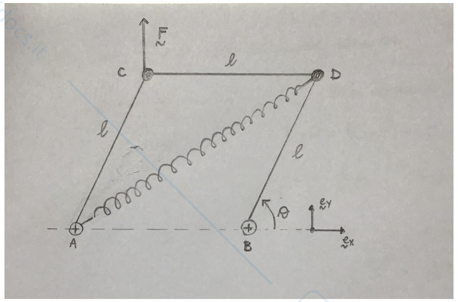
Tema Esame di Meccanica Razionale, 27/01/2020

Silvia Paparini

Università di Pavia
s.paparini@campus.unimib.it

8 Giugno 2020

Problema. In un piano verticale, tre aste omogenee ed uguali, di massa M e lunghezza l, sono collegate come mostrato in Figura. Le aste AC e BD sono collegate alle cerniere fisse A e B, poste alla stessa quota a distanza l tra loro; le aste AC e CD sono collegate attraverso la cerniera mobile C e le aste CD e BD sono collegate attraverso la cerniera mobile D. Tra le cerniere A e D si estende una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. L'angolo θ denota l'inclinazione sull'orizzontale dell'asta BD. Sulla cerniera C agisce la forza $F = F\boldsymbol{e}_y$, di intensità costante F, che può assimilarsi ad un campo di forza di potenziale $U = Fy_C$, dove y_C è l'ordinata del punto C nel riferimento cartesiano $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ (indicato in Figura). In questo riferimento l'accelerazione di gravità è $-g\boldsymbol{e}_y$. Si trascurino tutti gli attriti.



Q1. Scrivere l'energia cinetica T del sistema.

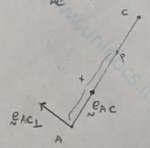
$$T = T_{\substack{\text{asta}\\AC}} + T_{\substack{\text{asta}\\CD}} + T_{\substack{\text{asta}\\BD}}$$

teorema di König: $T = \frac{1}{2} M v_{\bar{A}}^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{I}}_{\bar{A}} \underline{\omega} + \underline{v}_{\bar{A}} \cdot M \underline{v}_G^A$ $\qquad$ $\bar{A}$: osservatore ausiliario; G: centro di massa

scelte comode di A: $\bar{A}$ fermo $\Rightarrow T = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{I}}_A \underline{\omega}$

$\bar{A} \equiv G \Rightarrow T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{I}}_G \underline{\omega}$

$T_{\substack{\text{asta}\\AC}} \rightsquigarrow \bar{A} \equiv A$ fermo $\Rightarrow T = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{I}}_A \underline{\omega} \rightsquigarrow$ simmetria cilindrica:

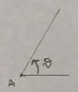


$$\underline{\underline{I}}_A = I_\perp (\underline{\underline{I}} - \underline{e}_{AC} \otimes \underline{e}_{AC}) + \underbrace{I_\parallel}_{=0} \underline{e}_{AC} \otimes \underline{e}_{AC}$$

$=0$ se nostro corpo è disposto lungo la direzione di $\underline{e}_{AC}$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{I}}_A = I_\perp (\underline{e}_{AC\perp} \otimes \underline{e}_{AC\perp} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) = \frac{1}{3} M\ell^2 (\underline{e}_{AC\perp} \otimes \underline{e}_{AC\perp} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$$

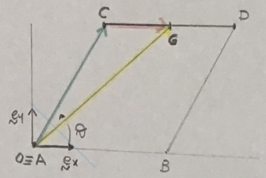
$P - A = x \underline{e}_{AC}$ con $x \in [0, \ell]$, $dm = \rho\, dx$ $\Big\} \Rightarrow I_\perp = \int_0^\ell x^2 \underbrace{\rho}_{=\frac{M}{\ell}} dx = \frac{M}{\ell} \underbrace{\int_0^\ell x^2 dx}_{=\frac{x^3}{3}} = \frac{1}{3} M\ell^2$



$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \underline{e}_z \Rightarrow \boxed{T_{\substack{\text{asta}\\AC}} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (\underline{\underline{I}}_A)_{zz} = \frac{1}{6} M\ell^2 \dot{\theta}^2}$$

$T_{\substack{\text{asta}\\BD}} = T_{\substack{\text{asta}\\AB}}$ con $\bar{A} \equiv B$ fermo.

