

UNIVERSITÀ  
DI PAVIA

Corsi di Laurea in Ingegneria Edile Architettura

## Esame scritto di Meccanica Razionale [500153]

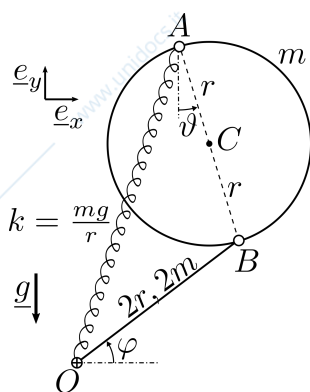
12 aprile 2023

COGNOME:

ESITO (in trentesimi):

NOME:

## Esercizio 1.



In un piano verticale, un'asta omogenea  $OB$  di massa  $2m$  e lunghezza  $2r$  è incernierata nel suo estremo fisso  $O$ , attorno al quale può ruotare liberamente. Un anello omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$  è incernierato in un suo punto all'estremo  $B$  dell'asta tramite una cerniera mobile, mentre il punto  $A$  diametralmente opposto a  $B$  è attratto verso  $O$  da una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k = \frac{mg}{r}$ . L'inclinazione dell'asta  $OB$  rispetto alla direzione orizzontale è indicata dalla variabile lagrangiana  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , mentre l'inclinazione del diametro  $AB$  dell'anello rispetto alla direzione verticale è indicata dalla variabile lagrangiana  $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ . L'accelerazione di gravità è  $\underline{g} = -g\underline{e}_y$ . Si trascurino tutti gli attriti.

Scrivere l'energia cinetica totale del sistema [3 punti].

$$T = mr^2 \left[ \frac{10}{3} \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin(\varphi - \vartheta) \right]$$

Scrivere l'energia potenziale totale del sistema [3 punti]; controllando che la sua matrice Hessiana sia  $B = mgr \begin{pmatrix} -4[\sin \varphi + \sin(\varphi - \vartheta)] & 4 \sin(\varphi - \vartheta) \\ 4 \sin(\varphi - \vartheta) & -[\cos \vartheta + 4 \sin(\varphi - \vartheta)] \end{pmatrix}$

$$V = mgr[4 \sin \varphi + \cos \vartheta + 4 \sin(\varphi - \vartheta)]$$

Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità [4 punti].

$$c_1 : \left( \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \vartheta_1 = 0 \right), \quad c_2 : \left( \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \vartheta_2 = \pi \right), \quad c_3 : \left( \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}, \vartheta_3 = 0 \right), \quad c_4 : \left( \varphi_4 = -\frac{\pi}{2}, \vartheta_4 = \pi \right)$$

$c_3$  stabile, le altre instabili

Determinare le frequenze  $\omega_1, \omega_2$  delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile [2 punti].

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{3}\sqrt{19}}{14}} \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{15 - \sqrt{3}\sqrt{19}}{14}} \sqrt{\frac{g}{r}}$$

Determinare le accelerazioni lagrangiane  $\ddot{\varphi}$  e  $\ddot{\vartheta}$  nel moto incipiente, quando il sistema parte in quiete dalla configurazione  $(\varphi^* = \frac{\pi}{6}, \vartheta^* = \frac{\pi}{3})$  [2 punti].

$$\ddot{\varphi} = -\frac{33}{74}\sqrt{3}\frac{g}{r}, \quad \ddot{\vartheta} = \frac{38}{37}\sqrt{3}\frac{g}{r}$$

Determinare la reazione vincolare  $\underline{\Phi}_O$  esercitata dalla cerniera e il momento esterno  $\underline{M}$  che si deve imporre al sistema affinché esso sia in equilibrio nella configurazione  $(\varphi^* = \frac{\pi}{6}, \vartheta^* = \frac{\pi}{3})$  [2 punti].

$$\underline{\Phi}_O = 3mg\mathbf{e}_y, \quad \underline{M} = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg r\mathbf{e}_z$$

