UNIVERSITÀ DI PAVIA

Corsi di Laurea in Ingegneria Edile Architettura

Esame scritto di Meccanica Razionale [500153]

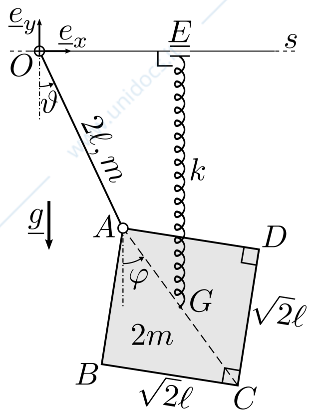
28 febbraio 2023

COGNOME:

ESITO (in trentesimi)**:**

NOME:

Esercizio 1.



In un piano verticale, un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ è incernierata nel suo estremo fisso O, mentre all'estremo opposto A è incernierato un vertice di una lamina rettangolare omogenea $ABCD$ di massa $2m$ e lato $\sqrt{2}\ell$. Una molla ideale di lunghezza a riposo nulla, costante elastica k e costretta a matenersi verticale (parallela a $\underline{e}_y$) attrae il centro di massa G della lamina ad un punto E, libero di muoversi lungo la guida orizzontale s passante per O. L'inclinazione dell'asta AB rispetto alla direzione verticale è indicata dalla variabile lagrangiana $\vartheta \in (-\pi, \pi]$, mentre l'inclinazione della diagonale AC della lamina rispetto alla direzione verticale è indicata dalla variabile lagrangiana $\varphi \in (-\pi, \pi]$. L'accelerazione di gravità è $\underline{g} = -g\underline{e}_y$. Trascurare tutti gli attriti.

Scrivere l'energia cinetica totale del sistema [**3 punti**].

$$T = m\ell^2 \left[\frac{14}{3}\dot\vartheta^2 + \frac{4}{3}\dot\varphi^2 + 4\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi)\right]$$

Scrivere l'energia potenziale totale del sistema [**4 punti**]; controllando che la sua matrice Hessiana sia

$$B = \ell \begin{pmatrix} 4k\ell(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta) + (5mg - 2k\ell\cos\varphi)\cos\vartheta & 2k\ell\sin\vartheta\sin\varphi \\ 2k\ell\sin\vartheta\sin\varphi & k\ell(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) + 2(mg - k\ell\cos\vartheta)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2}k\ell^2(2\cos\vartheta + \cos\varphi)^2 - mg\ell(5\cos\vartheta + 2\cos\varphi)$$

Stabilire per quali valori di k esistono configurazioni di equilibrio in cui $\sin\vartheta = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ [**2 punti**].

$$k = \frac{mg}{\ell}$$

Per uno dei k della risposta precedente e nella configurazione $(\vartheta_* = 0, \varphi_* = \frac{\pi}{2})$, determinare la reazione vincolare $\underline{\Phi}_O$ esercitata dalla cerniera in O [**2 punti**] e il momento toale $\underline{M}_A$ cui è soggetto il punto A [**1 punto**].

$$\underline{\Phi}_O = mg\underline{e}_y, \qquad \underline{M}_A = \underline{0}$$

Per $4mg = 5k\ell$ determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità [**3 punti**].

$$c_1 : (\vartheta_1 = 0, \varphi_1 = 0)\,,\ c_2 : (\vartheta_2 = 0, \varphi_2 = \pi)\,,\ c_3 : (\vartheta_3 = \pi, \varphi_3 = 0)\,,\ c_4 : (\vartheta_4 = \pi, \varphi_4 = \pi)$$

$$c_5 : \left(\vartheta_5 = 0, \varphi_5 = \frac{\pi}{3}\right),\ c_6 : \left(\vartheta_6 = 0, \varphi_6 = -\frac{\pi}{3}\right) \qquad c_5, c_6 \text{ sono le uniche stabili}$$

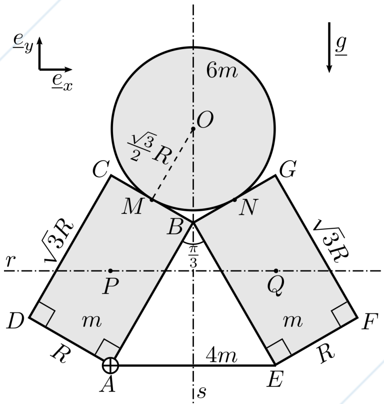
Esercizio 2. Per il seguente sistema di vettori applicati

