www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Corsi di Laurea in Ingegneria Edile Architettura

Esame di Meccanica Razionale [500153]

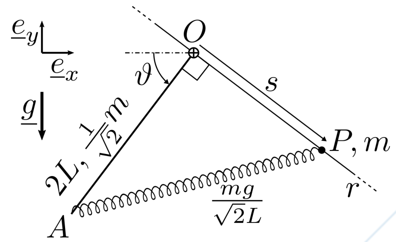
19 luglio 2023

COGNOME:

ESITO (teoria + esercizi)**:**

NOME:

Esercizio 1. In un piano verticale, un'asta omogenea OA di lunghezza $2L$ e massa $\frac{1}{\sqrt{2}}m$ è libera di ruotare attorno al suo estremo fisso O. Un punto materiale P di massa m è invece libero di scorrere su una guida rettilinea r, *saldata perpendicolarmente* all'asta in O. Una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k = \frac{mg}{\sqrt{2}L}$ attrae P all'estremo libero A dell'asta..



La distanza tra O e P (con segno positivo quando $(A - O) \wedge (P - O)$ ha il medesimo verso di $\underline{e}_z := \underline{e}_x \wedge \underline{e}_y$) è indicata dalla variabile lagrangiana $s \in \mathbb{R}$, mentre $\vartheta \in [0, 2\pi)$ rappresenta l'angolo formato dalla direzione orizzontale e dall'asta AB (come in figura). L'accelerazione di gravità è $\underline{g} = -g\underline{e}_y$. Si trascurino tutti gli attriti.

Scrivere l'energia cinetica totale del sistema [**2 punti**].

$$T = m\left(\frac{1}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}s^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}L^2\dot{\vartheta}^2\right)$$

Scrivere l'energia potenziale totale del sistema [**2 punti**].

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}mg\left(\frac{1}{2L}s^2 - \sqrt{2}s\cos\vartheta - L\sin\vartheta\right)$$

Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e i rispettivi tipi di stabilità [**4 punti**], controllando che la matrice Hessiana dell'energia potenziale sia $B = \frac{1}{\sqrt{2}}mg\begin{pmatrix}\frac{1}{L} & \sqrt{2}\sin\vartheta \\ \sqrt{2}\sin\vartheta & \sqrt{2}s\cos\vartheta + L\sin\vartheta\end{pmatrix}$.

$$c_1 : \left(s_1 = 0, \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}\right), \; c_2 : \left(s_2 = 0, \vartheta_2 = \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{instabili}$$

$$c_3 : \left(s_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}L, \vartheta_3 = \frac{\pi}{6}\right), \; c_4 : \left(s_4 = -\frac{\sqrt{6}}{2}L, \vartheta_4 = \frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{stabili}$$

Determinare le accelerazioni $\ddot{s}(0)$ e $\ddot{\vartheta}(0)$ nell'atto di moto incipiente, sapendo che il sistema parte in *quiete* dalla configurazione $s(0) = L$ e $\vartheta(0) = \frac{\pi}{4}$ [**2 punti**].

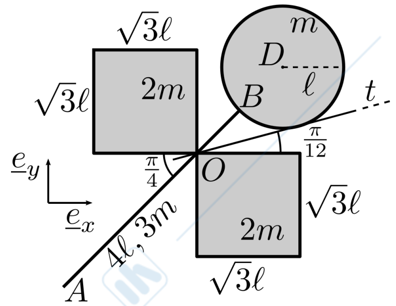
$$\ddot{s}(0) = 0, \qquad \ddot{\vartheta}(0) = \frac{3}{2}\frac{1-\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\frac{g}{L} = \frac{3}{2}\left(7 - 5\sqrt{2}\right)\frac{g}{L}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio 2. Il sistema nella figura a destra è costituito da

1. un disco omogeneo di massa m, raggio ℓ e centro D;
2. un'asta omogenea AB di lunghezza 4ℓ e massa $3m$, inclinata di $\frac{\pi}{4}$ rispetto alla direzione orizzontale e con l'estremo B sul bordo del disco, in modo tale che i tre punti A, B e D risultino *allineati*;
3. due lamine quadrate omogenee e identiche, di lato $\sqrt{3}\ell$ e massa $2m$ ciascuna, aventi il vertice O in comune e appartenente all'asta AB, in modo che $\|O-A\| = 3\ell$, entrambi con i lati paralleli alle direzioni orizzontale e verticale.