$T_{\substack{asta\\CD}}$ ... $\bar{A} \equiv G$ centro di massa asta CD $\quad T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\omega} \cdot I_G \underset{\sim}{\omega}$



v_G ... scegliamo $\boxed{O \equiv A}$ $\quad v_G = (G-O)^{\cdot}$

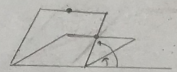
$$G - O = (G-C) + (C-O) = \left(\frac{\ell}{2} + \ell\cos\theta\right) e_x + \ell \sin\theta \, e_y$$

$$G - C = \frac{\ell}{2} e_x \qquad C - O = \ell\cos\theta \, e_x + \ell\sin\theta \, e_y$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{v}_G = -\ell \sin\theta \dot{\theta} \, e_x + \ell \cos\theta \dot{\theta} \, e_y$$

$$\boxed{v_G^2 = \ell^2 \dot{\theta}^2}$$

$\underset{\sim}{\omega} = 0$ non c'è rotazione intorno a $\underset{\sim}{e}_z$ ...



asta CD rimane sempre orizzontale.

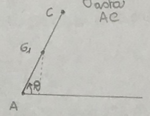
$$\Rightarrow \boxed{T_{\substack{asta\\CD}} = \frac{1}{2} M \ell^2 \dot{\theta}^2}$$

... $T = T_{\substack{asta\\AC}} + T_{\substack{asta\\BD}} + T_{\substack{asta\\CD}} = 2 \cdot \frac{1}{6} M \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \ell^2 \dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{5}{6} M \ell^2 \dot{\theta}^2}$$

Q2. Scrivere l'energia potenziale V del sostema.

$$V = V_{g_{\text{asta AC}}} + V_{g_{\text{asta BD}}} + V_{g_{\text{asta CD}}} + V_k + V_F \rightsquigarrow V_{g_{\text{asta AC}}} = M_{\text{asta AC}} \cdot g \cdot \underbrace{y_{G_1}} = \frac{1}{2} M g \ell \sin\theta$$



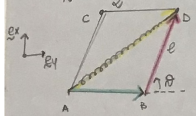
quando il corpo è un sistema di punti $= \frac{\ell}{2}\sin\theta$

$$V_{g_{\text{asta BD}}} = V_{g_{\text{asta AC}}} \quad \boxed{y_{G_{\text{asta BD}}} = y_{G_{\text{asta AC}}}}$$

$$V_{g_{\text{asta CD}}} = M_{\text{asta CD}}\, g\, \underbrace{y_G}_{=\ell\sin\theta} = M g \ell \sin\theta$$

(come trovato)

$$V_k = \frac{1}{2} k\, \mathbf{d}^2 \quad \text{dove } \mathbf{d} = D - A = \underbrace{(D-B)}_{=\ell\cos\theta \mathbf{e}_x + \ell\sin\theta \mathbf{e}_y} + \underbrace{(B-A)}_{=\ell \mathbf{e}_x} = \ell(1+\cos\theta)\mathbf{e}_x + \ell\sin\theta\, \mathbf{e}_y$$

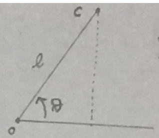


$$\Rightarrow d^2 = \ell^2\left((1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right) = \ell^2\left(1+\cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow d^2 = \ell^2(2 + 2\cos\theta) = 2\ell^2(1+\cos\theta)$$

$$\Rightarrow V_k = \frac{1}{\cancel{2}} k \cdot \cancel{2}\ell^2(\cancel{1}+\cos\theta) \Rightarrow V_k = k\ell^2\cos\theta$$

$V_F = -F\,y_e \quad (V = -U)$ con $\underset{\sim}{F} = F\underset{\sim}{e}_y$



$y_e = \ell \sin\theta$

$\Rightarrow \boxed{V_F = -F\ell\sin\theta}$

$$\Rightarrow \left[V = \frac{1}{2}Mg\ell\sin\theta + \frac{1}{2}Mg\ell\sin\theta + Mg\ell\sin\theta + k\ell^2\cos\theta - F\ell\sin\theta = 2Mg\ell\sin\theta + k\ell^2\cos\theta - F\ell\sin\theta \right]$$

Q3. Scrivere l'equazione di moto del sistema.

