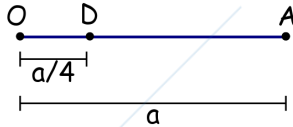


ESERCIZI DI INERZIA

(TUTORATO DEL 01/04/2020)

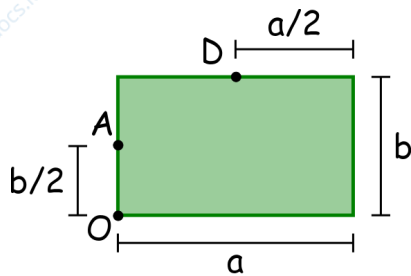
Negli esercizi che seguono, se non diversamente specificato, ciascun corpo ha massa totale M uniformemente distribuita.

Esercizio 1. Per l'ASTA OA di lunghezza a trova:



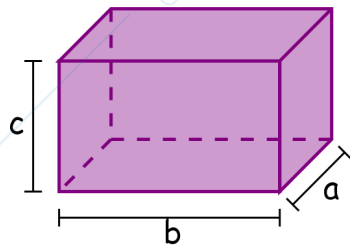
- (1) il vettore posizione $C - O$ del centro di massa C rispetto all'estremo O ,
- (2) una base principale d'inerzia relativa a C ,
- (3) il tensore centrale d'inerzia \mathbf{I}_C ,
- (4) i tensori d'inerzia $\mathbf{I}_O, \mathbf{I}_A, \mathbf{I}_D$.

Esercizio 2. Per il RETTANGOLO di lati a e b trova:

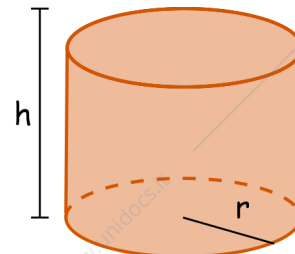


- (1) il vettore posizione $C - O$ del centro di massa C rispetto all'estremo O ,
- (2) una base principale d'inerzia relativa a C ,
- (3) il tensore centrale d'inerzia \mathbf{I}_C ,
- (4) i tensori d'inerzia $\mathbf{I}_O, \mathbf{I}_A, \mathbf{I}_D$.

Esercizio 3. Scrivi il tensore centrale d'inerzia di

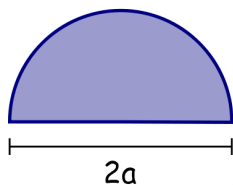


- (i) un parallelepipedo rettangolo di lati a, b e c ;

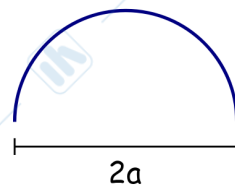


- (ii) un cilindro di altezza h e raggio di base r .

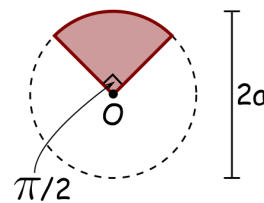
Esercizio 4. Trova il centro di massa e scrivi il tensore centrale d'inerzia delle seguenti figure, supponendo per ciascuna di esse che la densità del materiale sia costante e pari a ρ .



(i)



(ii)



(iii)

SOLUZIONI

In queste soluzioni, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ con \mathbf{e}_x orizzontale e diretto verso destra, \mathbf{e}_y verticale e diretto verso l'alto, $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ uscente dal foglio.

Esercizio 1.

Per simmetria: $C - O = \frac{a}{2}\mathbf{e}_x$ e \mathcal{B} è principale per $\mathbf{I}_C, \mathbf{I}_O, \mathbf{I}_A$ e \mathbf{I}_D .