**Esercizio 2.** Dati i due parametri reali  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , considerare il seguente sistema di vettori applicati

$$\begin{cases} v_1 = e_x + \alpha e_y + e_z & \text{applicato in } P_1 \equiv (0, 1, -2) \\ v_2 = 2e_x - e_y - 2e_z & \text{applicato in } P_2 \equiv (-2, 2, 1) \\ v_3 = 2e_x + \beta e_y - e_z & \text{applicato in } P_3 \equiv (1, 0, 2) \end{cases}$$

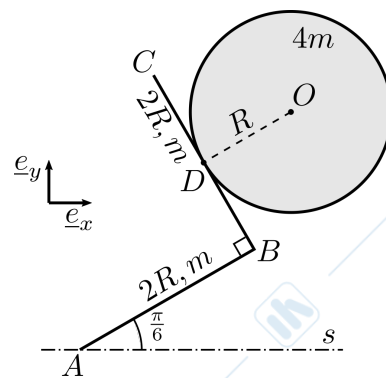
Determinare risultante [1 punto] e momento risultante rispetto a  $O \equiv (0, 0, 0)$  [2 punti] al variare di  $\alpha$  e  $\beta$ . Determinare la relazione che intercorre tra  $\alpha$  e  $\beta$  quando il trinomio invariante è nullo [2 punti].

$$\underline{R} = 5e_x + (\alpha + \beta - 1)e_y - 2e_z, \quad \underline{M}_O = 2(\alpha - \beta - 1)e_x + e_y + (\beta - 3)e_z, \quad \alpha = \beta + \frac{5}{11}$$

**Esercizio 3.**

Un corpo rigido è costituito da due aste rettangolari omogenee  $AB$  e  $BC$  entrambe di massa  $m$  e lunghezza  $2R$ , saldate perpendicolarmente tra loro nell'estremo comune  $B$ . L'asta  $AB$  è inclinata di  $\frac{\pi}{6}$  rispetto alla direzione orizzontale, come in figura. Nel punto medio  $D$  di  $BC$  è saldato, tangenzialmente all'asta, un disco omogeneo di massa  $4m$ , raggio  $R$  e centro  $O$ .

Sapendo che all'istante  $t = 0$  le velocità dei punti  $B$  e  $O$  sono, rispettivamente,  $\underline{v}_B = v_0(-\sqrt{3}e_x + 3e_y)$  e  $\underline{v}_O = v_0(3e_x + \sqrt{3}e_y)$  con  $v_0 > 0$ , determinare il vettore velocità angolare  $\underline{\omega}$  [1 punto] e la posizione  $K - A$  del centro di istantanea rotazione del sistema rispetto ad  $A$  [2 punti].



$$\underline{\omega} = -\frac{2\sqrt{3}v_0}{R}e_z, \quad K - A = 3Re_1 = \frac{3}{2}R(\sqrt{3}e_x + e_y)$$

Determinarne la posizione  $G - A$  rispetto al punto  $A$  del centro di massa  $G$  del sistema [2 punti].

$$G - A = \frac{5}{6}R(3e_1 + e_2) = \frac{5}{12}R[(3\sqrt{3} - 1)e_x + (3 + \sqrt{3})e_y]$$

Scrivere i tensori d'inerzia  $\underline{I}_A^{\text{disco}}$  [2 punti] e  $\underline{I}_A^{ABC}$  [3 punti] rispetto al punto  $A$  del disco e del sottosistema costituito dalle due aste, rispettivamente (indicare analiticamente la base utilizzata se diversa da quella data in figura).

$$\begin{aligned} \underline{I}_A^{\text{disco}} &= [5e_1 \otimes e_1 + 37e_2 \otimes e_2 - 12(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + 42e_z \otimes e_z]mR^2, \\ \underline{I}_A^{ABC} &= \left[ \frac{4}{3}e_1 \otimes e_1 + \frac{16}{3}e_2 \otimes e_2 - 2(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + \frac{20}{3}e_z \otimes e_z \right] mR^2 \\ \text{con } e_1 &:= \frac{1}{2}(\sqrt{3}e_x + e_y), \quad e_2 := \frac{1}{2}(-e_x + \sqrt{3}e_y) \end{aligned}$$

