \sin \vartheta \\ \sin \vartheta (3 - 3 \cos \vartheta + \sin \varphi) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata quando  $\sin \vartheta = 0$  oppure  $3 \cos \vartheta = 3 + \sin \varphi$ : nel primo caso, dalla prima equazione, anche  $\cos \varphi = 0$  e quindi tutte le possibili configurazioni di equilibrio con il raggio  $AC$  verticale sono:

$$c_1 : \left( \vartheta_1 = 0, \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \right), \quad c_2 : \left( \vartheta_2 = 0, \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} \right), \quad c_3 : \left( \vartheta_3 = \pi, \varphi_3 = \frac{\pi}{2} \right), \quad c_4 : \left( \vartheta_4 = \pi, \varphi_4 = -\frac{\pi}{2} \right).$$

Nel secondo caso, invece, ricordando la formula fondamentale della trigonometria, il sistema diventa

$$\begin{cases} 3 \sin \vartheta = -\cos \varphi \\ 3 \cos \vartheta = 3 + \sin \varphi \end{cases} \quad \text{con } \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1;$$

elevando allora al quadrato le prime due equazioni, sommandole insieme e usando ancora la formula fondamentale della trigonometria

$$\begin{cases} 9 = \cos^2 \varphi + (3 + \sin \varphi)^2 = 10 + 6 \sin \varphi \\ 3 \cos \vartheta = 3 + \sin \varphi \\ 3 \sin \vartheta = -\cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \varphi = -\frac{1}{6} \\ \cos \vartheta = \frac{17}{18} \\ \text{con } \sin \vartheta \text{ e } \cos \varphi \text{ discordi} \end{cases}$$

otteniamo le ulteriori configurazioni di equilibrio

$$c_5 : \left( \vartheta_5 = \arccos \frac{17}{18}, \varphi_5 = \pi - \arcsin \frac{1}{6} \right), \quad c_6 : \left( \vartheta_6 = \arccos \frac{17}{18} - \pi, \varphi_6 = -\arcsin \frac{1}{6} \right).$$

*Stabilità.* Per determinare il tipo di stabilità, calcoliamo la matrice Hessiana di  $V$  e istanziamola per le differenti configurazioni di equilibrio richieste, osservando (per velocizzare i conti) che

$$\cos \varphi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta = \cos(\vartheta - \varphi).$$

Allora

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta \partial \varphi} & \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix} = 2mgR \begin{pmatrix} 3 \cos \vartheta - \sin(\vartheta - \varphi) & \sin(\vartheta - \varphi) \\ \sin(\vartheta - \varphi) & -\sin \varphi - \sin(\vartheta - \varphi) \end{pmatrix}$$

e quindi

$$B_1 = 2mgR \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B_1 = -(2mgR)^2 < 0 \Rightarrow \text{autovalori discordi} \Rightarrow c_1 \text{ instabile,}$$

$$B_2 = 2mgR \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B_2 = -(2mgR)^2 < 0 \Rightarrow \text{autovalori discordi} \Rightarrow c_2 \text{ instabile,}$$

$$B_3 = 2mgR \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det B_3 = 7(2mgR)^2 > 0 \\ \text{tr } B_3 = -6(2mgR) < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{autovalori negativi} \Rightarrow c_3 \text{ instabile,}$$

$$B_4 = 2mgR \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B_4 = -5(2mgR)^2 < 0 \Rightarrow \text{autovalori discordi} \Rightarrow c_4 \text{ instabile.}$$