Rispondere alle seguenti domande, indicando analiticamente la base scelta se diversa da quella data $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z := \underline{e}_x \wedge \underline{e}_y)$.

$$(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_z) \text{ con } \underline{e}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_y) \text{ e } \underline{e}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{e}_x + \underline{e}_y)$$

Scrivere il vettore posizione $C - O$ del centro di massa C del sistema rispetto al punto O [**1 punto**].

$$C - O = -\frac{1}{8}\ell\underline{e}_1 = -\frac{1}{8\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_y)$$

Scrivere i momenti I_r^{lamina} e I_s^{lamina} di *una* delle due lamine quadrate, relativi alla retta r passante per O e parallela a $\underline{e}_z$ e alla retta s passante per O e ortogonale all'asta AB, rispettivamente [**1 punto ciascuno**].

$$I_r^{\text{lamina}} = 4m\ell^2 \qquad I_s^{\text{lamina}} = \frac{1}{2}m\ell^2$$

Scrivere il tensore d'inerzia $\underline{I}_O^{\text{lamine}}$ rispetto ad O del sottosistema costituito da *entrambe* le lamine quadrate [**1 punto**].

$$\underline{I}_O^{\text{lamine}} = m\ell^2 \left(7\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 8\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right)$$

Scrivere i tensori d'inerzia $\underline{I}_O^{\text{disco}}$ e $\underline{I}_O^{AB}$ rispetto ad O del disco e dell'asta AB, rispettivamente [**2 punti ciascuno**].

$$\underline{I}_O^{\text{disco}} = m\ell^2 \left(\frac{1}{4}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{17}{4}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{9}{2}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right)$$
$$\underline{I}_O^{\text{asta}} = 7m\ell^2 \left(\mathbb{1} - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\right).$$

Scrivere il momento I_t di tutto il sistema rispetto alla retta t passante per O e inclinata di $\frac{\pi}{12}$ rispetto alla direzione orizzontale [**2 punti**].

$$I_t = \frac{17}{2}m\ell^2$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. Come prima cosa scriviamo i vettori posizione (e le velocità) dei punti di interesse per il calcolo delle energie potenziale e cinetica, indicando con C il centro di massa di OA:

$$
\begin{aligned}
A - O &= -2L(\cos\vartheta \underline{e}_x + \sin\vartheta \underline{e}_y) \\
&\Rightarrow \quad 2L\dot{\vartheta}(\sin\vartheta \underline{e}_x - \cos\vartheta \underline{e}_y) = \underline{v}_A = \underline{\omega e}_z \wedge (A-O) = 2L\omega(\sin\vartheta \underline{e}_x - \cos\vartheta \underline{e}_y) \\
&\Rightarrow \quad \underline{\omega} = \dot{\vartheta}\underline{e}_z \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega}^2 = \dot{\vartheta}^2 \\
C - O &= \frac{1}{2}(A-O) = -L(\cos\vartheta \underline{e}_x + \sin\vartheta \underline{e}_y) \\
P - O &= s(\sin\vartheta \underline{e}_x - \cos\vartheta \underline{e}_y) \\
&\Rightarrow \quad \underline{v}_P = \dot{s}(\sin\vartheta \underline{e}_x - \cos\vartheta \underline{e}_y) + s\dot{\vartheta}(\cos\vartheta \underline{e}_x + \sin\vartheta \underline{e}_y) \\
&\qquad = (\dot{s}\sin\vartheta + s\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\underline{e}_x + (-\dot{s}\sin\vartheta + s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\underline{e}_y \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_P^2 = \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 \\
\|P - A\|^2 &= s^2 + 4L^2.
\end{aligned}
$$

Energia cinetica. Utilizzando il momento d'inerzia $I^{OA}_{O,zz} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}m4L^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}mL^2$:

$$
T = T^{AB} + T^P = \frac{1}{2}I^{OA}_{O,zz}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\underline{v}_P^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}mL^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}ms^2\dot{\vartheta}^2 = m\left(\frac{1}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}s^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}L^2\dot{\vartheta}^2\right).
$$

Energia potenziale. Scegliendo la quota del punto O come livello ad energia potenziale gravitazionale nulla ed eliminando le costanti:

$$
\begin{aligned}
V &= V_g^{OA} + V_g^P + V_k^{AP} = \frac{1}{\sqrt{2}}mgy_C + mgy_P + \frac{1}{2}k\|P-A\|^2 \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}mgL\sin\vartheta - mgs\cos\vartheta + \frac{1}{2}\frac{mg}{\sqrt{2}L}s^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}mg\left(\frac{1}{2L}s^2 - \sqrt{2}s\cos\vartheta - L\sin\vartheta\right).
\end{aligned}
$$