Determinare i momenti  $I_s^{\text{disco}}$  e  $I_s^{ABC}$  rispetto alla retta orizzontale  $s$  passante per  $A$  del disco e del sottosistema costituito dalle due aste, rispettivamente [2 punti ciascuno].

$$I_s^{\text{disco}} = (13 + 6\sqrt{3})mR^2, \quad I_s^{ABC} = \left( \frac{7}{3} + \sqrt{3} \right) mR^2$$

## SVOLGIMENTO

**Esercizio 1.** Come prima cosa scriviamo i vettori posizione (e le velocità) dei punti di interesse per il calcolo delle energie potenziale e cinetica:

$$B - O = 2r(\cos \varphi \underline{e}_x + \sin \varphi \underline{e}_y) \Rightarrow \underline{v}_B = 2r\dot{\varphi}(-\sin \varphi \underline{e}_x + \cos \varphi \underline{e}_y)$$

$$C - A = r(\sin \vartheta \underline{e}_x - \cos \vartheta \underline{e}_y)$$

$$C - O = (C - B) + (B - O) = -(C - A) + (B - O) = r[(2 \cos \varphi - \sin \vartheta) \underline{e}_x + (2 \sin \varphi + \cos \vartheta) \underline{e}_y]$$

$$\Rightarrow \underline{v}_C = r[-(2\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \vartheta) \underline{e}_x + (2\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \underline{e}_y]$$

$$\Rightarrow \underline{v}_C^2 = r^2[4\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 4\dot{\varphi}\dot{\vartheta}(\sin \varphi \cos \vartheta - \cos \varphi \sin \vartheta)] = r^2[4\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 4\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin(\varphi - \vartheta)]$$

$$A - O = (A - B) + (B - O) = -2(C - A) + (B - O) = 2r[(\cos \varphi - \sin \vartheta) \underline{e}_x + (\sin \varphi + \cos \vartheta) \underline{e}_y]$$

$$\Rightarrow \|A - O\|^2 = 4r^2(2 - 2 \cos \varphi \sin \vartheta + 2 \sin \varphi \cos \vartheta) = 8r^2[1 + \sin(\varphi - \vartheta)].$$

*Energia cinetica.* Le velocità angolari di lamina e anello sono  $\underline{\omega}^{OB} = \dot{\varphi} \underline{e}_z$  e  $\underline{\omega}^{\text{anello}} = \dot{\vartheta} \underline{e}_z$  ed entrambe si possono ricavare dalla prima formula della cinematica rigida:

$$2r\dot{\varphi}(-\sin \varphi \underline{e}_x + \cos \varphi \underline{e}_y) = \underline{v}_B - \underline{O} = \underline{\omega}^{OB} \wedge (B - O) = \omega^{OB} \underline{e}_z \wedge 2r(\cos \varphi \underline{e}_x + \sin \varphi \underline{e}_y)$$

$$\Rightarrow \omega^{OB} = \dot{\varphi} \Rightarrow \underline{\omega}^{OB} = \dot{\varphi} \underline{e}_z$$

$$r\dot{\vartheta}(\cos \vartheta \underline{e}_x + \sin \vartheta \underline{e}_y) = \underline{v}_C - \underline{v}_A = \underline{\omega}^{\text{anello}} \wedge (C - A) = \omega^{\text{anello}} \underline{e}_z \wedge r(\sin \vartheta \underline{e}_x - \cos \vartheta \underline{e}_y)$$

$$\Rightarrow \omega^{\text{anello}} = \dot{\vartheta} \Rightarrow \underline{\omega}^{\text{anello}} = \dot{\vartheta} \underline{e}_z$$