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = -3\underline{e}_y + 2\underline{e}_z & \text{applicato in } P_1 \equiv (1,-2,-1) \\ \underline{v}_2 = \underline{e}_x + 2\underline{e}_y - 4\underline{e}_z & \text{applicato in } P_2 \equiv (0,-2,1) \\ \underline{v}_3 = -2\underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z & \text{applicato in } P_3 \equiv (-1,1,0) \end{cases}$$

determinare risultante [**1 punto**], momento risultante rispetto a $O \equiv (0,0,0)$ [**2 punti**] e trinomio invariante [**1 punto**]. Scrivere poi un sistema Σ' equivalente a quello dato e costituito dal minor numero possibile di vettori applicati [**1 punto**].

$$\underline{R} = -\underline{e}_x - \underline{e}_z, \qquad \underline{M}_O = \underline{0}, \qquad \mathcal{I} = 0, \qquad \Sigma' = \{(O, -\underline{e}_x - \underline{e}_z)\}$$

Esercizio 3.



Un corpo rigido è costituito da due lamine rettangolari omogenee $ABCD$ e $BEFG$ entrambe di massa m e di lati $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{BE} = \overline{FG} = \sqrt{3}R$ e $\overline{BC} = \overline{DA} = \overline{EF} = \overline{GB} = R$, saldate nel vertice B in comune e con i lati AB e BE inclinati tra loro di un angolo di $\frac{\pi}{3}$, come nella figura a destra. Agli estremi A ed E è saldata un'asta omogenea (orizzontale) di massa $4m$. Un disco omogeneo di massa $6m$, raggio $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ e centro O posto sulla verticale per B è inoltre saldato nei suoi due punti di tangenza M ed N ai punti medi di BC e GB rispettivamente.

Sapendo che all'istante $t = 0$ il centro di istantanea rotazione del sistema è il punto A e che la velocità del punto B è $\underline{v}_B = v_0(\sqrt{3}\underline{e}_x - \underline{e}_y)$ con $v_0 > 0$, determinare il vettore velocità angolare $\underline{\omega}$ del corpo rigido [**1 punto**] e la velocità del punto E [**2 punti**].

$$\underline{\omega} = -\frac{2v_0}{\sqrt{3}R}\underline{e}_z \qquad \underline{v}_E = -2v_0\underline{e}_y$$

Chiamato L il centro di massa del sottotistema costituito dalle sole due lamine rettangolari, determinarne la posizione $L - A$ rispetto al punto A [**1 punto**]. Determinare poi i momenti d'inerzia I_r^{ABCD} [**1 punto**] e I_s^{ABCD} [**1 punto**] della lamina $ABCD$ rispetto alla retta orizzontale r passante per i centri di massa P e Q dei due rettangoli e alla retta verticale s passante per B e O.

$$L - A = \frac{\sqrt{3}}{2}R\underline{e}_x + R\underline{e}_y, \qquad I_r^{ABCD} = \frac{5}{24}mR^2, \qquad I_s^{ABCD} = \frac{7}{8}mR^2$$

Scrivere i tensori d'inerzia $\underline{\underline{I}}_A^{AE}$ [**1 punto**], $\underline{\underline{I}}_A^{\text{disco}}$ [**2 punti**] e $\underline{\underline{I}}_A^{\text{lamine}}$ [**1 punto**] rispetto al punto A del dell'asta AE, del disco e del sottosistema costituito dalle due lamine rispettivamente, utilizzando la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$.

$$\underline{\underline{I}}_A^{AE} = 4mR^2\left(\mathbb{1} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x\right)$$

$$\underline{\underline{I}}_A^{\text{disco}} = mR^2\left[\frac{309}{8}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{45}{8}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \frac{15\sqrt{3}}{2}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \frac{177}{4}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right]$$

$$\underline{\underline{I}}_A^{\text{lamine}} = mR^2\left[\frac{29}{12}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{13}{4}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \sqrt{3}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \frac{17}{3}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right]$$