Inoltre l'asta è un oggetto monodimensionale che si estende lungo la direzione x , quindi $\rho = \frac{m}{a}$, $dm = \rho dL = \frac{m}{a} dx$ e $I_{Czz} = I_{Cxx} + I_{Cyy}$. Poiché per $P \in C$ la posizione rispetto a C è descritta dal vettore $P - C = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ con $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ e $y = z = 0$,

$$I_{Cxx} = \int_C (y^2 + z^2) dm = \int_C 0 dm = 0 \quad e$$

$$\begin{aligned} I_{Cyy} &= \int_C (x^2 + z^2) dm = \frac{m}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \frac{m}{a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{m}{3a} \left[\frac{a^3}{8} - \left(-\frac{a^3}{8} \right) \right] \\ &= \frac{m}{3a} \left[\frac{a^3}{8} - \left(-\frac{a^3}{8} \right) \right] = \frac{1}{12} ma^2. \end{aligned}$$

Di conseguenza $\mathbf{I}_C = \frac{1}{12} ma^2 (\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) = \frac{1}{12} ma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x)$.

Usando il Teorema di Huygens-Steiner:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O &= \mathbf{I}_C + m|C - O|^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) ma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) \\ &= \frac{1}{3} ma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x). \end{aligned}$$

Analogamente $\mathbf{I}_A = \frac{1}{3} ma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x)$, mentre

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_D &= \mathbf{I}_C + m|C - D|^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16} \right) ma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) \\ &= \frac{7}{48} ma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x). \end{aligned}$$

Esercizio 2.

Per simmetria: $C - O = \frac{a}{2}\mathbf{e}_x + \frac{b}{2}\mathbf{e}_y$ e \mathcal{B} è principale per $\mathbf{I}_C, \mathbf{I}_A$ e \mathbf{I}_D .

Inoltre il rettangolo è un oggetto bidimensionale che appartiene al piano xy , quindi $\rho = \frac{m}{ab}$, $dm = \rho dA = \frac{m}{ab} dx dy$ e $I_{Czz} = I_{Cxx} + I_{Cyy}$. Poiché per $P \in C$ la posizione rispetto a C è descritta dal vettore $P - C = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ con $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, $y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$ e $z = 0$,

$$\begin{aligned} I_{Cxx} &= \int_C (y^2 + z^2) dm = \frac{m}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx dy = \frac{m}{ab} a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{m}{b} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\ &= \frac{m}{3b} \left[\frac{b^3}{8} - \left(-\frac{b^3}{8} \right) \right] = \frac{m}{3b} \left[\frac{b^3}{8} - \left(-\frac{b^3}{8} \right) \right] = \frac{1}{12} mb^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Cyy} &= \int_C (x^2 + z^2) dm = \frac{m}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx dy = \frac{m}{ab} b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \frac{m}{a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{m}{3a} \left[\frac{a^3}{8} - \left(-\frac{a^3}{8} \right) \right] = \frac{m}{3a} \left[\frac{a^3}{8} - \left(-\frac{a^3}{8} \right) \right] = \frac{1}{12} ma^2. \end{aligned}$$

DENSITÀ UNIFORME

$$\rho = \begin{cases} \frac{m}{L} & \text{in 1D} \\ \frac{m}{A} & \text{in 2D} \\ \frac{m}{V} & \text{in 3D} \end{cases}$$

MASSA INFINITESIMA

$$dm = \begin{cases} \rho dL & \text{in 1D} \\ \rho dA & \text{in 2D} \\ \rho dV & \text{in 3D} \end{cases}$$

CENTRO DI MASSA

$$C - O = \frac{\int_{P \in C} (P - O) dm}{m}$$

$C \in$ piani di riflessione per \mathbf{C}

MOMENTI D'INEZIA

$$I_{Oxx} = \int_C (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{Oyy} = \int_C (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{Ozz} = \int_C (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{Oxy} = I_{Oyx} = \int_C xy dm$$

$$I_{Oxz} = I_{Ozx} = \int_C xz dm$$

$$I_{Oyz} = I_{Ozy} = \int_C yz dm$$

BASE PRINCIPALE D'INEZIA

È una base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ di autovettori per \mathbf{I}_O

$$\mathbf{I}_O = I_{O1}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + I_{O2}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + I_{O3}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

Se il piano ortogonale a \mathbf{e} e passante per O è di riflessione per \mathcal{C} , allora \mathbf{e} è autovettore di \mathbf{I}_O .