Scegliendo il punto fisso  $O$  come punto di riferimento nella formula dell'energia cinetica dell'asta e il centro di massa  $C$  per in disco e ricordando i valori dei momenti d'inerzia  $I_{O,zz}^{OB} = \frac{1}{3}2m(2r)^2 = \frac{8}{3}mr^2$  e  $I_{C,zz}^{\text{anello}} = mr^2$ :

$$\begin{aligned} T &= T^{OB} + T^{\text{anello}} = \frac{1}{2}I_{O,zz}^{OB}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}_C^2 + \frac{1}{2}I_{C,zz}^{\text{anello}}\dot{\vartheta}^2 \\ &= \frac{4}{3}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mr^2[4\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 4\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin(\varphi - \vartheta)] + \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2 \\ &= mr^2 \left[ \frac{10}{3}\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin(\varphi - \vartheta) \right]. \end{aligned}$$

*Energia potenziale.* Scegliendo la quota del punto  $O$  come livello ad energia potenziale gravitazionale nulla ed eliminando le costanti:

$$\begin{aligned} V &= V_g^{OB} + V_g^{\text{anello}} + V_k^{AO} = \frac{1}{2}2mgy_B + mgy_C + \frac{1}{2}k\|A - O\|^2 \\ &= 2mgr \sin \varphi + mgr(2 \sin \varphi + \cos \vartheta) + 4mgr \sin(\varphi - \vartheta) = mgr[4 \sin \varphi + \cos \vartheta + 4 \sin(\varphi - \vartheta)]. \end{aligned}$$

Controlliamo che l'energia potenziale trovata abbia l'Hessiana suggerita nel testo:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgr[4 \cos \varphi + 4 \cos(\varphi - \vartheta)] = mgr[4 \cos \varphi + 4 \cos(\varphi - \vartheta)]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -mgr[\sin \vartheta + 4 \cos(\varphi - \vartheta)] = mgr[-\sin \vartheta + 4 \cos(\varphi - \vartheta)]$$

e

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -mgr[4 \sin \varphi + 4 \sin(\varphi - \vartheta)]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \vartheta} = 4mgr \sin(\varphi - \vartheta)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = -mgr[\cos \vartheta + 4 \sin(\varphi - \vartheta)],$$

da cui

$$B = mgr \begin{pmatrix} -4[\sin \varphi + \sin(\varphi - \vartheta)] & 4 \sin(\varphi - \vartheta) \\ 4 \sin(\varphi - \vartheta) & -[\cos \vartheta + 4 \sin(\varphi - \vartheta)] \end{pmatrix}.$$

*Configurazione di equilibrio.* Analizzando il disegno e la fisica del problema, si possono immediatamente riconoscere le quattro configurazioni di equilibrio in cui l'asta  $OB$  e il diametro  $AB$  sono entrambi verticali

$$c_1 : \left( \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \vartheta_1 = 0 \right), \quad c_2 : \left( \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \vartheta_2 = \pi \right), \quad c_3 : \left( \varphi_3 = -\frac{\pi}{2}, \vartheta_3 = 0 \right), \quad c_4 : \left( \varphi_4 = -\frac{\pi}{2}, \vartheta_4 = \pi \right).$$

e poi determinarne la stabilità grazie alla matrice Hessiana appena calcolata:

$$\begin{aligned} B_1 = mgr \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} \det B_1 = 24 \\ \text{tr } B_1 = -13 \end{cases} \Rightarrow \text{autovalori negativi} \Rightarrow c_1 \text{ instabile,} \\ B_2 = mgr \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} \det B_2 = -16 \\ \text{tr } B_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{autovalori discordi} \Rightarrow c_2 \text{ instabile,} \\ B_3 = mgr \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} \det B_3 = 8 \\ \text{tr } B_3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \text{autovalori positivi} \Rightarrow c_3 \text{ stabile,} \\ B_4 = mgr \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} \det B_4 = -16 \\ \text{tr } B_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{autovalori discordi} \Rightarrow c_4 \text{ instabile.} \end{aligned}$$

Per stabilire se ci siano o meno altre configurazioni di equilibrio procediamo imponendo pari a 0 le derivate prime di  $V$  rispetto alle coordinate lagrangiane:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4 \cos \varphi + 4 \cos(\varphi - \vartheta) = 0 \\ \sin \vartheta + 4 \cos(\varphi - \vartheta) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi + \cos(\varphi - \vartheta) = \cos \varphi + \cos \varphi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta = 0 \\ \sin \vartheta = 4 \cos \varphi \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi (1 + \cos \vartheta + 4 \sin \varphi) = 0 \\ \sin \vartheta = 4 \cos \varphi \end{cases} \end{aligned}$$

La prima equazione è verificata quando  $\cos \varphi = 0$  oppure quando  $1 + \cos \vartheta + 4 \sin \varphi = 0$ . Nel primo caso, la seconda equazione assicura che anche  $\sin \vartheta = 0$  e quindi si ottengono le quattro configurazioni già intuite  $c_1, c_2, c_3, c_4$ .

Nel secondo caso, utilizziamo anche la formula fondamentale della trigonometria:

$$\begin{cases} -\cos \vartheta = 1 + 4 \sin \varphi \\ \sin \vartheta = 4 \cos \varphi \\ \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 4 \sin \varphi)^2 + (4 \cos \varphi)^2 = 1 \Rightarrow 8 \sin \varphi = 16 \Rightarrow \sin \varphi = 2 \quad \nexists \varphi$$

Non ci sono quindi ulteriori configurazioni di equilibrio.

*Modi normali.* Per determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione  $c_3$ , abbiamo bisogno della matrice associata all'energia cinetica:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\vartheta}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{\vartheta}} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vartheta}^2} \end{pmatrix} = mr^2 \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & 2 \sin(\varphi - \vartheta) \\ 2 \sin(\varphi - \vartheta) & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_3 = mr^2 \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned} \det(B_3 - \lambda A_3) = 0 &\Rightarrow \left(8mgr - \frac{20}{3}\lambda mr^2\right) (3mgr - 2\lambda mr^2) - (2\lambda mr^2 - 4mgr)^2 = 0 \\ &\Rightarrow \left(2\frac{g}{r} - \frac{5}{3}\lambda\right) \left(3\frac{g}{r} - 2\lambda\right) - \left(\lambda - 2\frac{g}{r}\right)^2 = \frac{10}{3}\lambda^2 - 9\frac{g}{r}\lambda + 6\frac{g^2}{r^2} - \lambda^2 + 4\frac{g}{r}\lambda - 4\frac{g^2}{r^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{7}{3}\lambda^2 - 5\frac{g}{r}\lambda + 2\frac{g^2}{r^2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - \frac{56}{3}}}{\frac{14}{3}} \frac{g}{r} = \frac{15 \pm \sqrt{3}\sqrt{19}}{14} \frac{g}{r} \\ &\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{3}\sqrt{19}}{14}} \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{15 - \sqrt{3}\sqrt{19}}{14}} \sqrt{\frac{g}{r}}. \end{aligned}$$

Accelerazioni incipienti. Scriviamo la Lagrangiana del sistema

$$L = T - V = mr^2 \left[ \frac{10}{3}\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \sin(\varphi - \vartheta) \right] - mgr[4 \sin \varphi + \cos \vartheta + 4 \sin(\varphi - \vartheta)]$$