Supponendo che il sistema si trovi in un piano verticale con accelerazione di gravità $\underline{g} = -g\underline{e}_y$ e che sia incernierato ad una cerniera fissa in A attorno a cui è libero di ruotare senza attrito, determinare il momento esterno $\underline{M}$ [**1 punto**] che deve essere impresso ad esso affinchè la configurazioni descritta in figura sia di equilibrio e la reazione vincolare $\underline{\Phi}_A$ fornita dalla cerniera in questo caso [**1 punto**].

$$\underline{M} = 6\sqrt{3}mgR\underline{e}_z, \qquad \underline{\Phi}_A = 12mg\underline{e}_y$$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Come prima cosa scriviamo i vettori posizione (e le velocità) dei punti di interesse per il calcolo delle energie potenziale e cinetica, indicando con F il centro di massa dell'asta OA:

$$
\begin{aligned}
&A - O = 2\ell(\sin\vartheta \underline{e}_x - \cos\vartheta \underline{e}_y)\\
&F - O = \frac{1}{2}(A - O) = \ell(\sin\vartheta \underline{e}_x - \cos\vartheta \underline{e}_y)\\
&G - A = \ell(\sin\varphi \underline{e}_x - \cos\varphi \underline{e}_y)\\
&G - O = (G - A) + (A - O) = \ell[(2\sin\vartheta + \sin\varphi)\underline{e}_x - (2\cos\vartheta + \cos\varphi)\underline{e}_y]\\
&\qquad \Rightarrow \quad \underline{v}_G = \ell[(2\dot\vartheta\cos\vartheta + \dot\varphi\cos\varphi)\underline{e}_x + (2\dot\vartheta\sin\vartheta + \dot\varphi\sin\varphi)\underline{e}_y]\\
&\qquad \Rightarrow \quad \underline{v}_G^2 = \ell^2[4\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 + 4\dot\vartheta\dot\varphi(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi)] = \ell^2[4\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 + 4\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi)],\\
&G - E = -\ell(2\cos\vartheta + \cos\varphi)\underline{e}_y \quad \Rightarrow \quad \|G - E\|^2 = \ell^2(2\cos\vartheta + \cos\varphi)^2.
\end{aligned}
$$

Energia cinetica. Scegliendo il punto fisso O come punto di riferimento nella formula dell'energia cinetica dell'asta e il centro di massa G per la lamina, riconoscendo che le velocità angolari sono $\underline{\omega}^{OA} = \dot\vartheta\underline{e}_z$ e $\underline{\omega}^{ABCD} = \dot\varphi\underline{e}_z$ e ricordando i valori dei momenti d'inerzia $I_{O,zz}^{OA} = \frac{1}{3}m(2\ell)^2 = \frac{4}{3}m\ell^2$ e $I_{G,zz}^{ABCD} = \frac{1}{6}2m(\sqrt{2}\ell)^2 = \frac{2}{3}m\ell^2$:

$$
\begin{aligned}
T = T^{OA} + T^{ABCD} &= \frac{1}{2}I_{O,zz}^{OA}\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}2m\underline{v}_G^2 + \frac{1}{2}I_{G,zz}^{ABCD}\dot\varphi^2\\
&= \frac{2}{3}m\ell^2\dot\vartheta^2 + m\ell^2[4\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 + 4\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi)] + \frac{1}{3}m\ell^2\dot\varphi^2\\
&= m\ell^2\left[\frac{14}{3}\dot\vartheta^2 + \frac{4}{3}\dot\varphi^2 + 4\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi)\right].
\end{aligned}
$$

Energia potenziale. Scegliendo la quota del punto O come livello ad energia potenziale gravitazionale nulla:

$$
\begin{aligned}
V = V_g^{OA} + V_g^{ABCD} + V_k^{EC} &= mgy_F + 2mgy_G + \frac{1}{2}k\|G - E\|^2\\
&= -mg\ell\cos\vartheta - 2mg\ell(2\cos\vartheta + \cos\varphi) + \frac{1}{2}k\ell^2(2\cos\vartheta + \cos\varphi)^2\\
&= \frac{1}{2}k\ell^2(2\cos\vartheta + \cos\varphi)^2 - mg\ell(5\cos\vartheta + 2\cos\varphi).
\end{aligned}
$$