Di conseguenza $\mathbf{I}_C = \frac{1}{12}mb^2\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{12}ma^2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$.

Usando il Teorema di Huygens-Steiner:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_A &= \mathbf{I}_C + m|C - A|^2(\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) \\ &= \frac{1}{12}mb^2\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{12}ma^2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \\ &\quad + \frac{1}{4}ma^2(\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{1}{12}mb^2\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{3}ma^2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{12}m(4a^2 + b^2)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Analogamente $\mathbf{I}_D = \frac{1}{3}mb^2\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{12}ma^2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{12}m(a^2 + 4b^2)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$,

mentre $C - O = \frac{a}{2}\mathbf{e}_x + \frac{b}{2}\mathbf{e}_y$ e $|C - O|^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$, da cui

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_C \otimes \mathbf{e}_C &= \frac{1}{|C - O|^2}(C - O) \otimes (C - O) \\ &= \frac{4}{a^2 + b^2} \left(\frac{a^2}{4}\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{ab}{4}\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \frac{ab}{4}\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + \frac{b^2}{4}\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_O &= \mathbf{I}_C + m|C - O|^2(\mathbf{I} - \mathbf{e}_C \otimes \mathbf{e}_C) \\ &= \frac{1}{12}mb^2\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{12}ma^2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \frac{a^2 + b^2}{4}m(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \\ &\quad - m \left(\frac{a^2}{4}\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{ab}{4}\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \frac{ab}{4}\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + \frac{b^2}{4}\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \right) \\ &= \frac{1}{3}mb^2\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \frac{1}{4}mab\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y - \frac{1}{4}mab\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{3}ma^2\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Esercizio 3.

Nel parallelepipedo il centro di massa coincidente con il centro geometrico e \mathcal{B} è una base principale per \mathbf{I}_C . Inoltre il parallelepipedo è un oggetto tridimensionale, quindi $\rho = \frac{m}{abc}$, $dm = \rho dV = \frac{m}{abc} dx dy dz$. Poiché per $P \in \mathcal{C}$ la posizione rispetto a C è descritta dal vettore $P - C = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ con $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, $y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$ e $z \in \left[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}I_{Cxx} &= \int_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2) dm = \int_{\mathcal{C}} y^2 dm + \int_{\mathcal{C}} z^2 dm = \frac{m}{abc} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} y^2 dx dy dz + \frac{m}{abc} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dx dy dz \\ &= \frac{m}{abc} ac \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy + \frac{m}{abc} ab \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz = \frac{m}{b} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} + \frac{m}{c} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) \\ I_{Cyy} &= \int_{\mathcal{C}} (x^2 + z^2) dm = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) \quad \text{e} \quad I_{Czz} = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2).\end{aligned}$$

Di conseguenza $\mathbf{I}_C = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$.

Nel cilindro il centro di massa coincidente con il centro geometrico e \mathcal{B} è una base principale per \mathbf{I}_C . Inoltre il cilindro è un oggetto tridimensionale, quindi $\rho = \frac{m}{\pi hr^2}$, $dm = \rho dV = \frac{m}{\pi hr^2} dx dy dz$. Passando alle coordinate cilindriche: $x = s \cos \vartheta$, $y = s \sin \vartheta$ e $z = z$ e quindi per $P \in \mathcal{C}$ la posizione rispetto a C è descritta dal vettore

