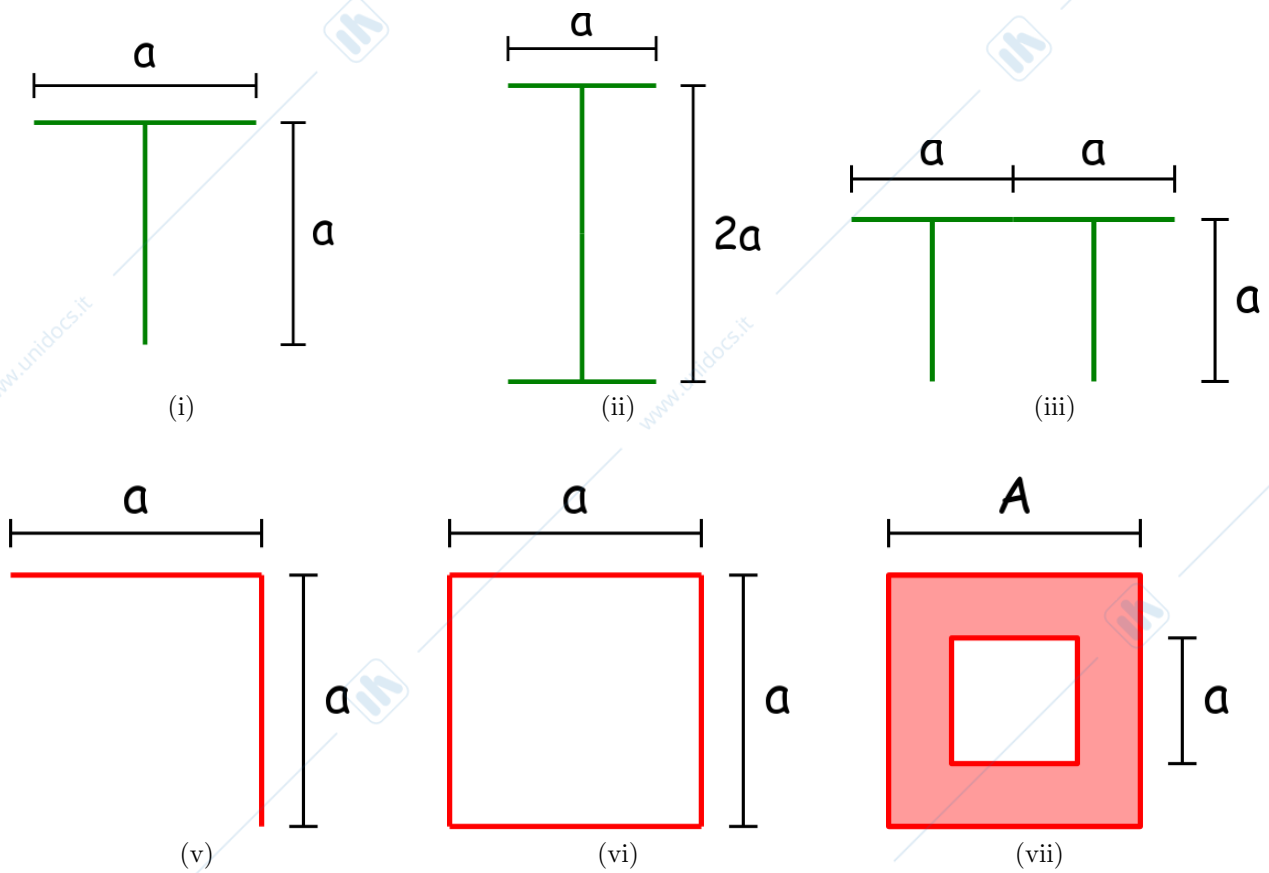


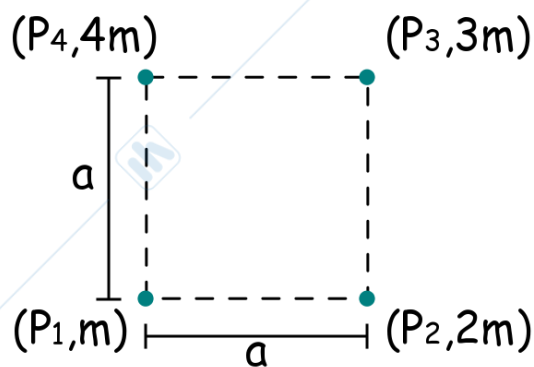
ESERCIZI DI INERZIA

(TUTORATO DEL 08/04/2020)

Esercizio 1. Trova il centro di massa e scrivi il tensore centrale d'inerzia delle seguenti figure, supponendo per ciascuna che la densità del materiale sia costante e pari a ρ .



Esercizio 2. Trova il centro di massa, scrivi il tensore centrale d'inerzia e trova gli assi centrali principali della seguente configurazione di 4 punti:



SOLUZIONI

In queste soluzioni, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ con \mathbf{e}_x orizzontale e diretto verso destra, \mathbf{e}_y verticale e diretto verso l'alto, $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ uscente dal foglio.