*Equazioni di moto.* Scriviamo le equazioni di moto riutilizzando i calcoli sulle derivate di  $V$  già effettuati, ricordando che  $L = T - V$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2R \frac{d}{dt} [4\dot{\vartheta} + \dot{\varphi} \sin(\vartheta - \varphi)] = 2R\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos(\vartheta - \varphi) - g(3 \sin \vartheta + \cos(\vartheta - \varphi)) \\ 2R \frac{d}{dt} [\dot{\varphi} + \dot{\vartheta} \sin(\vartheta - \varphi)] = -2R\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos(\vartheta - \varphi) - g(\cos \varphi - \cos(\vartheta - \varphi)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2R [4\ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi} \sin(\vartheta - \varphi) + \dot{\varphi}(\dot{\vartheta} - \dot{\varphi}) \cos(\vartheta - \varphi)] = 2R\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos(\vartheta - \varphi) - g(3 \sin \vartheta + \cos(\vartheta - \varphi)) \\ 2R [\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta} \sin(\vartheta - \varphi) + \dot{\vartheta}(\dot{\vartheta} - \dot{\varphi}) \cos(\vartheta - \varphi)] = -2R\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos(\vartheta - \varphi) - g(\cos \varphi - \cos(\vartheta - \varphi)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi} \sin(\vartheta - \varphi) - \dot{\varphi}^2 \cos(\vartheta - \varphi) = -\frac{1}{2} \frac{g}{R} (3 \sin \vartheta + \cos(\vartheta - \varphi)) \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta} \sin(\vartheta - \varphi) + \dot{\vartheta}^2 \cos(\vartheta - \varphi) = -\frac{1}{2} \frac{g}{R} (\cos \varphi - \cos(\vartheta - \varphi)) \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni imposte dalla domanda  $\dot{\vartheta} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  (quiete),  $\vartheta = 0$  e  $\varphi = 0$ , otteniamo

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta} = -\frac{1}{4} \frac{g}{R} \\ \ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = 5\underline{e}_x - \underline{e}_y + 2\underline{e}_z & \text{applicato in } P_1 \equiv (1, -2, 0) \\ \underline{v}_2 = -2\underline{e}_x + \underline{e}_z & \text{applicato in } P_2 \equiv (3, -1, -1) \\ \underline{v}_3 = \underline{e}_x + 4\underline{e}_y - \underline{e}_z & \text{applicato in } P_3 \equiv (-1, 0, 1) \end{cases}$$

**Esercizio 2.**

Risultante.  $\underline{R} = 4\underline{e}_x + 3\underline{e}_y + 2\underline{e}_z$ .

Momento risultante rispetto a  $O$ .

$$\begin{aligned} \underline{M}_O &= (P_1 - O) \wedge \underline{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \underline{v}_2 + (P_3 - O) \wedge \underline{v}_3 \\ &= -4\underline{e}_x - 2\underline{e}_y + 9\underline{e}_z - \underline{e}_x - \underline{e}_y - 2\underline{e}_z - 4\underline{e}_x - 4\underline{e}_z = 3(-3\underline{e}_x - \underline{e}_y + \underline{e}_z). \end{aligned}$$

Asse centrale. Dato che  $\underline{R}^2 = 16 + 9 + 4 = 29$  e  $\underline{R} \wedge \underline{M}_O = 3(5\underline{e}_x - 10\underline{e}_y + 5\underline{e}_z)$ , il punto  $A$  ha vettore posizione

$$A - O = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_O}{\|\underline{R}\|^2} + \lambda \underline{R} = \frac{3}{29}(5\underline{e}_x - 10\underline{e}_y + 5\underline{e}_z) + \lambda(4\underline{e}_x + 3\underline{e}_y + 2\underline{e}_z).$$

Imponendo la condizione  $x - z = \frac{2}{29}$ , si ottiene  $\lambda = \frac{1}{29}$  e quindi  $A \equiv \left(\frac{19}{29}, -\frac{27}{29}, \frac{17}{29}\right)$ .

**Esercizio 3.**

Cinematica. Indicando con  $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z$  la velocità angolare del sistema e applicando la prima formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\begin{aligned} v_0(-\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y) &= \underline{v}_E = \underline{v}_F + \underline{\omega} \wedge (E - F) = \underline{0} + \omega \underline{e}_z \wedge \frac{3}{2}L(\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y) = \frac{3}{2}L\omega(-\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y) \\ &\Rightarrow \omega = \frac{2v_0}{3L} \Rightarrow \underline{\omega} = \frac{2v_0}{3L}\underline{e}_z \end{aligned}$$

e

$$\underline{v}_B = \underline{v}_F + \underline{\omega} \wedge (B - F) = \underline{0} + \frac{2v_0}{3L}\underline{e}_z \wedge 2L(-\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y) = -\frac{4}{3}v_0(\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y).$$

Centri di massa. Dalla geometria della figura si ottiene immediatamente

$$C^{\text{asta}} - F = (-2\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y)L.$$