SISTEMI PIANI (CORPI 2D)

$$I_{Ozz} = I_{Oxx} + I_{Oyy}$$

TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_C + md_C^2(\mathbf{I} - \mathbf{e}_C \otimes \mathbf{e}_C)$$

dove

$$d_C = |C - O|, \quad \mathbf{e}_C = \frac{C - O}{|C - O|}$$

$P - C = s \cos \vartheta \mathbf{e}_x + s \sin \vartheta \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ con $s \in [0, r]$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e $z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$. Lo jacobiano è

$$J = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -s \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & s \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = s, \quad \text{da cui } dm = \frac{m}{\pi h r^2} s \, ds d\vartheta dz.$$

Per simmetria cilindrica $I_{Cyy} = I_{Cxx}$ e quindi

$$\begin{aligned} I_{Cxx} = I_{Cyy} &= \int_C (y^2 + z^2) dm = \int_C y^2 dm + \int_C z^2 dm \\ &= \frac{m}{\pi h r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s^3 \cos^2 \vartheta \, ds d\vartheta dz + \frac{m}{\pi h r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s z^2 \, ds d\vartheta dz \\ &= \frac{m}{\pi h r^2} \frac{r^4}{4} h \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \, d\vartheta + \frac{m}{\pi h r^2} \frac{r^2}{2} 2\pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\ &= \frac{m r^2}{4\pi} \frac{1}{2} (t - \sin t \cos t)_0^{2\pi} + \frac{m h^2}{12} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m h^2 = \frac{1}{12} m (3r^2 + h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Czz} &= \int_C (x^2 + y^2) dm = \int_C s^2 dm = \frac{m}{\pi h r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} s^3 \, ds d\vartheta dz \\ &= \frac{m}{\pi h r^2} \frac{r^4}{4} h 2\pi = \frac{1}{2} m r^2. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\mathbf{I}_C = \frac{1}{12} m (3r^2 + h^2) \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{12} m (3r^2 + h^2) \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{12} m r^2 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z = \frac{1}{12} m (3r^2 + h^2) (\mathbf{I} - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + \frac{1}{12} m r^2 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.$$

Esercizio 4.

Per tutti e tre gli esercizi, troviamo prima \mathbf{I}_O con O centro di cerchio e circonferenza e poi utilizziamo il Teorema di Huygens-Steiner per trovare \mathbf{I}_C :

$$\mathbf{I}_O \mathbf{I}_C + m d_C^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_C \otimes \mathbf{e}_C) \Rightarrow \mathbf{I}_C = \mathbf{I}_O - m d_C^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_C \otimes \mathbf{e}_C).$$

(i) Qui $A = \frac{\pi}{2} a^2$ e $m = \frac{\pi}{2} \rho a^2$. Inoltre le simmetrie assicurano che $C - O$ è parallelo a \mathbf{e}_y e che \mathcal{B} è principale sia per \mathbf{I}_O sia per \mathbf{I}_C . Passando alle coordinate polari $x = s \cos \vartheta$ e $y = s \sin \vartheta$ con $s \in [0, a]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $J = s$ e $dm = \rho J \, ds d\vartheta$:

$$(C - O)_y = \frac{2}{\pi \rho a^2} \int_{P \in C} (P - O)_y dm = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^\pi y s \, ds d\vartheta = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^\pi s^2 \sin \vartheta \, ds d\vartheta = \frac{2a^3}{3\pi a^2} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{4}{3\pi} a$$

e quindi $C - O = \frac{4}{3\pi} a \mathbf{e}_y$.

Inoltre $I_{Ozz} = I_{Oxx} + I_{Oyy}$ e

$$\begin{aligned} I_{Ozz} &= \int_C (x^2 + y^2) dm = \int_C s^2 dm = \rho \int_0^a \int_0^\pi s^3 \, ds d\vartheta = \frac{\pi}{4} \rho a^4 \\ I_{Oyy} &= \int_C (x^2 + z^2) dm = \int_C x^2 dm = \rho \int_0^a \int_0^\pi s^3 \cos^2 \vartheta \, ds d\vartheta = \frac{\pi}{8} \rho a^4 \\ I_{Oxx} &= I_{Ozz} - I_{Oyy} = \frac{\pi}{8} \rho a^4 \end{aligned}$$

da cui $\mathbf{I}_O = \frac{\pi}{8} \rho a^4 (\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)$.