Configurazione di equilibrio. Calcoliamo le derivate prime di V rispetto alle coordinate lagrangiane e imponiamole pari a 0:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial \vartheta} = \ell[-2k\ell(2\cos\vartheta + \cos\varphi) + 5mg]\sin\vartheta = 0\\
\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = \ell[-k\ell(2\cos\vartheta + \cos\varphi) + 2mg]\sin\varphi = 0
\end{cases}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{cases}
\sin\vartheta = 0 \text{ oppure } 2\cos\vartheta + \cos\varphi = \dfrac{5}{2}\dfrac{mg}{k\ell}\\
\sin\varphi = 0 \text{ oppure } 2\cos\vartheta + \cos\varphi = 2\dfrac{mg}{k\ell},
\end{cases}
$$

Sostituendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\sin\vartheta = 0$, otteniamo $0 = 0$ dalla prima equazione e $\pm 1 = \cos\vartheta = \frac{mg}{k\ell}$ dalla seconda. Poiché tutte le costanti sono non negative, il caso $\vartheta = \pi$ con $\cos\vartheta = -1$ non è mai verificato; l'unica possibilità è quindi $\vartheta = 0$ e $\frac{mg}{k\ell} = 1$, da cui $k = \frac{mg}{\ell}$.
Per trovare le configurazione di equilibrio nel caso $k\ell = mg$ possiamo sostituire tale valore nel sistema precedente e poi procedere alla risoluzione dello stesso. Come esercizio, però, è utile spendere un po' più di tempo per determinare le configurazioni di equilibrio al variare di k e poi sostituire il valore richiesto alla fine. Dal sistema nella versione generale, discendono le tre possibilità

$$
\begin{cases}
\sin\vartheta = 0\\
\sin\varphi = 0,
\end{cases}
\quad \text{oppure} \quad
\begin{cases}
\sin\vartheta = 0\\
2\cos\vartheta + \cos\varphi = 2\dfrac{mg}{k\ell},
\end{cases}
\quad \text{oppure} \quad
\begin{cases}
2\cos\vartheta + \cos\varphi = \dfrac{5}{2}\dfrac{mg}{k\ell}\\
\sin\varphi = 0,
\end{cases}
$$

Il primo caso produce le configurazioni (che esistono sempre)

$$c_1 : (\vartheta_1 = 0, \varphi_1 = 0)\,,\ c_2 : (\vartheta_2 = 0, \varphi_2 = \pi)\,,\ c_3 : (\vartheta_3 = \pi, \varphi_3 = 0)\,,\ c_4 : (\vartheta_4 = \pi, \varphi_4 = \pi)\,.$$

Nel secondo caso:

$$\begin{aligned}
&\vartheta = 0 \quad \text{e} \quad \cos\varphi = 2\frac{mg}{k\ell} - 2 = 2\left(\frac{mg}{k\ell} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\arccos\left[2\left(\frac{mg}{k\ell} - 1\right)\right]\\
&\qquad \text{con } -1 < 2\left(\frac{mg}{k\ell} - 1\right) < 1, \text{ cioè } k\ell < 2mg < 3k\ell\\
&\vartheta = \pi \quad \text{e} \quad \cos\varphi = 2\frac{mg}{k\ell} + 2 > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{impossibile,}
\end{aligned}$$

da cui

$$c_5 : \left(\vartheta_5 = 0, \varphi_5 = \arccos\left[2\left(\frac{mg}{k\ell} - 1\right)\right]\right),\ c_6 : \left(\vartheta_6 = 0, \varphi_6 = -\arccos\left[2\left(\frac{mg}{k\ell} - 1\right)\right]\right),$$
$$\text{per } k\ell < 2mg < 3k\ell.$$

Nell'ultimo caso:

$$\begin{aligned}
&\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \cos\vartheta = \frac{5}{4}\frac{mg}{k\ell} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \pm\arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\frac{mg}{k\ell} - 1\right)\right]\\
&\qquad \text{con } -1 < \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\frac{mg}{k\ell} - 1\right) < 1, \text{ cioè } -2k\ell < 5mg < 6k\ell,\\
&\varphi = \pi \quad \text{e} \quad \cos\vartheta = \frac{5}{4}\frac{mg}{k\ell} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \pm\arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\frac{mg}{k\ell} + 1\right)\right]\\
&\qquad \text{con } -1 < \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\frac{mg}{k\ell} + 1\right) < 1, \text{ cioè } -6k\ell < 5mg < 2k\ell,
\end{aligned}$$

