UNIVERSITÀ DI PAVIA

Corsi di Laurea in Ingegneria Edile Architettura

Esame di Meccanica Razionale [500153]

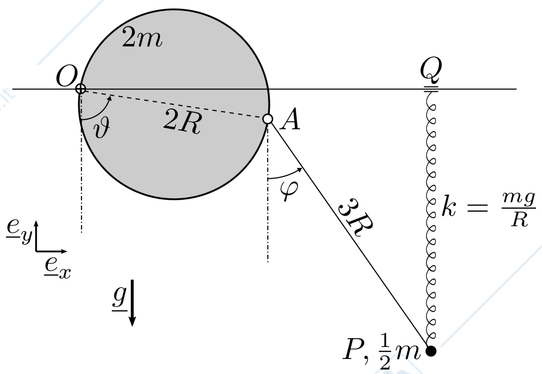
13 settembre 2023

COGNOME:

ESITO (teoria + esercizi)**:**

NOME:

Esercizio 1. In un piano verticale, un disco omogeneo di massa $2m$ e diametro OA di lunghezza $2R$ è libero di ruotare attorno ad O, fisso nel piano. Un'asta AP di lunghezza $3R$ e massa trascurabile è incernierata al bordo del disco in A. In P è posto un punto materiale di massa $\frac{1}{2}m$, che viene attratto da una molla ideale, di costante elastica $k := \frac{mg}{R}$ e lunghezza a riposo nulla, al punto Q di una guida orizzontale passante per O. La molla è costretta ad essere sempre perpendicolare alla guida, in modo che Q si trovi costantemente sulla verticale per O.



L'angolo formato dalla direzione verticale e dal diametro OA del disco è indicato dalla variabile lagrangiana $\vartheta \in (-\pi, \pi]$, mentre $\varphi \in (-\pi, \pi]$ rappresenta l'angolo formato dalla direzione verticale e dall'asta AP (come in figura). L'accelerazione di gravità è $\underline{g} = -g\underline{e}_y$. Si trascurino tutti gli attriti.

Scrivere l'energia cinetica totale del sistema [**2 punti**].

$$T = mR^2 \left[\frac{5}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{9}{4}\dot{\varphi}^2 + 3\dot{\vartheta}\dot{\varphi}(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi)\right]$$

Scrivere l'energia potenziale totale del sistema [**2 punti**], controllando che la matrice Hessiana dell'energia potenziale sia

$$B = mgR \begin{pmatrix} 4\left(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta\right) - 6\cos\vartheta\cos\varphi + 3\cos\vartheta & 6\sin\vartheta\sin\varphi \\ 6\sin\vartheta\sin\varphi & 9\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) - 6\cos\vartheta\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

$$V = mgR\left(2\cos^2\vartheta + \frac{9}{2}\cos^2\varphi + 6\cos\vartheta\cos\varphi - 3\cos\vartheta - \frac{3}{2}\cos\varphi\right)$$

Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema quando $\sin\varphi \neq 0$ [**4 punti**].

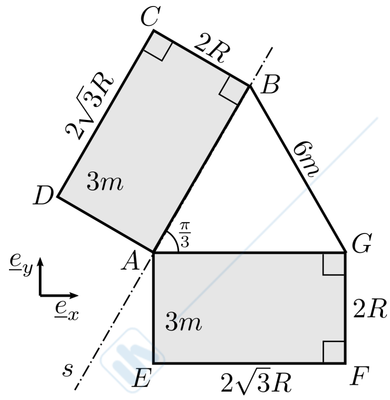
$$c_1 : \left(\vartheta_1 = 0, \varphi_1 = \frac{2}{3}\pi\right), \ c_2 : \left(\vartheta_2 = 0, \varphi_2 = -\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$c_3 : \left(\vartheta_3 = \pi, \varphi_3 = \arccos\frac{5}{6}\right), \ c_4 : \left(\vartheta_4 = \pi, \varphi_4 = -\arccos\frac{5}{6}\right).$$

Calcolare gli autovalori λ_1 e λ_2 dell'Hessiana B rispetto alla matrice A associata all'energia cinetica del sistema nella configurazione di equilibrio $(\vartheta^* = \pi, \varphi^* = 0)$ e determinare il tipo di modi normali associati a ciascuno di essi [**2 punti**].

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{9}\frac{g}{R}, \qquad \text{modi entrambi iperbolici}$$

Esercizio 2. Il sistema nella figura a destra è costituito da

1. una lamina rettangolare omogenea $AEFG$ di massa $3m$ e lati $EF = 2\sqrt{3}R$ e $FG = 2R$ paralleli alle direzioni orizzontale e verticale, rispettivamente;
2. una lamina rettangolare omogenea $ABCD$ identica alla prima, disposta in modo che i segmenti AG e AB formino un angolo di $\frac{\pi}{3}$;
3. un'asta omogenea BG di massa $6m$.