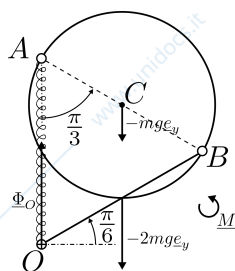
e le equazioni di moto, eliminando già i termini in  $\dot{\varphi}$  e  $\dot{\vartheta}$  (che sono nulli, dato che il sistema parte in quiete):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mr^2 \left[ \frac{20}{3}\ddot{\varphi} + 2\ddot{\vartheta} \sin(\varphi - \vartheta) \right] = -mgr[4 \cos \varphi + 4 \cos(\varphi - \vartheta)] \\ mr^2 \left[ 2\ddot{\vartheta} + 2\ddot{\varphi} \sin(\varphi - \vartheta) \right] = mgr[\sin \vartheta + 4 \cos(\varphi - \vartheta)] \end{cases}$$

e sostituiamo i valori  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  e  $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ , ottenendo

$$\begin{cases} \frac{20}{3}\ddot{\varphi} - \ddot{\vartheta} = -4\sqrt{3}\frac{g}{r} \\ 2\ddot{\vartheta} - \ddot{\varphi} = \frac{5}{2}\sqrt{3}\frac{g}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{3}\ddot{\varphi} = \ddot{\vartheta} - 4\sqrt{3}\frac{g}{r} \\ \ddot{\vartheta} = \frac{1}{2}\ddot{\varphi} + \frac{5}{4}\sqrt{3}\frac{g}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\varphi} = -\frac{33}{74}\sqrt{3}\frac{g}{r} \\ \ddot{\vartheta} = \frac{38}{37}\sqrt{3}\frac{g}{r} \end{cases}$$

Reazione vincolare e momento esterno.



Nella configurazione ( $\varphi^* = \frac{\pi}{6}$ ,  $\vartheta^* = \frac{\pi}{3}$ ) il sistema assume la posizione illustrata a sinistra. Dall'equazione di equilibrio delle forze:

$$\Phi_O = -(-mge_y - 2mge_y) = 3mge_y,$$

mentre da quella per i momenti (calcolati in O):

$$\begin{aligned} \underline{M} = -\underline{M}_O &= - \left[ (C - O) \wedge (-mge_y) + \frac{1}{2}(B - O) \wedge (-2mge_y) \right] \\ &= r \left[ \left( 2 \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \right) e_x + \left( 2 \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} \right) e_y \right] \wedge mge_y + \frac{1}{2} 2r \left( \cos \frac{\pi}{6} e_x + \sin \frac{\pi}{6} e_y \right) \wedge 2mge_y \\ &= \left( 4 \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \right) mgr e_z = \frac{3\sqrt{3}}{2} mgr e_z. \end{aligned}$$

**Esercizio 2.**

*Risultante.*  $\underline{R} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = 5\underline{e}_x + (\alpha + \beta - 1)\underline{e}_y - 2\underline{e}_z.$

*Momento risultante rispetto a O.*

$$\begin{aligned}\underline{M}_O &= (P_1 - O) \wedge \underline{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \underline{v}_2 + (P_3 - O) \wedge \underline{v}_3 \\ &= -\underline{e}_z + \underline{e}_x - 2\underline{e}_y + 2\alpha\underline{e}_x + 2\underline{e}_z - 4\underline{e}_y - 4\underline{e}_z - 4\underline{e}_x + 2\underline{e}_y + \underline{e}_x + \beta\underline{e}_z + \underline{e}_y + 4\underline{e}_y - 2\beta\underline{e}_x \\ &= 2(\alpha - \beta - 1)\underline{e}_x + \underline{e}_y + (\beta - 3)\underline{e}_z.\end{aligned}$$

*Trinomio invariante.*

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = \underline{R} \cdot \underline{M}_O &= 10(\alpha - \beta - 1) + (\alpha + \beta - 1) - 2(\beta - 3) = 11\alpha - 11\beta - 5 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = \beta + \frac{5}{11}.\end{aligned}$$