da cui le ulteriori configurazioni

$$c_7 : \left(\vartheta_7 = \arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\frac{mg}{k\ell} - 1\right)\right], \varphi_7 = 0\right),\ c_8 : \left(\vartheta_8 = -\arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\frac{mg}{k\ell} - 1\right)\right], \varphi_8 = 0\right),$$
$$\text{per } 5mg < 6k\ell$$

e

$$c_9 : \left(\vartheta_9 = \arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\frac{mg}{k\ell} + 1\right)\right], \varphi_9 = \pi\right),\ c_{10} : \left(\vartheta_{10} = -\arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\frac{mg}{k\ell} + 1\right)\right], \varphi_{10} = \pi\right),$$
$$\text{per } 5mg < 2k\ell.$$

Quando $4mg = 5k\ell$, cioè $\frac{6}{5}k\ell < mg = \frac{5}{4}k\ell < \frac{3}{2}k\ell$, le uniche due configurazioni di equilibrio oltre a , c_1, c_2, c_3 e c_4 sono c_5 e c_6, che diventano

$$c_5 : \left(\vartheta_5 = 0, \varphi_5 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}\right),\ c_6 : \left(\vartheta_6 = 0, \varphi_6 = -\frac{\pi}{3}\right).$$

Stabilità. Per determinare il tipo di stabilità, calcoliamo la matrice Hessiana di V e istanziamola per le differenti configurazioni di equilibrio, nel caso $4mg = 5k\ell$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} &= \ell[4k\ell(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta) + (5mg - 2k\ell\cos\varphi)\cos\vartheta]\\
\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\vartheta} &= \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\partial\varphi} = 2k\ell^2\sin\vartheta\sin\varphi\\
\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} &= \ell[k\ell(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) + 2(mg - k\ell\cos\vartheta)\cos\varphi].
\end{aligned}$$

Per $mg = \frac{5}{4}k\ell$:

$$B = k\ell^2 \begin{pmatrix} 4(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta) + \left(\frac{25}{4} - 2\cos\varphi\right)\cos\vartheta & 2\sin\vartheta\sin\varphi \\ 2\sin\vartheta\sin\varphi & (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) + 2\left(\frac{5}{4} - \cos\vartheta\right)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

e quindi

$$B_1 = k\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ autovalori discordi } \Rightarrow c_1 \text{ instabile,}$$

$$B_2 = k\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ autovalori discordi } \Rightarrow c_2 \text{ instabile,}$$

$$B_3 = k\ell^2 \begin{pmatrix} -\frac{33}{4} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ autovalori discordi } \Rightarrow c_3 \text{ instabile,}$$

$$B_4 = k\ell^2 \begin{pmatrix} -\frac{49}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ autovalori negativi } \Rightarrow c_4 \text{ instabile.}$$

$$B_5 = B_6 = k\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ autovalori positivi } \Rightarrow c_5, c_6 \text{ stabili.}$$

Reazione vincolare. Per uno dei $k = \frac{mg}{\ell}$, la configurazione $(\vartheta_* = 0, \varphi_* = \frac{\pi}{2})$ è di equilibrio per il sistema asta-lamina, per cui

$$\underline{\Phi}_O + \underline{F}_g^{OA} + \underline{F}_g^{ABCD} + \underline{F}_k^{EC} = \underline{0},$$

cioè

$$\underline{\Phi}_O = -\underline{F}_g^{OA} - \underline{F}_g^{ABCD} - \underline{F}_k^{EC} = mg\underline{e}_y + 2mg\underline{e}_y - 2\frac{mg}{\ell}\ell\underline{e}_y = mg\underline{e}_y.$$

Inoltre, anche il sottosistema costituito dal punto A è in equilibrio e quindi $\underline{M}_A = \underline{0}$.

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = -3\underline{e}_y + 2\underline{e}_z & \text{applicato in } P_1 \equiv (1, -2, -1) \\ \underline{v}_2 = \underline{e}_x + 2\underline{e}_y - 4\underline{e}_z & \text{applicato in } P_2 \equiv (0, -2, 1) \\ \underline{v}_3 = -2\underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z & \text{applicato in } P_3 \equiv (-1, 1, 0) \end{cases}$$

Esercizio 2.

Risultante. $\underline{R} = -\underline{e}_x - \underline{e}_z$.