Utilizzando la base $\mathcal{B} = (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z := \underline{e}_x \wedge \underline{e}_y)$, scrivere il tensore centrale d'inerzia $\underline{I}^{AEFG}$ e il tensore $\underline{I}_A^{AEFG}$ in A della lamina $AEFG$ [**1 punto ciascuno**].

$$\underline{I}^{AEFG} = mR^2 \left(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + 3\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 4\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right)$$
$$\underline{I}_A^{AEFG} = mR^2 \left[4\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + 12\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 16\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + 3\sqrt{3}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)\right]$$

Scrivere il momento d'inerzia I_s^{AEFG} della lamina $AEFG$ rispetto alla retta s contenente il segmento AB [**1 punto**].

$$I_s^{AEFG} = \frac{29}{2} mR^2$$

Scrivere analiticamente una base principale per il tensore centrale d'inerzia $\underline{I}^{ABCD}$ della lamina $ABCD$ [**1 punto**] e, utilizzando la medesima base, scrivere il tensore d'inerzia $\underline{I}_A^{ABCD}$ calcolato in A della lamina $ABCD$ [**1 punto**].

$$\mathcal{B}' = \left(\underline{e}_1 := \frac{1}{2}(\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y), \underline{e}_2 := \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y), \underline{e}_z\right)$$
$$\underline{I}_A^{ABCD} = mR^2 \left[4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 12\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 16\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + 3\sqrt{3}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)\right]$$

Scrivere i momenti d'inerzia $I_{A,xx}^{ABCD}$, $I_{A,yy}^{ABCD}$ $I_{A,xy}^{ABCD}$ calcolati rispetto ad A della lamina $ABCD$ [**1 punto ciascuno**].

$$I_{A,xx}^{ABCD} = \frac{29}{2} mR^2, \qquad I_{A,yy}^{ABCD} = \frac{3}{2} mR^2, \qquad I_{A,xy}^{ABCG} = -\frac{7\sqrt{3}}{2} mR^2$$

Scrivere i momenti d'inerzia I_s^{ABCD} e I_s^{BG} rispetto alla retta s della lamina $ABCD$ e dell'asta BG, rispettivamente [**1 punto ciascuno**].

$$I_s^{ABCD} = 4mR^2, \qquad I_s^{BG} = 18mR^2$$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Come prima cosa scriviamo i vettori posizione (e le velocità) dei punti di interesse per il calcolo delle energie potenziale e cinetica, indicando con C il centro di massa di del disco:

$$
\begin{aligned}
A - O &= 2R(\sin\vartheta \underline{e}_x - \cos\vartheta \underline{e}_y) \\
&\Rightarrow \quad 2R\dot{\vartheta}(\cos\vartheta \underline{e}_x + \sin\vartheta \underline{e}_y) = \underline{v}_A = \underline{\omega e}_z \wedge (A-O) = 2R\omega(\cos\vartheta \underline{e}_x - \sin\vartheta \underline{e}_y) \\
&\Rightarrow \quad \underline{\omega} = \dot{\vartheta}\underline{e}_z \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega}^2 = \dot{\vartheta}^2 \\
C - O &= \frac{1}{2}(A-O) = R(\sin\vartheta \underline{e}_x - \cos\vartheta \underline{e}_y) \\
P - A &= 3R(\sin\varphi \underline{e}_x - \cos\varphi \underline{e}_y) \\
P - O &= (P-A) + (A-O) = R(2\sin\vartheta + 3\sin\varphi)\underline{e}_x - R(2\cos\vartheta + 3\cos\varphi)\underline{e}_y \\
&\Rightarrow \quad \underline{v}_P = R[(2\dot{\vartheta}\cos\vartheta + 3\dot{\varphi}\cos\varphi)\underline{e}_x + (2\dot{\vartheta}\sin\vartheta + 3\dot{\varphi}\sin\varphi)\underline{e}_y] \\
&\Rightarrow \quad \underline{v}_P^2 = R^2[(2\dot{\vartheta}\cos\vartheta + 3\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (2\dot{\vartheta}\sin\vartheta + 3\dot{\varphi}\sin\varphi)^2] \\
&\qquad\quad = R^2[4\dot{\vartheta}^2 + 9\dot{\varphi}^2 + 12\dot{\vartheta}\dot{\varphi}(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi)] \\
\|P-Q\|^2 &= y_P^2 = [-R(2\cos\vartheta + 3\cos\varphi)]^2 = R^2(4\cos^2\vartheta + 9\cos^2\varphi + 12\cos\vartheta\cos\varphi).
\end{aligned}
$$

Energia cinetica. Indicato con $\underline{e}$ il versore parallelo al diametro OA, il tensore d'inerzia del disco calcolato in O risulta

$$
\underline{I}_O^{\text{disco}} = \underline{I}_C^{\text{disco}} + 2mR^2(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e} \otimes \underline{e}) = \frac{1}{4}2mR^2(\underline{\mathbb{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 2mR^2(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e} \otimes \underline{e}),
$$

e quindi il momento del disco in O rispetto alla retta parallela a $\underline{\omega}$ è

$$
I_{O,zz}^{\text{disco}} = 2\frac{1}{4}2mR^2 + 2mR^2 = 3mR^2.
$$

L'energia cinetica totale del sistema risulta quindi

$$
\begin{aligned}
T = T^{\text{disco}} + T^P &= \frac{1}{2}I_{O,zz}^{\text{disco}}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m\underline{v}_P^2 \\
&= \frac{3}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4}mR^2[4\dot{\vartheta}^2 + 9\dot{\varphi}^2 + 12\dot{\vartheta}\dot{\varphi}(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi)] \\
&= mR^2\left[\frac{5}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{9}{4}\dot{\varphi}^2 + 3\dot{\vartheta}\dot{\varphi}(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi)\right].
\end{aligned}
$$

Energia potenziale. Scegliendo la quota del punto O come livello ad energia potenziale gravitazionale nulla ed eliminando le costanti:

$$
\begin{aligned}
V &= V_g^{\text{disco}} + V_g^P + V_k^{PQ} = 2mgy_C + \frac{1}{2}mgy_P + \frac{1}{2}k\|P-Q\|^2 \\
&= -2mgR\cos\vartheta - \frac{1}{2}mgR(2\cos\vartheta + 3\cos\varphi) + \frac{1}{2}\frac{mg}{R}R^2(4\cos^2\vartheta + 9\cos^2\varphi + 12\cos\vartheta\cos\varphi) \\
&= mgR\left(2\cos^2\vartheta + \frac{9}{2}\cos^2\varphi + 6\cos\vartheta\cos\varphi - 3\cos\vartheta - \frac{3}{2}\cos\varphi\right).
\end{aligned}
$$

Controlliamo che l'energia potenziale trovata abbia l'Hessiana suggerita nel testo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \vartheta} &= mgR\left(-4\cos\vartheta\sin\vartheta - 6\sin\vartheta\cos\varphi + 3\sin\vartheta\right), \\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= mgR\left(-9\cos\varphi\sin\varphi - 6\cos\vartheta\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} &= mgR\left(4\sin^2\vartheta - 4\cos^2\vartheta - 6\cos\vartheta\cos\varphi + 3\cos\vartheta\right),\\
\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta \partial \varphi} &= 6mgR\sin\vartheta\sin\varphi,\\
\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} &= mgR\left(9\sin^2\varphi - 9\cos^2\varphi - 6\cos\vartheta\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos\varphi\right),
\end{aligned}
$$

da cui

$$
B = mgR\begin{pmatrix} 4\left(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta\right) - 6\cos\vartheta\cos\varphi + 3\cos\vartheta & 6\sin\vartheta\sin\varphi \\ 6\sin\vartheta\sin\varphi & 9\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) - 6\cos\vartheta\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos\varphi \end{pmatrix}.
$$

Configurazioni di equilibrio. Per calcolare le configurazioni di equilibrio richiest imponiamo pari a 0 le derivate prime di V rispetto alle coordinate lagrangiane, raccogliendo $\sin\vartheta$ e $\sin\varphi$ dove possibile, ma evitando lo studio del caso $\sin\varphi = 0$:

$$
\begin{cases} \sin\vartheta(3 - 4\cos\vartheta - 6\cos\varphi) = 0, \\ 3\sin\varphi\left(\frac{1}{2} - 3\cos\varphi - 2\cos\vartheta\right) = 0 \end{cases}
$$