Esercizio 1.

(i) La figura si può ottenere per composizione di due aste omogenee, una orizzontale (\mathcal{C}_1) e una verticale (\mathcal{C}_2), entrambe di lunghezza a . Chiamando O il punto di intersezione delle due aste

$$\mathbf{C}_1 - O = \mathbf{0}, \quad m_1 = \rho a, \quad \mathbf{C}_2 - O = -\frac{a}{2}\mathbf{e}_y, \quad m_2 = \rho a,$$

e quindi

$$m = 2\rho a, \quad \mathbf{C} - O = -\frac{a}{4}\mathbf{e}_y.$$

Inoltre

$$\mathbf{I}_{\mathcal{C}_1} = \frac{1}{12}\rho a^3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{12}\rho a^3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y),$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_C &= \frac{1}{12}\rho a^3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) + \frac{1}{12}\rho a^3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + \frac{1}{8}\rho a^3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) \\ &= \frac{5}{24}\rho a^3 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{12}\rho a^3 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{7}{24}\rho a^3 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

(ii) In questo caso, la figura è la composizione di due figure a "T" identiche a quella del punto (i), la seconda delle quali ribaltata orizzontalmente. Il centro di massa C del sistema composto coincide con il centro della figura, cioè il punto in comune alle due "T". Pertanto

$$\mathbf{C}_1 - C = \frac{3}{4}a\mathbf{e}_y, \quad m_1 = 2\rho a, \quad \mathbf{C}_2 - C = -\frac{3}{4}a\mathbf{e}_y, \quad m_2 = 2\rho a$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_C &= \frac{5}{12}\rho a^3 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{6}\rho a^3 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{7}{12}\rho a^3 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \frac{9}{4}\rho a^3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) \\ &= \frac{8}{3}\rho a^3 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{6}\rho a^3 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{17}{6}\rho a^3 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

(iii) Qui le due "T" composte sono affiancate orizzontalmente. Chiamando O il loro punto di incontro:

$$\mathbf{C}_1 - O = -\frac{a}{2}\mathbf{e}_x - \frac{a}{4}\mathbf{e}_y, \quad m_1 = 2\rho a, \quad \mathbf{C}_2 - O = \frac{a}{2}\mathbf{e}_x - \frac{a}{4}\mathbf{e}_y, \quad m_2 = 2\rho a, \quad \mathbf{C} - O = -\frac{a}{4}\mathbf{e}_y$$

e quindi

$$\mathbf{I}_C = \frac{5}{12}\rho a^3 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{6}\rho a^3 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{7}{12}\rho a^3 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \rho a^3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) = \frac{5}{12}\rho a^3 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{7}{6}\rho a^3 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{19}{12}\rho a^3 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.$$

(iv) La figura si può ottenere per composizione di due aste omogenee, una orizzontale (\mathcal{C}_1) e una verticale (\mathcal{C}_2), entrambe di lunghezza a . Chiamando O il punto di intersezione delle due aste

$$\mathbf{C}_1 - O = -\frac{a}{2}\mathbf{e}_x, \quad m_1 = \rho a, \quad \mathbf{C}_2 - O = -\frac{a}{2}\mathbf{e}_y, \quad m_2 = \rho a, \quad \mathbf{C} - O = -\frac{a}{4}\mathbf{e}_x - \frac{a}{4}\mathbf{e}_y = -\frac{a}{4\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_C &= \frac{1}{12}\rho a^3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) + \frac{1}{12}\rho a^3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) + \frac{1}{4}\rho a^3 \left[\mathbf{I} - \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \otimes (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \right] \\ &= \frac{5}{24}\rho a^3 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{8}\rho a^3 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{8}\rho a^3 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + \frac{5}{24}\rho a^3 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{5}{12}\rho a^3 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

TEOREMA DI COMPOSIZIONE

Per $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2$:

$$\mathbf{C} - O = \frac{m_1(\mathbf{C}_1 - O) + m_2(\mathbf{C}_2 - O)}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_C &= \mathbf{I}_{\mathcal{C}_1} + \mathbf{I}_{\mathcal{C}_2} \\ &\quad + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1|^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_{12} \otimes \mathbf{e}_{12}) \end{aligned}$$

TEOREMA DELLA LACUNA

Per $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$:

$$\mathbf{C} - O = \frac{m_1(\mathbf{C}_1 - O) - m_2(\mathbf{C}_2 - O)}{m_1 - m_2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_C &= \mathbf{I}_{\mathcal{C}_1} - \mathbf{I}_{\mathcal{C}_2} \\ &\quad - \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} |\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1|^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_{12} \otimes \mathbf{e}_{12}) \end{aligned}$$

ASTA ORIZZONTALE

$$\mathbf{I}_C = \frac{1}{12} m l^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x)$$

QUADRATO

$$\mathbf{I}_C = \frac{1}{12} m l^2 (\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)$$