Momento risultante rispetto a O.

$$\begin{aligned} \underline{M}_O &= (P_1 - O) \wedge \underline{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \underline{v}_2 + (P_3 - O) \wedge \underline{v}_3 \\ &= -3\underline{e}_z - 2\underline{e}_y - 4\underline{e}_x - 3\underline{e}_x \quad + 2\underline{e}_z + 8\underline{e}_x + \underline{e}_y - 2\underline{e}_x \quad - \underline{e}_z + \underline{e}_y + 2\underline{e}_z + \underline{e}_x = \underline{0}. \end{aligned}$$

Trinomio invariante. $\mathcal{I} = \underline{R} \cdot \underline{M}_O = 0$.

Sistema equivalente. Poichè il momento $\underline{M}_O$ è nullo, il sistema è equivalente ad un unico vettore pari alla risultante applicato nel punto O:

$$\Sigma' = \{(O, -\underline{e}_x - \underline{e}_z)\}.$$

Esercizio 3.

Notiamo per prima cosa che il triangolo ABE è equilatero, quindi $B\hat{A}E = A\hat{E}B = \frac{\pi}{3}$ e $\overline{AE} = \sqrt{3}R$.

Cinematica. Indicando con $\underline{\omega} = \omega\underline{e}_z$ la velocità angolare del sistema e applicando la prima formula fondamentale della cinematica rigida:

$$v_0(\sqrt{3}\underline{e}_x - \underline{e}_y) = \underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge (B - A) = \underline{0} + \omega\underline{e}_z \wedge \sqrt{3}R\left(\frac{1}{2}\underline{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_y\right) = \frac{\sqrt{3}R}{2}\omega(-\sqrt{3}\underline{e}_y + \underline{e}_y)$$

$$\Rightarrow \quad \omega = -\frac{2v_0}{\sqrt{3}R} \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega} = -\frac{2v_0}{\sqrt{3}R}\underline{e}_z,$$

mentre

$$\underline{v}_E = \underline{v}_A + \underline{\omega} \wedge (E - A) = \underline{0} - \frac{2v_0}{\sqrt{3}R}\underline{e}_z \wedge \sqrt{3}R\underline{e}_x = -2v_0\underline{e}_y.$$

Centro di massa. Il centro di massa L del sottosistema delle due lamine si trova, per simmetria, sulla retta s e contemporaneamente sulla congiungente i due centri di massa P e Q: L è pertanto il punto di intersezione tra r e s. Inoltre, chiamando $\underline{e}_1 := \frac{1}{2}(\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y)$ ed $\underline{e}_2 := \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y)$ le direzioni principali nel piano xy della lamina $ABCD$:

$$P - A = \frac{1}{2}(C - A) = \frac{1}{2}[(B - A) + (C - B)] = \frac{R}{2}(\sqrt{3}\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \frac{R}{4}(\sqrt{3}\underline{e}_x + 3\underline{e}_y - \sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y) = R\underline{e}_y,$$

da cui

$$L - A = \frac{1}{2}(E - A) + (P - A) = \frac{\sqrt{3}}{2}R\underline{e}_x + R\underline{e}_y.$$

Momenti. Utilizzando la base principale $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_z)$,

$$\underline{I}_P^{ABCD} = \frac{1}{12}mR^2(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 4\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z).$$

La retta r passa per P e ha direzione $\underline{e}_x$, quindi

$$I_r^{ABCD} = \underline{e}_x \cdot \underline{I}_P^{ABCD}\underline{e}_x = \frac{1}{12}mR^2[(\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_x)^2 + 3(\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_x)^2] = \frac{1}{12}mR^2\left(\frac{1}{4} + 3\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{24}mR^2,$$

mentre la retta s ha direzione $\underline{e}_y$ e passa, per esempio, per L. Allora, grazie al Teorema di Huygens-Steiner e al fatto che $L - P = \frac{\sqrt{3}}{2}R\underline{e}_x$,

$$\underline{I}_L^{ABCD} = \underline{I}_P^{ABCD} + \frac{3}{4}mR^2(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x).$$

e

$$I_s^{ABCD} = \underline{e}_y \cdot \underline{I}_L^{ABCD}\underline{e}_y = \frac{1}{12}mR^2[(\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_y)^2 + 3(\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_y)^2] + \frac{3}{4}mR^2 = \frac{1}{12}mR^2\left(\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}mR^2 = \frac{7}{8}mR^2,$$

Asta.

$$\underline{I}_A^{AE} = \frac{1}{3}4m(\sqrt{3}R)^2\left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x\right) = 4mR^2\left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x\right).$$

Disco. Notiamo che, avendo i lati paralleli a quelli del triangolo ABE, anche il trinagolo PQO è isoscele e quindi $O - L = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PQ}\underline{e}_y = \frac{3}{2}R\underline{e}_y$, da cui

$$O - A = (O - L) + (L - A) = \frac{\sqrt{3}}{2}R\underline{e}_x + \frac{5}{2}R\underline{e}_y \qquad e \qquad \|O - A\|^2 = 7R^2.$$

Per il Teorema di Huygens-Steiner:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_A^{\text{disco}} &= \underline{I}_O^{\text{disco}} + 42mR^2\left[\underline{\mathbb{1}} - \frac{1}{7R^2}(O - A) \otimes (O - A)\right] \\
&= \frac{9}{8}mR^2\left(\underline{\mathbb{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right) + 42mR^2\underline{\mathbb{1}} - 6mR^2\left[\frac{3}{4}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{25}{4}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{5\sqrt{3}}{4}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)\right] \\
&= mR^2\left[\frac{309}{8}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{45}{8}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \frac{15\sqrt{3}}{2}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \frac{177}{4}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right].
\end{aligned}$$

Lamine. Per simmetria rispetto alla retta s dei due rettangoli, i momenti I_r^{BEFG} e I_s^{BEFG} sono uguali a I_r^{ABCD} e I_r^{ABCD}, rispettivamente. Inoltre tali valori corrispondono ai momenti di ciascun rettangolo rispetto al centro di massa L del sottosistema delle due lamine e nelle direzioni $\underline{e}_x$ e $\underline{e}_y$, che sono direzioni principali per il sottositema considerato. Raddoppiando i momenti già trovati si ottengono quindi i momenti principali delle due lamine congiunte: un'ulteriore somma permette di ottenere il momento nella direzione $\underline{e}_z$ (per il Teorema degli assi Perpendicolari), mentre i momenti misti sono nulli. Allora

$$\underline{\underline{I}}_L^{\text{lamine}} = mR^2\left(\frac{5}{12}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{7}{4}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{13}{6}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right)$$

e ancora grazie al Teorema di Huygens-Steiner

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{I}}_A^{\text{lamine}} &= \underline{\underline{I}}_L^{\text{lamine}} + \frac{7}{4}2mR^2\left[\underline{\underline{\mathbb{1}}} - \frac{4}{7R^2}(L-A)\otimes(L-A)\right] \\
&= mR^2\left(\frac{5}{12}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{7}{4}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{13}{6}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right) + \frac{7}{2}mR^2\underline{\underline{\mathbb{1}}} \\
&\quad - 2mR^2\left[\frac{3}{4}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{\sqrt{3}}{2}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)\right] \\
&= mR^2\left[\frac{29}{12}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{13}{4}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \sqrt{3}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \frac{17}{3}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right].
\end{aligned}$$

Momento esterno e reazione vincolare. Le uniche forze esterne agenti sul sistema oltre a $\underline{\Phi}_A$ sono le forze peso degli oggetti che costituiscono il corpo rigido. Avendo già tutti i centri di massa dei sottosistemi considerati, possima applicare le equazioni di equilibrio, ottenendo

$$\underline{\Phi}_A = -\underline{F}_g^{\text{asta}} - \underline{F}_g^{\text{lamine}} - \underline{F}_g^{\text{disco}} = 12mg\underline{e}_y$$

e

$$\begin{aligned}
\underline{M} &= -\frac{1}{2}(E-A)\wedge \underline{F}_g^{\text{asta}} - (L-A)\wedge \underline{F}_g^{\text{lamine}} - (O-A)\wedge \underline{F}_g^{\text{disco}} - (A-A)\wedge \underline{\Phi}_A \\
&= R\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_x \wedge 4mg\underline{e}_y + R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_x + \underline{e}_y\right)\wedge 2mg\underline{e}_y + R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_x + \frac{5}{2}\underline{e}_y\right)\wedge 6mg\underline{e}_y = 6\sqrt{3}mgR\underline{e}_z.
\end{aligned}$$