Lagrangiana del sistema: $\boxed{\underset{L(q,\dot{q},t)}{L} = T - V = \frac{5}{6} Me^2 \dot{\theta}^2 - (2Mge\sin\theta + ke^2\cos\theta - Fe\sin\theta)}$

equazione di moto: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3} Me^2 \dot{\theta}\right) + 2Mge\cos\theta - ke^2\sin\theta - Fe\cos\theta = 0$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} \cancel{Me^2} \ddot{\theta} + \cancel{Me^2} \left(2\frac{g}{e}\cos\theta - \frac{k}{M}\sin\theta - \frac{F}{Me}\cos\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{3}{5}\left(\left(\frac{F}{Me} - 2\frac{g}{e}\right)\cos\theta - \frac{k}{M}\sin\theta\right)}$$

Q4. Determinare il valore F_0 di F perché il sistema abbia una configurazione di equilibrio stabile per $\theta = \theta_0 = \frac{3}{4}\pi$.

<u>teorema di statica lagrangiana</u>: in un sistema scleronomo sono di equilibrio tutte e sole le configurazioni $q_0 \in \mathring{\Omega}$: $Q(q_0) = \left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q=q_0} = 0$ i.e. $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q=q_0} = 0 \quad i = 1, \ldots, m$

<u>teorema di Lagrange Dirichlet</u>: Se V energia potenziale di un sistema scleronomo ha un minimo isolato in $q_0 \in \mathring{\Omega} \Rightarrow q_0$ è una configurazione di equilibrio stabile.

equazione di equilibrio: $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 2Mg\cancel{\ell}\cos\theta - k\ell^{\cancel{2}}\sin\theta - F\cancel{\ell}\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \boxed{(2Mg - F)\cos\theta = k\ell\sin\theta}$ ← le conf. di equilibrio corrispondono ai valori di θ che soddisfano queste equazione

poniamo $\theta_0 = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow (2Mg - F_0)\left(-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = k\ell\,\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow -2Mg + F_0 = k\ell \Rightarrow \boxed{F_0 = 2Mg + k\ell}$

Vediamo se è stabile:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} = -2Mg\ell\sin\theta - k\ell^2\cos\theta + F_0\ell\sin\theta\Big|_{\theta=\theta_0} = \cancel{-2Mg\ell}\frac{\sqrt{2}}{2} - k\ell^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (\cancel{2Mg\ell} + k\ell^2)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

con $F = F_0$

$$= +\frac{\sqrt{2}}{2}k\ell^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}k\ell^2 = \sqrt{2}k\ell^2 > 0 \Rightarrow$$ stabile per il teorema di Lagrange Dirichlet.

Q5. Per $F = F_0$ calcolare la pulsazione ω (frequenza angolare) delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile $\theta = \theta_0$.

q_0 conf. di equilibrio, $A(q_0)$ matrice energia cinetica in q_0, $B(q_0)$ matrice hessiana energia potenziale in q_0
λ_i autovalori relativi di $B(q_0)$ risp. ad $A(q_0)$.
Relazione tra modi normali e autovalori

modi oscillatori, confinati in corrispondenza di $\lambda_i > 0$

Sovrapposizioni di oscillazioni con frequenza angolare (pulsazione) propria: $\boxed{\omega_i := \sqrt{\lambda_i}}$

$$u_i(t) = u_i(0) \cos\sqrt{\lambda_i}\, t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \dot{u}_i(0) \sin\sqrt{\lambda_i}\, t$$

- modi iperbolici: $\lambda_i < 0$

$$u_i(t) = u_i(0) \cosh\sqrt{-\lambda_i}\, t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} \dot{u}_i(0) \sinh\sqrt{-\lambda_i}\, t$$

- modi lineari: $\lambda_i = 0$

$$u_i(t) = u_i(0) + \dot{u}_i(0)\, t$$

non confinati

Grazie al teorema di Silvester, dallo studio degli autovalori assoluti di $B(q_0)$, possiamo conoscere quanti e quali modi avrà il sistema

$\Rightarrow$ Se q_0 stabile $\Rightarrow$ $\forall i$ $\lambda_i > 0$ $\Rightarrow$ il moto generico è una sovrapposizione di modi oscillatori e tramite l'analisi modale conosceremo tutte le frequenze proprie del sistema.

