

UNIVERSITÀ
DI PAVIA

Corsi di Laurea in Ingegneria Edile Architettura

Esame scritto di Meccanica Razionale [500153]

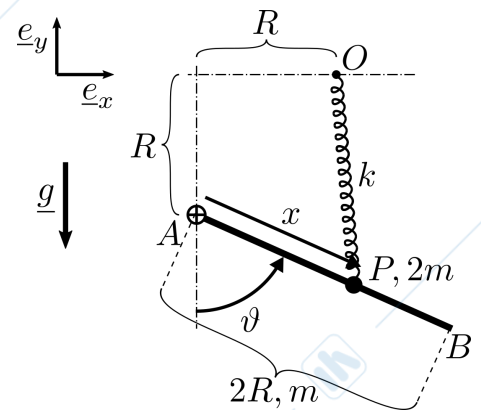
09 settembre 2022

COGNOME:

ESITO (in trentesimi):

NOME:

Esercizio 1. In un piano verticale, un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $2R$ è libera di ruotare senza attrito attorno ad una cerniera fissa posta nel suo estremo A . Un punto materiale P di massa $2m$ è libero di scorrere senza attrito lungo l'asta AB ed è attratto verso il punto fisso O da una molla ideale di costante elastica $k := \frac{mg}{R}$ e lunghezza a riposo nulla, dove $O - A := R(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$, come rappresentato in figura. La distanza tra A e P è indicata dalla variabile lagrangiana $x \in (0, 2R)$, mentre l'angolo $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ rappresenta l'inclinazione dell'asta AB rispetto alla direzione verticale. L'accelerazione di gravità è $\underline{g} = -g\mathbf{e}_y$.



Scrivere l'energia potenziale totale del sistema [3 punti].

$$V = \frac{mg}{2R}x^2 - mgx(\sin \vartheta + \cos \vartheta) - mgR \cos \vartheta$$

Scrivere l'energia cinetica totale del sistema [2 punti].

$$T = m\dot{x}^2 + mx^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{2}{3}mR^2\dot{\vartheta}^2$$

Determinare le configurazioni di equilibrio ammissibili e non di confine del sistema e indicarne il tipo di stabilità [4 punti].

$$\left(x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}R, \vartheta = \frac{\pi}{6} \right) \text{ stabile}$$

In ciascuna configurazione di equilibrio ammissibile e non di confine determinare la forza $\underline{\Phi}_P$ esercitata dall'asta AB sul punto P [2 punti].

$$\underline{\Phi}_P = -\frac{mg}{4} \left[(3 - \sqrt{3})\mathbf{e}_x + (\sqrt{3} - 1)\mathbf{e}_y \right]$$

Scrivere le accelerazioni lagrangiane \ddot{x} e $\ddot{\vartheta}$ nel moto incipiente, quando il sistema parte in quiete dalla configurazione con $x = R$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ [2 punti].

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{\vartheta} = -\frac{3g}{5R}$$

Esercizio 2. Per il seguente sistema di vettori applicati

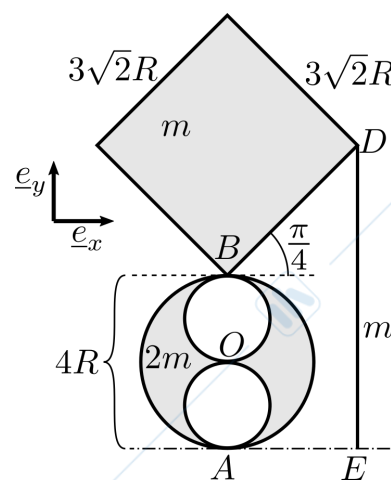
$$\begin{cases} \underline{v}_1 = 3\underline{e}_x - \underline{e}_z & \text{applicato in } P_1 \equiv (2, -3, 0) \\ \underline{v}_2 = -2\underline{e}_y + 3\underline{e}_z & \text{applicato in } P_2 \equiv (-1, 1, 2) \\ \underline{v}_3 = -\underline{e}_x + 4\underline{e}_y + 2\underline{e}_z & \text{applicato in } P_3 \equiv (0, -2, 3) \end{cases}$$

determinare risultante [**1 punto**] e momento risultante rispetto a $O \equiv (0, 0, 0)$ [**2 punti**]. Scrivere poi le coordinate del punto A appartenente all'asse centrale e alla superficie di equazione $z = x^2 - xy$ [**2 punti**].

$$\underline{R} = 2(\underline{e}_x + \underline{e}_y + 2\underline{e}_z), \quad \underline{M}_O = -6\underline{e}_x + 2\underline{e}_y + 9\underline{e}_z, \quad A \equiv \left(-1, -\frac{19}{6}, -\frac{13}{6}\right)$$

Esercizio 3. La figura a destra rappresenta un corpo rigido costituito da un disco forato di massa $2m$, una lamina quadrata omogenea di massa m e lato $\overline{BD} = 3\sqrt{2}R$ inclinato di $\frac{\pi}{4}$ rispetto all'orizzontale e da un'asta omogenea verticale DE di massa m . Il disco forato è stato ottenuto da un disco omogeneo di centro O e diametro verticale $\overline{AB} = 4R$, a cui sono stati rimossi i due dischi di diametri AO e OB rispettivamente. L'estremo E dell'asta è posto alla medesima quota del punto A del disco forato.

Sapendo che all'istante $t = 0$ il modulo della velocità del punto B è $\|\underline{v}_B\| = 6\sqrt{2}v_0 > 0$ e che il sistema sta ruotando in senso orario attorno al suo centro di istantanea rotazione D , determinare, all'istante $t = 0$, la velocità angolare $\underline{\omega}$ [**1 punto**] e la velocità \underline{v}_A del punto A [**2 punti**].



$$\underline{\omega} = -2\frac{v_0}{R}\underline{e}_z, \quad \underline{v}_A = v_0(-14\underline{e}_x + 6\underline{e}_y)$$

Utilizzando la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z := \underline{e}_x \wedge \underline{e}_y)$, scrivere i tre tensori d'inerzia rispetto al punto B del disco forato, del quadrato e dell'asta, rispettivamente [**3 punti ciascuno**].

$$\begin{aligned} \underline{I}_B^{\text{discoforato}} &= mR^2 \left(\frac{19}{2}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{7}{2}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 13\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right) \\ \underline{I}_B^{\text{quadrato}} &= mR^2 \left(\frac{21}{2}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{3}{2}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 12\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right) \\ \underline{I}_B^{\text{asta}} &= mR^2 \left(\frac{13}{3}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{3}{2}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \frac{3}{2}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + 9\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{40}{3}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right) \end{aligned}$$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Come prima cosa scriviamo i vettori posizione (e le velocità) dei punti di interesse per il calcolo delle energie potenziale e cinetica:

$$B - A = 2R (\sin \vartheta \underline{e}_x - \cos \vartheta \underline{e}_y),$$

$$P - A = x (\sin \vartheta \underline{e}_x - \cos \vartheta \underline{e}_y)$$

$$\Rightarrow \underline{v}_P = (\dot{x} \sin \vartheta + x \dot{\vartheta} \cos \vartheta) \underline{e}_x - (\dot{x} \cos \vartheta - x \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \underline{e}_y \Rightarrow v_P^2 = \dot{x}^2 + x^2 \dot{\vartheta}^2,$$

$$P - O = (P - A) + (A - O) = (P - A) - R(\underline{e}_x + \underline{e}_y) = (x \sin \vartheta - R) \underline{e}_x - (x \cos \vartheta + R) \underline{e}_y$$

$$\Rightarrow \|P - O\|^2 = x^2 + R^2 + 2Rx(\cos \vartheta - \sin \vartheta).$$

Energia potenziale. Scegliendo la quota del punto A come livello ad energia potenziale gravitazionale nulla ed eliminando le costanti dell'energia potenziale elastica:

$$\begin{aligned} V &= V_g^P + V_g^{AB} + V_k^{OP} = 2mgy_P + mg \frac{1}{2} y_B + \frac{1}{2} \frac{mg}{R} \|P - O\|^2 \\ &= -2mgx \cos \vartheta - mgR \cos \vartheta + \frac{mg}{2R} x^2 + mgx (\cos \vartheta - \sin \vartheta) \\ &= \frac{mg}{2R} x^2 - mgx (\sin \vartheta + \cos \vartheta) - mgR \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Energia cinetica. Scegliendo A (fisso) come punto di riferimento nella formula dell'energia cinetica dell'asta AB , riconoscendo che la velocità angolare è $\underline{\omega} = \dot{\vartheta} \underline{e}_z$ e ricordando il valore del momento d'inerzia $I_{A,zz}^{AB} = \frac{1}{3} m(2R)^2$ dell'asta rispetto ad A e alla direzione di $\underline{\omega}$:

$$T = T^P + T^{AB} = \frac{1}{2} 2m \underline{v}_P^2 + \frac{1}{2} I_{A,zz}^{AB} \underline{\omega}^2 = m\dot{x}^2 + mx^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{2}{3} mR^2 \dot{\vartheta}^2.$$