$$\text{Quindi } \mathbf{I}_C = \frac{\pi}{8} \rho a^4 (\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) - \frac{8}{9\pi} \rho a^4 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) \rho a^4 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{\pi}{8} \rho a^4 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi}\right) \rho a^4 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.$$

DERIVATA DEL PRODOTTO

$$(fg)' = f'g + fg'$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$fg = \int (fg)' = \int f'g + \int fg'$$

da cui

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\begin{aligned} * \int \cos^2 &= -\sin \cos + \int \sin^2 \\ &= -\sin \cos + \int 1 - \int \cos^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\int \cos^2 t = \frac{1}{2} (t - \sin t \cos t)$$

(ii) Qui $L = \pi a$ e $m = \pi \rho a$. Inoltre le simmetrie assicurano che $C - O$ è parallelo a \mathbf{e}_y e che \mathcal{B} è principale sia per \mathbf{I}_O sia per \mathbf{I}_C . Passando alla coordinata $\vartheta \in [0, \pi]$: $x = a \cos \vartheta$ e $y = a \sin \vartheta$ con $dm = \rho a d\vartheta$:

$$(C - O)_y = \frac{1}{\pi \rho a} \int_{P \in C} (P - O)_y dm = \frac{1}{\pi a} \int_0^\pi ya d\vartheta = \frac{2}{\pi} a$$

e quindi $C - O = \frac{2}{\pi} a \mathbf{e}_y$.

Inoltre $I_{Oxx} = I_{Ozz} - I_{Oyy}$ e

$$I_{Ozz} = \int_C (x^2 + y^2) dm = \int_C a^2 dm = \rho a^3 \int_0^\pi d\vartheta = \pi \rho a^3$$

$$I_{Oyy} = \int_C (x^2 + z^2) dm = \int_C x^2 dm = \rho a^3 \int_0^\pi \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{2} \rho a^3$$

da cui $\mathbf{I}_O = \frac{\pi}{2} \rho a^3 (\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)$.

Quindi $\mathbf{I}_C = \frac{\pi}{2} \rho a^3 (\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) - \frac{4}{\pi} \rho a^3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \rho a^3 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{\pi}{2} \rho a^3 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \left(\pi - \frac{4}{\pi}\right) \rho a^3 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$.

(iii) Questa situazione è simile a quella in (iii), ma cambiano gli intervalli di integrazione per $\vartheta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Inoltre

$A = \frac{\pi}{4} a^2$ e $m = \frac{\pi}{4} \rho a^2$:

$$(C - O)_y = \frac{4}{\pi a^2} \int_0^a \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} s^2 \sin \vartheta ds d\vartheta = \frac{4a^3}{3\pi a^2} \left(-\cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} a$$

e quindi $C - O = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} a \mathbf{e}_y$.

I momenti invece diventano

$$I_{Ozz} = \rho \int_0^a \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} s^3 ds d\vartheta = \frac{\pi}{8} \rho a^4$$

$$I_{Oyy} = \int_C (x^2 + z^2) dm = \int_C x^2 dm = \rho \int_0^a \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} s^3 \cos^2 \vartheta ds d\vartheta = \frac{\pi}{16} \rho a^4$$

$$I_{Oxx} = I_{Ozz} - I_{Oyy} = \frac{\pi}{16} \rho a^4$$

da cui $\mathbf{I}_O = \frac{\pi}{16} \rho a^4 (\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)$.

Quindi

$\mathbf{I}_C = \frac{\pi}{16} \rho a^4 (\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) - \frac{16}{9\pi} \rho a^4 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{8}{9\pi}\right) \rho a^4 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{\pi}{16} \rho a^4 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) \rho a^4 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$.