Quando troviamo $\lambda_i \leq 0$ sapremo quali sono i modi possibili del sistema per instabilizzarsi.

$$A(q_0) = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2}\right|_{q=q_0} = \left.\frac{\partial^2}{\partial \dot{\theta}^2}\left(\frac{5}{6} M\ell^2 \dot{\theta}^2\right)\right|_{\theta=\theta_0=\frac{3}{4}\pi} = \left.\frac{5}{3} M\ell^2\right|_{\theta=\theta_0} = \frac{5}{3} M\ell^2$$

$$B(q_0) = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{q=q_0} = \sqrt{2} k \ell^2$$

$$B(q_0) - \lambda A(q_0) = 0 \Rightarrow \sqrt{2} k \cancel{\ell^2} - \lambda \frac{5}{3} M \cancel{\ell^2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3\sqrt{2}}{5}\frac{k}{M} > 0$$

$\Rightarrow$ modo oscillatorio con frequenza angolare $\boxed{\omega = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{k}{M}} \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{5}}}$

Q6. Scrivere l'energia totale E del sistema e dire se è una quantità conservata e perché.

Per un sistema scleronomo soggetto a forze attive conservative, nell'ipotesi di perfezione dei vincoli:

$\Rightarrow$ $E(q,\dot{q}) := T + V$ è un integrale primo del moto

costante lungo le soluzioni delle equazioni del moto.

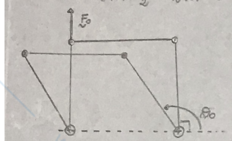
Lo vediamo: $E(\theta,\dot{\theta}) = \frac{5}{6} M e^2 \dot{\theta}^2 + k e^2 \cos\theta + (2Mg - F) e \sin\theta$

$$\dot{E} = \frac{5}{3} M e^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} - k e^2 \sin\theta\,\dot{\theta} + (2Mg - F) e \cos\theta\,\dot{\theta} = \dot{\theta}\Big[\underbrace{\tfrac{5}{3} M e^2 \ddot{\theta} - k e^2 \sin\theta + (2Mg - F) e \cos\theta}_{=0 \text{ (equazione del moto)}}\Big] = 0$$

oss: $\dot{E} = 0 \iff E$ integrale primo del moto

Q7. Per $F = F_0$, se all'istante iniziale $t = 0$ risulta $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ e $\dot\theta(0) = 0$, determinare il valore Ω della velocità angolare $\dot\theta$ quando, nell'evoluzione successiva, il sistema transita per la configurazione di equilibrio $\theta = \theta_0$.

$t=0 \quad \theta(0)=\frac{\pi}{2} \quad \dot\theta(0)=0 \quad \rightsquigarrow$ Il valore costante assunto da E lungo un particolare moto dipende da $(\theta(0), \dot\theta(0))$.



Sia $\bar t$ il tempo in cui il sistema transita per la configurazione $\theta(\bar t) = \theta_0 = \frac{3}{4}\pi$

con $\dot\theta(\bar t) = \Omega > 0 \quad (\theta(\bar t) > \theta(0))$

$$E\big|_{t=0} = E\big|_{t=\bar t} \qquad \text{dove} \qquad E\big|_{t=0} \underset{\theta(0)=\frac{\pi}{2},\ \dot\theta(0)=0,\ F=F_0}{=} 2Mg\ell - F_0\ell$$

$$E\big|_{t=\bar t} \underset{\theta(\bar t)=\frac{3}{4}\pi,\ \dot\theta(\bar t)=\Omega,\ F=F_0}{=} \frac{5}{6}M\ell^2\Omega^2 + (2Mg - F_0)\ell\left(\frac{\sqrt2}{2}\right) + k\ell^2\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{2Mg\ell} - \underbrace{F_0}_{2Mg+k\ell}\ell = \frac{5}{6}M\ell^2\Omega^2 + \cancel{\sqrt2 Mg\ell} - \frac{\sqrt2}{2}\underbrace{F_0}_{=2Mg+k\ell}\ell - \frac{\sqrt2}{2}k\ell^2$$

$$\Rightarrow -k\cancel{\ell^2} = \frac{5}{6}M\cancel{\ell^2}\Omega^2 - \sqrt2 k\cancel{\ell^2} \Rightarrow \frac{5}{6}M\Omega^2 = (\sqrt2 - 1)k \Rightarrow \Omega^2 = \frac{6}{5}(\sqrt2-1)\cdot\frac{k}{M}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \oplus\sqrt{\frac{6}{5}(\sqrt2-1)}\cdot\sqrt{\frac{k}{M}} > 0}$$