Configurazione di equilibrio ammissibili e non di confine. Calcoliamo le derivate prime di V rispetto alle coordinate lagrangiane e imponiamole pari a 0:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{mg}{R} x - mg(\sin \vartheta + \cos \vartheta) = 0 & \Rightarrow x = R(\sin \vartheta + \cos \vartheta) \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -mgx(\cos \vartheta - \sin \vartheta) + mgR \sin \vartheta = 0 & \Rightarrow x(\sin \vartheta - \cos \vartheta) + R \sin \vartheta = 0. \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione alla seconda:

$$R(\sin \vartheta + \cos \vartheta)(\sin \vartheta - \cos \vartheta) + R \sin \vartheta = 0 \Rightarrow \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta + \sin \vartheta = 0$$

e riscrivendo $\cos^2 \vartheta$ come $1 - \sin^2 \vartheta$ si ottiene l'equazione di secondo grado in $\sin \vartheta$

$$2 \sin^2 \vartheta + \sin \vartheta - 1 = 0$$

che ha come soluzioni

$$\sin \vartheta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

cioè

$$\begin{cases} x = R(\sin \vartheta + \cos \vartheta) \\ \sin \vartheta = \frac{1}{2} \text{ oppure } \sin \vartheta = -1. \end{cases}$$

Ecco allora che le possibili configurazioni di equilibrio risultano essere:

$$c_1 : \left(x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} R, \vartheta_1 = \frac{\pi}{6} \right), \quad c_2 : \left(x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} R, \vartheta_2 = \frac{5\pi}{6} \right), \quad c_3 : \left(x_3 = -R, \vartheta_3 = -\frac{\pi}{2} \right),$$

ma l'unica ammissibile e non di confine con (come suggerito dal testo) $x \in (0, 2R)$ è c_1 .

Stabilità. Per determinare il tipo di stabilità di c_1 , calcoliamo la matrice Hessiana di V e istanziamola per $x := x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}R$ e $\vartheta := \vartheta_1 = \frac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned} B_1 = B|_{c_1} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} \end{pmatrix} \Big|_{c_1} = mg \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & \sin \vartheta - \cos \vartheta \\ \sin \vartheta - \cos \vartheta & x(\sin \vartheta + \cos \vartheta) + R \cos \vartheta \end{pmatrix} \Big|_{c_1} \\ &= mg \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & (1+\sqrt{3})R \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poiché $\det B_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3} > 0$ e $\text{tr} B_1 > 0$, entrambi gli autovalori di B_1 sono positivi e quindi c_1 è una configurazione di minimo relativo isolato di V , cosa che la caratterizza come una configurazione di equilibrio stabile (per il Teorema di Dirichlet-Lagrange).

Reazione vincolare in P . Per calcolare la forza esercitata dall'asta AB su P in c_1 isoliamo il punto P e scriviamo l'equilibrio delle forze agenti su esso:

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{\Phi}_P + \underline{F}_g^P + \underline{F}_k \\ \Rightarrow \quad \underline{\Phi}_P &= -\underline{F}_g^P - \underline{F}_k = -(-2mg)\underline{e}_y - \frac{mg}{R}(O - P) \\ &= 2mge_y + \frac{mg}{R} \left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}R - R \right) \underline{e}_x - \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}R + R \right) \underline{e}_y \right] \\ &= mg \left(\frac{\sqrt{3}-3}{4} \underline{e}_x + \frac{1-\sqrt{3}}{4} \underline{e}_y \right) = -\frac{mg}{4} \left[(3-\sqrt{3}) \underline{e}_x + (\sqrt{3}-1) \underline{e}_y \right]. \end{aligned}$$

Equazioni di moto. Scriviamo le equazioni di moto riutilizzando i calcoli sulle derivate di V già effettuati, ricordando che $L = T - V$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} (2m\dot{x}) = 2m\dot{x}\dot{\vartheta}^2 - \left[\frac{mg}{R}x - mg(\sin \vartheta + \cos \vartheta) \right] \\ \frac{d}{dt} \left(2mx^2\dot{\vartheta} + \frac{4}{3}mR^2\dot{\vartheta} \right) = -[-mgx(\cos \vartheta - \sin \vartheta) + mgR \sin \vartheta] \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} 2m\ddot{x} = 2m\dot{x}\dot{\vartheta}^2 - \frac{mg}{R}x + mg(\sin \vartheta - \cos \vartheta) \\ 4m\dot{x}\dot{\vartheta} + 2m\dot{x}^2\ddot{\vartheta} + \frac{4}{3}mR^2\ddot{\vartheta} = mgx(\cos \vartheta - \sin \vartheta) - mgR \sin \vartheta. \end{cases} \end{aligned}$$

Sostituendo le condizioni imposte dalla domanda $\dot{x} = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$ (quiete), $x = R$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, otteniamo

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} = -mg + mg \\ 2mR^2\ddot{\vartheta} + \frac{4}{3}mR^2\ddot{\vartheta} = -2mgR \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{\vartheta} = -\frac{3}{5} \frac{g}{R}. \end{cases}$$

Esercizio 2.*Risultante.*

$$\underline{R} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = 2\underline{e}_x - 2\underline{e}_y + 4\underline{e}_z = 2(\underline{e}_x + \underline{e}_y + 2\underline{e}_z).$$

Momento risultante rispetto a O.

$$\begin{aligned} \underline{M}_O &= (P_1 - O) \times \underline{v}_1 + (P_2 - O) \times \underline{v}_2 + (P_3 - O) \times \underline{v}_3 \\ &= 2\underline{e}_y + 9\underline{e}_z + 3\underline{e}_x + 2\underline{e}_z + 3\underline{e}_y + 3\underline{e}_x + 4\underline{e}_x - 2\underline{e}_z - 4\underline{e}_x - 3\underline{e}_y - 12\underline{e}_x = -6\underline{e}_x + 2\underline{e}_y + 9\underline{e}_z \end{aligned}$$

Coordinate del punto A (rispetto a O). Trovandosi sull'asse centrale del sistema, il punto A ha posizione rispetto al punto O data dalla formula

$$A - O = \frac{\underline{R} \times \underline{M}_O}{R^2} + \lambda \underline{R}, \quad \text{per un certo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned} R^2 &= 2^2(1^2 + 1^2 + 2^2) = 24, \\ \underline{R} \times \underline{M}_O &= 2(2\underline{e}_z - 9\underline{e}_y + 6\underline{e}_z + 9\underline{e}_x - 12\underline{e}_y - 4\underline{e}_x) = 2(5\underline{e}_x - 21\underline{e}_y + 8\underline{e}_z), \end{aligned}$$

ottenendo così

$$A - O = \frac{1}{12}(5\underline{e}_x - 21\underline{e}_y + 8\underline{e}_z) + 2\lambda(\underline{e}_x + \underline{e}_y + 2\underline{e}_z) \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{5}{12} + 2\lambda \\ y_A = -\frac{21}{12} + 2\lambda \\ z_A = \frac{8}{12} + 4\lambda \end{cases}$$

Per ottenere λ imponiamo l'appartenenza di A alla superficie data:

$$z_A = x_A^2 - x_A y_A = x_A(x_A - y_A) \Rightarrow \frac{8}{12} + 4\lambda = \left(\frac{5}{12} + 2\lambda\right) \left(\frac{5}{12} + 2\lambda + \frac{21}{12} - 2\lambda\right) = \frac{65}{72} + \frac{13}{3}\lambda$$

da cui $\lambda = -\frac{17}{24}$. Sostituendo:

$$\begin{cases} x_A = \frac{5}{12} - \frac{17}{12} \\ y_A = -\frac{21}{12} - \frac{17}{12} \\ z_A = \frac{8}{12} - \frac{17}{6} \end{cases} \Rightarrow A \equiv \left(-1, -\frac{19}{6}, -\frac{13}{6}\right).$$

Esercizio 3.

Velocità angolare. La rotazione in senso orario ci dà l'informazione $\underline{\omega} = -\omega \underline{e}_z$ con $\omega > 0$, mentre il fatto che D sia il centro di istantanea rotazione del sistema assicura $\underline{v}_D = \underline{0}$. Applicando la prima formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\underline{v}_B = \underline{v}_D + \underline{\omega} \times (B - D) = -\omega \underline{e}_z \times 3R(-\underline{e}_x - \underline{e}_y) = 3R\omega(-\underline{e}_x + \underline{e}_y).$$

Utilizzando l'informazione sulla norma di \underline{v}_B otteniamo la velocità angolare:

$$6\sqrt{2}v_0 = \|\underline{v}_B\| = 3\sqrt{2}R\omega \Rightarrow \omega = 2\frac{v_0}{R} \Rightarrow \underline{\omega} = -2\frac{v_0}{R}\underline{e}_z.$$

Velocità del punto A. Ancora grazie alla prima formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times (A - B) = 6v_0(-\underline{e}_x + \underline{e}_y) - 2\frac{v_0}{R}\underline{e}_z \times (-4R\underline{e}_y) = v_0(-14\underline{e}_x + 6\underline{e}_y).$$

Disco forato. Il disco forato è costituito da un disco di area $\pi(2R)^2$ a cui sono stati tolti due dischi di area πR^2 ciascuno. L'area del disco forato è quindi $2\pi R^2$, mentre la sua densità di massa risulta essere $\rho = \frac{m}{\pi R^2}$: il disco di partenza ha quindi massa $4m$, mentre ciascun disco asportato ha massa m . Per calcolare il tensore richiesto, sottraiamo al tensore d'inerzia in B del disco di partenza i due tensori in B dei dischi asportati, ricordando che il tensore d'inerzia rispetto a B di un disco di massa M , raggio r , centro di massa C e disposto nel piano xy è

$$\underline{I}_B^{\text{disco}} = \frac{1}{4}Mr^2(\mathbb{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + M\|C - B\|^2 \left(\mathbb{1} - \frac{C - B}{\|C - B\|} \otimes \frac{C - B}{\|C - B\|} \right).$$

Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \underline{I}_B^{\text{discoforato}} &= 4mR^2(\mathbb{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 16mR^2(\mathbb{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \\ &\quad - \left[\frac{1}{4}mR^2(\mathbb{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + mR^2(\mathbb{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{4}mR^2(\mathbb{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 9mR^2(\mathbb{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) \right] \\ &= \frac{7}{2}mR^2(\mathbb{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 6mR^2(\mathbb{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) = mR^2 \left(\frac{19}{2}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{7}{2}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 13\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right) \end{aligned}$$

Quadrato. Il tensore d'inerzia rispetto a B di un quadrato di massa M , lato L , centro di massa C e disposto nel piano xy è

$$\underline{I}_B^{\text{quadrato}} = \frac{1}{12}ML^2(\mathbb{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + M\|C - B\|^2 \left(\mathbb{1} - \frac{C - B}{\|C - B\|} \otimes \frac{C - B}{\|C - B\|} \right).$$

Nel nostro caso:

$$\underline{I}_B^{\text{quadrato}} = \frac{18}{12}mL^2(\mathbb{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 9mR^2(\mathbb{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) = mR^2 \left(\frac{21}{2}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{3}{2}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + 12\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right).$$

Asta. Il tensore d'inerzia rispetto a B di un'asta di massa M , lunghezza L , centro di massa C e parallela a \underline{e}_y è

$$\begin{aligned}\underline{I}_B^{\text{asta}} &= \frac{1}{12}ML^2 (\mathbf{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + M\|C - B\|^2 \left(\mathbf{1} - \frac{C - B}{\|C - B\|} \otimes \frac{C - B}{\|C - B\|} \right) \\ &= \frac{1}{12}ML^2 (\mathbf{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + M [\|C - B\|^2 \mathbf{1} - (C - B) \otimes (C - B)].\end{aligned}$$

Nel nostro caso l'asta è lunga $7R$ e

$$\begin{aligned}C - B &= R \left(3\underline{e}_x - \frac{1}{2}\underline{e}_y \right), \quad \|C - B\| = \left(9 + \frac{1}{4} \right) R^2, \\ (C - B) \otimes (C - B) &= R^2 \left(9\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \frac{3}{2}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y - \frac{3}{2}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + \frac{1}{4}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \right).\end{aligned}$$

Sostituendo e svolgendo i conti:

$$\underline{I}_B^{\text{asta}} = mR^2 \left(\frac{13}{3}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \frac{3}{2}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \frac{3}{2}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + 9\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{40}{3}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right).$$