Quando $\sin\varphi \neq 0$, la seconda equazione è verificata se $2\cos\vartheta + 3\cos\varphi = \frac{1}{2}$, cioè per $4\cos\vartheta + 6\cos\varphi = 1$. Sostituendo quest'ultima uguaglianza nella prima equazione otteniamo $2\sin\vartheta = 0$, che è verificata solo per $\vartheta = 0$ o per $\vartheta = \pi$. Tali valori trasformano il sistema in

$$
\begin{cases} \vartheta = 0, \\ \frac{1}{2} - 3\cos\varphi - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \vartheta = \pi, \\ \frac{1}{2} - 3\cos\varphi + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{5}{6}
$$

dando quindi origine alle quattro configurazioni di equilibrio

$$
\begin{aligned}
c_1 : \left(\vartheta_1 = 0, \varphi_1 = \frac{2}{3}\pi\right), \ c_2 : \left(\vartheta_2 = 0, \varphi_2 = -\frac{2}{3}\pi\right)\\
c_3 : \left(\vartheta_3 = \pi, \varphi_3 = \arccos\frac{5}{6}\right), \ c_4 : \left(\vartheta_4 = \pi, \varphi_4 = -\arccos\frac{5}{6}\right).
\end{aligned}
$$

Modi normali. La matrice A delle derivate seconde di T rispetto a $\dot\vartheta$ e $\dot\varphi$ è

$$
A = mR^2\begin{pmatrix} 5 & 3(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi) \\ 3(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi) & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.
$$

Imponendo $\det(B - \lambda A) = 0$ nella configurazione di equilibrio $(\vartheta^* = \pi, \varphi^* = 0)$ abbiamo allora

$$
0 = \det\begin{pmatrix} -\frac{g}{R} - 5\lambda & -3\lambda \\ -3\lambda & -\frac{3}{2}\frac{g}{R} - \frac{9}{2}\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{g}{R} + 5\lambda\right)\left(\frac{3}{2}\frac{g}{R} + \frac{9}{2}\lambda\right) - 9\lambda^2 = \frac{27}{2}\lambda^2 + 12\lambda\frac{g}{R} + \frac{3}{2}\frac{g^2}{R^2},
$$

da cui

$$
\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 81}}{27}\frac{g}{R} = \frac{-12 \pm \sqrt{63}}{27}\frac{g}{R} = \frac{-12 \pm 3\sqrt{7}}{27}\frac{g}{R} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{9}\frac{g}{R}.
$$

Essendo entrambi gli autovalori negativi, entrambi i modi normali sono iperbolici, in accordo col fatto che la configurazione data risulta essere un massimo dell'energia potenziale (come si evince dallo studio della sua matrice B associata).

Esercizio 2.

Lamina AEFG. La base $\mathcal{B}$ data è principale per il tensore centrale d'inerzia $\underline{I}^{AEFG}$, che risulta

$$\begin{aligned}\underline{I}^{AEFG} &= \frac{1}{12}3m\left\{(2R)^2\underline{e}_x\otimes\underline{e}_x + (2\sqrt{3}R)^2\underline{e}_y\otimes\underline{e}_y + \left[(2R)^2+(2\sqrt{3}R)^2\right]\underline{e}_z\otimes\underline{e}_z\right\}\\ &= mR^2\left(\underline{e}_x\otimes\underline{e}_x + 3\underline{e}_y\otimes\underline{e}_y + 4\underline{e}_z\otimes\underline{e}_z\right).\end{aligned}$$

Chiamando K il centro di massa di $AEFG$, utilizziamo il Teorema di Huygens-Steiner per calcolare $\underline{I}_A^{AEFG}$:

$$\begin{aligned}\underline{I}_A^{AEFG} &= \underline{I}^{AEFG} + 3m\left[(K-A)^2\mathbb{1} - (K-A)\otimes(K-A)\right]\\ &= \underline{I}^{AEFG} + 3m\left[R^2(\sqrt{3}\underline{e}_x-\underline{e}_y)^2\mathbb{1} - R(\sqrt{3}\underline{e}_x-\underline{e}_y)\otimes R(\sqrt{3}\underline{e}_x-\underline{e}_y)\right]\\ &= mR^2\left[\underline{e}_x\otimes\underline{e}_x + 3\underline{e}_y\otimes\underline{e}_y + 4\underline{e}_z\otimes\underline{e}_z + 3(\sqrt{3}\underline{e}_x-\underline{e}_y)^2\mathbb{1} - 3(\sqrt{3}\underline{e}_x-\underline{e}_y)\otimes(\sqrt{3}\underline{e}_x-\underline{e}_y)\right]\\ &= mR^2\left[\underline{e}_x\otimes\underline{e}_x + 3\underline{e}_y\otimes\underline{e}_y + 4\underline{e}_z\otimes\underline{e}_z + 12\mathbb{1} - 9\underline{e}_x\otimes\underline{e}_x - 3\underline{e}_y\otimes\underline{e}_y + 3\sqrt{3}(\underline{e}_x\otimes\underline{e}_y + \underline{e}_y\otimes\underline{e}_x)\right]\\ &= mR^2\left[4\underline{e}_x\otimes\underline{e}_x + 12\underline{e}_y\otimes\underline{e}_y + 16\underline{e}_z\otimes\underline{e}_z + 3\sqrt{3}(\underline{e}_x\otimes\underline{e}_y + \underline{e}_y\otimes\underline{e}_x)\right].\end{aligned}$$