Q8. Con $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_y$, è possibile determinare F in modo tale che il sistema sia in equilibrio per $\theta = \frac{\pi}{2}$?

equazione di equilibrio: $(2Mg - F)\cos\theta = k\ell\sin\theta$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 = k\ell$ ma $k\ell \neq 0$

$\Rightarrow$ l'equilibrio è impossibile per $\underset{\sim}{F} = F\underset{\sim}{e}_y$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$

Q9. Con $\boldsymbol{F} = f(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$, determinare il valore f_0 di f per cui il sistema è in equilibrio per $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$\underset{\sim}{F} = f_0(\underset{\sim}{e}_x + \underset{\sim}{e}_y)$

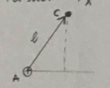
oss: $\underset{\sim}{F} = F_x \underset{\sim}{e}_x + F_y \underset{\sim}{e}_y + F_z \underset{\sim}{e}_z$ è conservativa quando $\exists\ V = V(x,y,z)$ energia potenziale:

$$\underset{\sim}{F} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\underset{\sim}{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\underset{\sim}{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\underset{\sim}{e}_z\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V = -\int F_x\,dx + \text{costante rispetto a } x \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow V = -\int F_y\,dy + \text{costante rispetto a } y \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow V = -\int F_z\,dz + \text{costante rispetto a } z \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = -\int F_x\,dx - \int F_y\,dy - \int F_z\,dz + \text{const} \quad \left(\begin{array}{c}V \text{ definita} \\ \text{a meno di} \\ \text{costanti}\end{array}\right)$$

Per noi $F_x = f_0$, $F_y = f_0$, $F_z = 0$ $\Rightarrow V = -f_0 x_c - f_0 y_c + \cancel{\text{const}}$



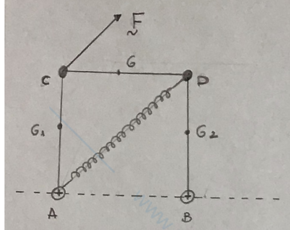
$x_c = \ell\cos\theta$
$y_c = \ell\sin\theta$ $\Rightarrow V_F = -f_0\ell\sin\theta - f_0\ell\cos\theta = -f_0\ell(\sin\theta + \cos\theta)$

$$V_{\text{sistema}} = 2Mg\ell\sin\theta + k\ell^2\cos\theta - f_0\ell(\sin\theta + \cos\theta)$$

$\Rightarrow$ nuova equazione di equilibrio: $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 2Mg\cancel{\ell}\cos\theta - k\ell^{\cancel{2}}\sin\theta - f_0\cancel{\ell}(\cos\theta - \sin\theta) = 0$

con $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -k\ell + f_0 = 0 \Rightarrow \boxed{f_0 = k\ell}$

Q10. Con $F = f_0(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$, determinare le reazioni vincolari opposte dalle cerniere fisse A e B nella configurazione di equilibrio con $\theta = \frac{\pi}{2}$.



cerniere in C e D mobili

cerniere in A e B fisse

forza concentrata: $\underset{\sim}{F} = f_0\, \underset{\sim}{e}_x + f_0\, \underset{\sim}{e}_y$ in C con $f_0 = k\ell$

$\underset{\sim}{\phi}_A = ?$ $\quad \underset{\sim}{\phi}_B = ?$

$$\underset{\sim}{F}^{\,esterne}_{sistema} = \underset{\sim}{0} \;:\; \overbrace{\underset{\sim}{\phi}_A + \underset{\sim}{\phi}_B + \underbrace{\underset{\sim}{F}}_{= f_0 e_x + f_0 e_y} + 3\, \underbrace{\underset{\sim}{F}_{peso\ aste}}_{= -mg\, e_y}}^{\underset{\sim}{F}^{\,esterne}} = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{\phi}_A + \underset{\sim}{\phi}_B + f_0\, \underset{\sim}{e}_x + f_0\, \underset{\sim}{e}_y - 3Mg\, \underset{\sim}{e}_y = 0}$$