**Esercizio 3.**

*Cinematica.* Indicando con  $\underline{\omega} = \omega\underline{e}_z$  la velocità angolare del sistema, utilizzando i versori

$$\underline{e}_1 := \frac{1}{2}(\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y), \quad \underline{e}_2 := \frac{1}{2}(-\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y)$$

e applicando la prima formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\begin{aligned}2\sqrt{3}v_0(\underline{e}_2 - \underline{e}_1) = \underline{v}_B - \underline{v}_O &= \omega\underline{e}_z \wedge [(B - D) + (D - O)] = \omega\underline{e}_z \wedge [-R(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)] = -\omega R(\underline{e}_2 - \underline{e}_1) \\ &\Rightarrow \omega = -\frac{2\sqrt{3}v_0}{R} \Rightarrow \underline{\omega} = -\frac{2\sqrt{3}v_0}{R}\underline{e}_z,\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}2\sqrt{3}v_0\underline{e}_2 = \underline{B} &= \underline{\omega} \wedge (B - K) = -\frac{2\sqrt{3}v_0}{R}\underline{e}_z \wedge (k_1\underline{e}_1 + k_2\underline{e}_2) = -\frac{2\sqrt{3}v_0}{R}(k_2\underline{e}_1 - k_1\underline{e}_2) \\ \Rightarrow k_1 = R, k_2 = 0 &\Rightarrow K - B = R\underline{e}_1 \Rightarrow K - A = (K - B) + (B - A) = 3R\underline{e}_1 = \frac{3}{2}R(\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y).\end{aligned}$$

*Centro di massa.*

$$\begin{aligned}G - A &= \frac{m(D - A) + \frac{1}{2}m(B - A) + 4m(O - A)}{6m} = R\frac{2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_1 + 4(3\underline{e}_1 + \underline{e}_2)}{6} \\ &= \frac{5}{6}R(3\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \frac{5}{12}R[(3\sqrt{3} - 1)\underline{e}_x + (3 + \sqrt{3})\underline{e}_y].\end{aligned}$$

*Tensori d'inerzia.* Utilizzando la base principale  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_z)$  e applicando il Teorema di Huygens-Steiner:

$$\begin{aligned}\underline{I}_A^{\text{disco}} &= \underline{I}_O^{\text{disco}} + 4m [\|O - A\|^2 \underline{1} - (O - A) \otimes (O - A)] \\ &= mR^2(\underline{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 4mR^2 [10\underline{1} - (3\underline{e}_1 + \underline{e}_2) \otimes (3\underline{e}_1 + \underline{e}_2)] \\ &= [5\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 37\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - 12(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + 42\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z]mR^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\underline{I}_A^{ABC} &= \underline{I}_A^{AB} + \underline{I}_A^{BC} = \underline{I}_A^{AB} + \underline{I}_D^{BC} + m [\|D - A\|^2 \underline{1} - (D - A) \otimes (D - A)] \\ &= \frac{4}{3}mR^2(\underline{1} - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) + \frac{1}{3}mR^2(\underline{1} - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + mR^2 [5\underline{1} - (2\underline{e}_1 + \underline{e}_2) \otimes (2\underline{e}_1 + \underline{e}_2)] \\ &= \left[ \frac{4}{3}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{16}{3}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - 2(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + \frac{20}{3}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right] mR^2.\end{aligned}$$

Momenti.

$$\begin{aligned} I_s^{\text{disco}} &= \underline{e}_x \cdot I_A^{\text{disco}} \underline{e}_x = [5(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_1)^2 + 37(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_2)^2 - 24(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_1)(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_2)] mR^2 \\ &= \left( 5\frac{3}{4} + 37\frac{1}{4} + 24\frac{\sqrt{3}}{4} \right) mR^2 = (13 + 6\sqrt{3})mR^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_s^{ABC} &= \underline{e}_x \cdot I_A^{ABC} \underline{e}_x = \left[ \frac{4}{3}(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_1)^2 + \frac{16}{3}(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_2)^2 - 4(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_1)(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_2) \right] mR^2 \\ &= \left( \frac{43}{34} + \frac{161}{34} + 4\frac{\sqrt{3}}{4} \right) mR^2 = \left( \frac{7}{3} + \sqrt{3} \right) mR^2. \end{aligned}$$