La retta s passa per A ed è parallela al versore $\underline{e}_1 := \frac{1}{2}(\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y)$. Il momento cercato è allora

$$\begin{aligned}I_s^{AEFG} &= \underline{e}_1\cdot\underline{I}_A^{AEFG}\underline{e}_1 = mR^2\left[4(\underline{e}_x\cdot\underline{e}_1)^2 + 12(\underline{e}_y\cdot\underline{e}_1)^2 + 6\sqrt{3}(\underline{e}_x\cdot\underline{e}_1)(\underline{e}_y\cdot\underline{e}_1)\right]\\ &= mR^2\left(4\frac{1}{4} + 12\frac{3}{4} + 6\sqrt{3}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = mR^2\left(1+9+\frac{9}{2}\right) = \frac{29}{2}mR^2.\end{aligned}$$

Lamina ABCD. Una base principale per la lamina $ABCD$ ha i primi due versori paralleli ai lati della lamina, quindi (ad esempio)

$$\mathcal{B}' = \left(\underline{e}_1 := \frac{1}{2}(\underline{e}_x + \sqrt{3}\underline{e}_y), \underline{e}_2 := \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\underline{e}_x + \underline{e}_y), \underline{e}_z\right).$$

Essendo le due lamine semplicemente ruotate una rispetto all'altra, il tensore $\underline{I}_A^{ABCD}$ ha i medesimi momenti di $\underline{I}_A^{AEFG}$, ma rispetto alla base $\mathcal{B}'$, quindi:

$$\underline{I}_A^{ABCD} = mR^2\left[4\underline{e}_1\otimes\underline{e}_1 + 12\underline{e}_2\otimes\underline{e}_2 + 16\underline{e}_z\otimes\underline{e}_z + 3\sqrt{3}(\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2 + \underline{e}_2\otimes\underline{e}_1)\right].$$

Per la medesima ragione

$$I_{A,xx}^{ABCD} = I_s^{AEFG} = \frac{29}{2}mR^2,$$

mentre

$$I_{A,yy}^{ABCD} = I_{A,zz}^{ABCD} - I_{A,xx}^{ABCD} = 16mR^2 - \frac{29}{2}mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

e

$$\begin{aligned}I_{A,xy}^{ABCG} = \underline{e}_x\cdot\underline{I}_A^{ABCD}\underline{e}_y &= mR^2\left[4(\underline{e}_x\cdot\underline{e}_1)(\underline{e}_y\cdot\underline{e}_1) + 12(\underline{e}_x\cdot\underline{e}_2)(\underline{e}_y\cdot\underline{e}_2)\right.\\ &\qquad\left.+3\sqrt{3}(\underline{e}_x\cdot\underline{e}_1)(\underline{e}_y\cdot\underline{e}_2) + 3\sqrt{3}(\underline{e}_x\cdot\underline{e}_2)(\underline{e}_y\cdot\underline{e}_1)\right]\\ &= mR^2\left(4\frac{\sqrt{3}}{4} - 12\frac{\sqrt{3}}{4} + 3\sqrt{3}\frac{1}{4} - 3\sqrt{3}\frac{3}{4}\right) = -\frac{7\sqrt{3}}{2}mR^2.\end{aligned}$$

Asta BG. Per simmetria, il momento di BG rispetto a s è pari a quello rispetto alla retta orizzontale passante per G, cioè $\underline{e}_x\cdot\underline{I}_G^{BG}\underline{e}_x$, in cui scriviamo $\underline{I}_G^{BG}$ utilizzando la sua direzione principale $\underline{e}\perp(G-B)$:

$$I_s^{BG} = \underline{e}_x\cdot\underline{I}_G^{BG}\underline{e}_x = \underline{e}_x\cdot\frac{1}{3}6m(2\sqrt{3}R)^2\left(\underline{e}\otimes\underline{e} + \underline{e}_z\otimes\underline{e}_z\right)\underline{e}_x = 24mR^2(\underline{e}_x\cdot\underline{e})^2 = 24mR^2\frac{3}{4} = 18mR^2.$$

Il momento rispettoad s della lamina $ABCD$, invece, si legge immediatamente dal tensore $\underline{I}_A^{ABCD}$ ed è $I_s^{ABCD} = 4mR^2$.