$$\phi_{Ax}\, \underset{\sim}{e}_x + \phi_{Ay}\, \underset{\sim}{e}_y + \phi_{Bx}\, \underset{\sim}{e}_x + \phi_{By}\, \underset{\sim}{e}_y + f_0\, \underset{\sim}{e}_x + f_0\, \underset{\sim}{e}_y - 3Mg\, \underset{\sim}{e}_y = 0$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} \phi_{Ax} + \phi_{Bx} + f_0 = 0 \\ \phi_{Ay} + \phi_{By} + f_0 - 3Mg = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{M}{}^{\text{esterni}}_{B\ \text{sistema}} = \underset{\sim}{0} \qquad (\text{per individuare una componente di } \underset{\sim}{\phi}_A):$$

$$\underbrace{\underbrace{(A-B)}_{-\ell \underset{\sim}{e}_x} \times \underbrace{\underset{\sim}{\phi}_A}_{(\phi_{Ax}\underset{\sim}{e}_x+\phi_{Ay}\underset{\sim}{e}_y)}}_{-\ell\phi_{Ay}\underset{\sim}{e}_z} + \underbrace{\underbrace{(G_1-B)}_{=(-\ell\underset{\sim}{e}_x+\frac{\ell}{2}\underset{\sim}{e}_y)} \times \underbrace{\underset{\sim}{P}_{\text{asta AC}}}_{=-Mg\underset{\sim}{e}_y}}_{Mg\ell\,\underset{\sim}{e}_z} + \underbrace{\underbrace{(C-B)}_{-\ell\underset{\sim}{e}_x+\ell\underset{\sim}{e}_y} \times \underbrace{\underset{\sim}{F}}_{=f_o\underset{\sim}{e}_x+f_o\underset{\sim}{e}_y}}_{(-f_o\ell-f_o\ell)\underset{\sim}{e}_z} + \underbrace{\underbrace{(G-B)}_{-\frac{\ell}{2}\underset{\sim}{e}_x+\ell\underset{\sim}{e}_y} \times \underbrace{\underset{\sim}{P}_{\text{asta CD}}}_{=-Mg\underset{\sim}{e}_y}}_{=+\frac{1}{2}Mg\ell\,\underset{\sim}{e}_z} + \cancel{\underbrace{(G_2-B)}_{\frac{\ell}{2}\underset{\sim}{e}_y} \times \underbrace{\underset{\sim}{P}_{\text{asta BD}}}_{-Mg\underset{\sim}{e}_y}} = 0$$

$$\Rightarrow \ -\ell\phi_{Ay} + \frac{3}{2}Mg\ell - 2f_o\ell = 0 \ \Rightarrow\ \phi_{Ay} = \frac{3}{2}Mg - 2\underbrace{f_o}_{=k\ell} \ \Rightarrow\ \boxed{\phi_{Ay} = \frac{3}{2}Mg - 2k\ell}$$

ASTA BD

$$\underset{\sim}{M}{}^{\text{esterni}}_{D\ \text{asta BD}} = \underset{\sim}{0}\ :\ \underbrace{(B-D)}_{-\ell\underset{\sim}{e}_y} \times \underset{\sim}{\phi}_B + \cancel{\underbrace{(G_2-D)}_{=\frac{\ell}{2}\underset{\sim}{e}_y} \times \underbrace{\underset{\sim}{P}_{\text{eso asta BD}}}_{=-mg\underset{\sim}{e}_y}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow\ \ell\underset{\sim}{e}_y \times (\phi_{Bx}\underset{\sim}{e}_x + \phi_{By}\underset{\sim}{e}_y) = 0 \ \Rightarrow\ -\ell\phi_{Bx}\underset{\sim}{e}_z = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{\phi_{Bx} = 0}$$

Riprendiamo: (*)

$$\begin{cases} \phi_{Ax} + 0 + k\ell = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_{Ax} = -k\ell} \\ \frac{3}{2}Mg - 2k\ell + \phi_{By} + k\ell - 3Mg = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}Mg - k\ell + \phi_{By} = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_{By} = \frac{3}{2}Mg + k\ell} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{\phi}_A = -k\ell\, \underset{\sim}{e}_x + \left(\frac{3}{2}Mg - 2k\ell\right) \underset{\sim}{e}_y \qquad \underset{\sim}{\phi}_B = \left(\frac{3}{2}Mg + k\ell\right) \underset{\sim}{e}_y$$