Per la lamina, invece, indicando con  $\underline{e}_1 := \frac{1}{2}(\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y)$  ed  $\underline{e}_2 := \frac{1}{2}(-\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y)$ :

$$C^{\text{lamina}} - F = \frac{1}{2}(3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2)L = \left[(3\sqrt{3} - 4)\underline{e}_x + (3 + 4\sqrt{3})\underline{e}_y\right] \frac{L}{4}.$$

Asta. La base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  è principale per il tensore centrale d'inerzia dell'asta e l'asta è lunga  $2\sqrt{3}L$ :

$$\underline{I}_{C^{\text{asta}}}^{\text{asta}} = \frac{1}{12}m(2\sqrt{3}L)^2 (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) = mL^2 (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z).$$

Poiché il vettore posizione del centro di massa dell'asta rispetto a  $F$  è

$$C^{\text{asta}} - F = (-2\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y)L = \frac{-2\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y}{\sqrt{7}}\sqrt{7}L,$$

applicando il Teorema di Huygens-Steiner si ottiene

$$\begin{aligned} \underline{I}_F^{\text{asta}} &= \underline{I}_{C^{\text{asta}}}^{\text{asta}} + 7mL^2 \left( \underline{1} - \frac{-2\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y}{\sqrt{7}} \otimes \frac{-2\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y}{\sqrt{7}} \right) \\ &= mL^2 \left[ 8\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + 7\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 8\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - (-2\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y) \otimes (-2\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y) \right] \\ &= mL^2 \left[ 4\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + 4\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 8\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + 2\sqrt{3}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \right] \end{aligned}$$

e il momento richiesto è

$$\begin{aligned} I_s^{\text{asta}} &= \underline{e}_1 \cdot \underline{I}_F^{\text{asta}} \underline{e}_1 = \frac{1}{4} mL^2 (\sqrt{3} \underline{e}_x + \underline{e}_y) \cdot \left[ 4\sqrt{3} \underline{e}_x + 4 \underline{e}_y + 2\sqrt{3} (\underline{e}_x + \sqrt{3} \underline{e}_y) \right] \\ &= \frac{1}{4} mL^2 \left[ 4\sqrt{3}\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} (\sqrt{3} + \sqrt{3}) \right] = 7mL^2. \end{aligned}$$

*Lamina.* Una base principale per il tensore centrale d'inerzia della lamina è invece  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_z)$ :

$$\underline{I}_{C^{\text{lamina}}}^{\text{lamina}} = \frac{1}{12} 6mL^2 (16\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 9\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 25\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z).$$

Poiché il vettore posizione del centro di massa della lamina rispetto a  $F$  è

$$C^{\text{lamina}} - F = \frac{1}{2} (3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2) L = \frac{3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2}{5} \frac{5}{2} L,$$

applicando il Teorema di Huygens-Steiner si ottiene

$$\begin{aligned} \underline{I}_F^{\text{lamina}} &= \underline{I}_{C^{\text{lamina}}}^{\text{lamina}} + \frac{25}{4} 6mL^2 \left( \underline{1} - \frac{3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2}{5} \otimes \frac{3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2}{5} \right) \\ &= mL^2 [32\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 18\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 50\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - 18(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)]. \end{aligned}$$

e il momento richiesto è

$$I_s^{\text{lamina}} = 32mL^2.$$

*Reazione vincolare.* Per calcolare la reazione vincolare in  $A$ , imponiamo l'equilibrio dei momenti in  $F$  delle forze esterne agenti sul sistema, scrivendo  $\underline{\Phi}_a := \Phi_a \underline{e}_y$ :

$$\begin{aligned} \underline{0} &= (C^{\text{asta}} - F) \wedge (-mg \underline{e}_y) + (C^{\text{lamina}} - F) \wedge (-6mg \underline{e}_y) + (A - F) \wedge \Phi_A \underline{e}_y \\ &= (-2\underline{e}_x + \sqrt{3} \underline{e}_y) L \wedge (-mg \underline{e}_y) + \left( \frac{3}{2} \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 \right) L \wedge (-6mg \underline{e}_y) - 2L \underline{e}_x \wedge \Phi_A \underline{e}_y \\ &= \left( 2 - 9 \frac{\sqrt{3}}{2} + 6 - 2\Phi_A \right) mgL \underline{e}_z \end{aligned}$$

ottenendo

$$\underline{\Phi}_A = \left( 4 - 9 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \underline{e}_y.$$