(v) In questo caso, la cornice quadrata è composta da due figure a identiche a quella del punto (iv), la seconda delle quali ribaltata diagonalmente. Il centro di massa C del sistema composto coincide con il centro della figura, cioè il centro della cornice quadrata. Pertanto

$$C_1 - C = \frac{3}{4}ae, \quad m_1 = 2\rho a, \quad C_2 - C = -\frac{3}{4}ae, \quad m_2 = 2\rho a, \quad \text{con } e := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + e_y).$$

Riscrivendo nella base $(e, e_\perp := e \times e_z, e_z)$ i tensori delle componenti:

$$\mathbf{I}_{C_1} = \mathbf{I}_{C_2} = \frac{1}{3}\rho a^3 e \otimes e + \frac{1}{12}\rho a^3 e_\perp \otimes e_\perp + \frac{5}{12}\rho a^3 e_z \otimes e_z$$

da cui

$$\mathbf{I}_C = \frac{2}{3}\rho a^3 e \otimes e + \frac{1}{6}\rho a^3 e_\perp \otimes e_\perp + \frac{5}{3}\rho a^3 e_z \otimes e_z + \frac{1}{2}\rho a^3 (\mathbf{I} - e \otimes e) = \frac{2}{3}\rho a^3 (\mathbf{I} - e_z \otimes e_z).$$

(vi) Il centro di massa del sistema è nel centro dell'oggetto, coincidente con il centro di entrambi i quadrati di lato A e a . Usiamo il Teorema della Lacuna, sottraendo alla lamina quadrata di lato A e massa ρA^2 la lamina quadrata di lato a e massa ρa^2 :

$$\mathbf{I}_C = \frac{1}{12}\rho A^4 (\mathbf{I} + 2e_z \otimes e_z) - \frac{1}{12}\rho a^4 (\mathbf{I} + 2e_z \otimes e_z) = \frac{A^4 - a^4}{12}\rho (\mathbf{I} + 2e_z \otimes e_z).$$

Esercizio 2.

Scegliamo come osservatore il punto P_1 e utilizziamo le definizioni nel caso di sistemi discreti:

$$\begin{aligned} P_1 - P_1 &= \mathbf{0}, & P_2 - P_1 &= a\mathbf{e}_x, \\ P_3 - P_1 &= a\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y, & P_4 - P_1 &= a\mathbf{e}_y, \end{aligned}$$

da cui

$$C - P_1 = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i (P_i - P_1)}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{1}{2}a\mathbf{e}_x + \frac{7}{10}a\mathbf{e}_y$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{P_1} &= \sum_{i=1}^4 m_i [(P_i - P_1)^2 \mathbf{I} - (P_i - P_1) \otimes (P_i - P_1)] = \sum_{i=1}^4 m_i (P_i - P_1)^2 \mathbf{I} - \sum_{i=1}^4 m_i (P_i - P_1) \otimes (P_i - P_1) \\ &= 12ma^2 \mathbf{I} - 5ma^2 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - 3ma^2 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y - 3ma^2 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x - 7ma^2 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \\ &= 7ma^2 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - 3ma^2 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y - 3ma^2 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + 5ma^2 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + 12ma^2 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Grazie al Teorema di Huygens-Steiner, con $\mathbf{e} := \frac{C - P_1}{|C - P_1|} = \frac{1}{\sqrt{74}}(5\mathbf{e}_x + 7\mathbf{e}_y)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_C &= \mathbf{I}_{P_1} - \frac{74}{10}ma^2 \left[\mathbf{I} - \frac{1}{74}(5\mathbf{e}_x + 7\mathbf{e}_y) \otimes (5\mathbf{e}_x + 7\mathbf{e}_y) \right] = \mathbf{I}_{P_1} - \frac{74}{10}ma^2 \mathbf{I} + \frac{1}{10}ma^2 (5\mathbf{e}_x + 7\mathbf{e}_y) \otimes (5\mathbf{e}_x + 7\mathbf{e}_y) \\ &= \frac{21}{10}ma^2 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{5}{10}ma^2 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \frac{5}{10}ma^2 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + \frac{25}{10}ma^2 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{46}{10}ma^2 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \\ &= \frac{21}{10}ma^2 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{2}ma^2 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \frac{1}{2}ma^2 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + \frac{5}{2}ma^2 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \frac{23}{5}ma^2 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

La base principale d'inerzia per \mathbf{I}_C è $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z)$ con $\mathbf{e}_1 = \cos \vartheta \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_2 = -\sin \vartheta \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \mathbf{e}_y$, dove

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctan \left(-\frac{5}{2} \right) = -\frac{1}{2} \arctan \frac{5}{2} \sim -34^\circ.$$

**BASE PRINCIPALE D'INEZIA
(in 2D)**

Base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z)$ con
 $\mathbf{e}_1 = \cos \vartheta \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \mathbf{e}_y$ e
 ϑ qualsiasi se $I_{Oxx} = I_{Oyy}$ e $I_{Oxy} = 0$
 $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ se $I_{Oxx} = I_{Oyy}$ e $I_{Oxy} \neq 0$
 $\vartheta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{Oxy}}{I_{Oxx} - I_{Oyy}}$ se $I_{Oxx} \neq I_{Oyy}$