Controlliamo che l'energia potenziale trovata abbia l'Hessiana suggerita nel testo:

$$
\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2}}mg\left(\frac{s}{L} - \sqrt{2}\cos\vartheta\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2}}mg\left(\sqrt{2}s\sin\vartheta - L\cos\vartheta\right)
$$

e

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}mg\frac{1}{L}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s\partial\vartheta} = mg\sin\vartheta, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}mg\left(\sqrt{2}s\cos\vartheta + L\sin\vartheta\right),
$$

da cui

$$
B = \frac{1}{\sqrt{2}}mg\begin{pmatrix} \frac{1}{L} & \sqrt{2}\sin\vartheta \\ \sqrt{2}\sin\vartheta & \sqrt{2}s\cos\vartheta + L\sin\vartheta \end{pmatrix}.
$$

Configurazioni di equilibrio. Analizzando il disegno e la fisica del problema, si possono immediatamente riconoscere le due configurazioni di equilibrio in cui O e P coincidono e l'asta OA è verticale:

$$
c_1 : \left(s_1 = 0, \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}\right), \; c_2 : \left(s_2 = 0, \vartheta_2 = \frac{3\pi}{2}\right)
$$

e poi determinarne la stabilità grazie alla matrice Hessiana appena calcolata:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}mg\begin{pmatrix} \frac{1}{L} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & L \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \det B_1 = -\frac{1}{2}m^2g^2 < 0 \;\Rightarrow\; \text{autovalori discordi} \;\Rightarrow\; c_1 \text{ instabile,} \\
B_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}mg\begin{pmatrix} \frac{1}{L} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -L \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \det B_2 = -\frac{3}{2}m^2g^2 \;\Rightarrow\; \text{autovalori discordi} \;\Rightarrow\; c_2 \text{ instabile.}
\end{aligned}
$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Per stabilire se ci siano o meno altre configurazioni di equilibrio procediamo imponendo pari a 0 le derivate prime di V rispetto alle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{L} - \sqrt{2}\cos\vartheta = 0 \\ \sqrt{2}s\sin\vartheta - L\cos\vartheta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \sqrt{2}L\cos\vartheta \\ \cos\vartheta\,(2\sin\vartheta - 1) = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata quando $\cos\vartheta = 0$ (e allora ritroviamo le configurazioni c_1 e c_2) oppure quando $\sin\vartheta = \frac{1}{2}$, cioè per $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ oppure $\vartheta = \frac{5\pi}{6}$. Otteniamo allora le ulteriori due configurazioni di equilibrio

$$c_3 : \left(s_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}L, \vartheta_3 = \frac{\pi}{6}\right),\ c_4 : \left(s_4 = -\frac{\sqrt{6}}{2}L, \vartheta_4 = \frac{5\pi}{6}\right)$$

con la medesima stabilità:

$$B_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}}mg\begin{pmatrix} \frac{1}{L} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 2L \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \det B_{3,4} = \dfrac{3}{4}m^2g^2 > 0 \\ \operatorname{tr} B_{3,4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{L} + 2L\right)mg > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{ autovalori positivi } \Rightarrow c_3, c_4 \text{ stabili.}$$

Accelerazioni incipienti. Calcoliamo la Lagrangiana del sistema

$$L = T - V = m\left(\frac{1}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}s^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}L^2\dot{\vartheta}^2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}mg\left(\frac{1}{2L}s^2 - \sqrt{2}s\cos\vartheta - L\sin\vartheta\right).$$

Determiniamo le accelereazioni richieste utilizzando le equazioni di moto

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \dfrac{\partial L}{\partial s} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \dfrac{\partial L}{\partial \vartheta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{s} = s\dot{\vartheta}^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}g\left(\dfrac{1}{L}s - \sqrt{2}\cos\vartheta\right) \\ 2s\dot{s}\dot{\vartheta} + s^2\ddot{\vartheta} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}L^2\ddot{\vartheta} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}g\left(\sqrt{2}s\sin\vartheta - L\cos\vartheta\right) \end{cases}$$

e sostituendo le condizioni date $s(0) = L$, $\vartheta(0) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{s}(0) = 0$ e $\dot{\vartheta}(0) = 0$:

$$\begin{cases} \ddot{s}(0) = 0 \\ \ddot{\vartheta}(0) = \dfrac{3}{2}\dfrac{1-\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\dfrac{g}{L} = \dfrac{3(1-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{2(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}\dfrac{g}{L} = 3\dfrac{(1-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{2}\dfrac{g}{L} = \dfrac{3}{2}\left(7-5\sqrt{2}\right)\dfrac{g}{L}. \end{cases}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio 2.
Quando necessario, utilizzaremo la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_z)$ con $\underline{e}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_y)$ e $\underline{e}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{e}_x + \underline{e}_y)$.
Centro di massa. Per simmetria, O è il centro di massa del sottosistema costituito dalle due lamine quadrate. Chiamiamo invece G il centro di massa dell'asta AB. Allora

$$C - O = \frac{m(D-O) + 3m(G-O) + 4m(O-O)}{8m} = \frac{2\underline{e}_1 - 3\underline{e}_1}{8}\ell = -\frac{1}{8}\ell\underline{e}_1 = -\frac{1}{8\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_y).$$

Momenti per una lamina. Chiamando K il centro di massa di una delle due lamine, utilizziamo il Teorema di Huygens-Steiner per calcolare $\underline{I}_O^{\text{lamina}}$ e ottenere poi i momenti richiesti:

$$\begin{aligned}\underline{I}_O^{\text{lamina}} &= \underline{I}_K^{\text{lamina}} + 2m\|K-O\|^2 \left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\right) = \frac{1}{12}2m3\ell^2 \left(\underline{\mathbb{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right) + 2m\frac{3}{2}\ell^2 \left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\ell^2 \left(\underline{\mathbb{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right) + 3m\ell^2 \left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\right),\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}I_r^{\text{lamina}} &= \underline{e}_z \cdot \underline{I}_O^{\text{lamina}}\underline{e}_z = m\ell^2 + 3m\ell^2 = 4m\ell^2 \\ I_s^{\text{lamina}} &= \underline{e}_2 \cdot \underline{I}_O^{\text{lamina}}\underline{e}_2 = \frac{1}{2}m\ell^2\end{aligned}$$

Tensori. I momenti rispetto a r e s del sistema costituito da entrambe le lamine sono il doppio di quelle calcolate; poiché la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_z)$ è principale per tale sottosistema e grazie al Teorema degli assi Perpendicolari otteniamo immediatamente il tensore in O:

$$\underline{I}_O^{\text{lamine}} = m\ell^2 \left(7\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 8\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right).$$

Per quanto riguarda disco e asta, basta applicare il Teorema di Huygens-Steiner ai rispettivi tensori centrali d'inerzia:

$$\begin{aligned}\underline{I}_O^{\text{disco}} &= \underline{I}_D^{\text{disco}} + m\|D-O\|^2 \left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\right) = \frac{1}{4}m\ell^2 \left(\underline{\mathbb{1}} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right) + 4m\ell^2 \left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\right) \\ &= m\ell^2 \left(\frac{1}{4}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{17}{4}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{9}{2}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right), \\ \underline{I}_O^{\text{asta}} &= \underline{I}_G^{\text{asta}} + m\|G-O\|^2 \left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\right) = \frac{1}{12}3m16\ell^2 \left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\right) + 3m\ell^2 \left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\right) \\ &= 7m\ell^2 \left(\underline{\mathbb{1}} - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\right).\end{aligned}$$

Momento rispetto a t. Sommando i tre tensori appena trovati otteniamoil tensore di tutto il sistema rispetto ad O:

$$\underline{I}_O = m\ell^2 \left(\frac{29}{4}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{49}{4}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{39}{2}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right) = \frac{1}{4}m\ell^2 \left(29\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 49\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 78\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right).$$

Osservando inoltre che l'angolo tra t e AB è pari a $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, la direzione della retta t è

$$\underline{n} := \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\underline{e}_1 - \underline{e}_2\right)$$

e quindi

$$I_t = \underline{n} \cdot \underline{I}_O\underline{n} = \left[29(\underline{n} \cdot \underline{e}_x)^2 + 49(\underline{n} \cdot \underline{e}_y)^2 + 78(\underline{n} \cdot \underline{e}_z)^2\right]\frac{1}{4}m\ell^2 = \left(29\frac{3}{4} + 49\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}m\ell^2 = \frac{17}{2}m\ell^2.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari