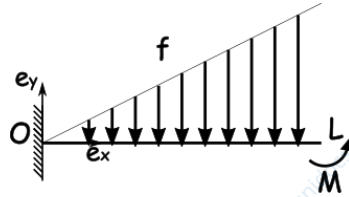


ESERCIZI SULLE TRAVI

(Tutorato del 03/06/2020)

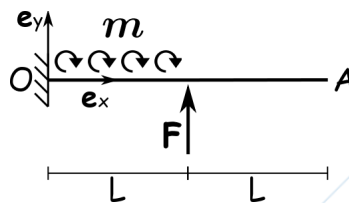
Esercizio 1. Una trave piana elastica di massa trascurabile, lunghezza L e rigidezza flessionale B è incastrata all'estremo O e libera all'estremo A . Una forza distribuita a densità $\mathbf{f} = -\frac{P}{L^2}\mathbf{e}_y$ (con $P > 0$) è esercitata su tutta la lunghezza della trave e un momento $\mathbf{M} = \beta PL\mathbf{e}_z$ (con $\beta > 0$) è esercitato nell'estremo A .



Scrivere

- (1) la reazione vincolare Φ_O ;
- (2) la funzione $y(x)$ che descrive la forma della trave all'equilibrio, in caso di piccole deflessioni;
- (3) il momento reattivo Γ_O in caso di piccole deflessioni;
- (4) il valore del parametro β per il quale all'equilibrio i due estremi O e A sono alla medesima quota.

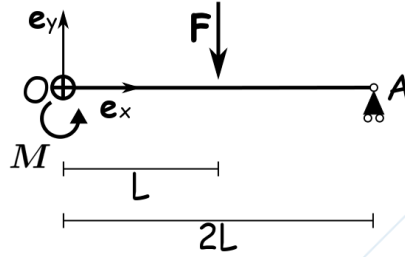
Esercizio 2. Una trave piana elastica di massa trascurabile, lunghezza $2L$ e rigidezza flessionale B è incastrata all'estremo O e libera all'estremo A . Una forza $\mathbf{F} = 2P\mathbf{e}_y$ (con $P > 0$) è esercitata nel punto medio della trave e un momento distribuito $\mathbf{m} = -P\mathbf{e}_z$ è esercitato da O al punto medio stesso.



Scrivere

- (1) la reazione vincolare Φ_O all'estremo O ;
- (2) la funzione $y(x)$ che descrive la forma della trave all'equilibrio, in caso di piccole deflessioni;
- (3) il momento vincolare Γ_O all'estremo O ;
- (4) l'angolo massimo $\vartheta_{\max} := \max\{|\vartheta(x)|\}$;
- (5) la condizione sul parametro P che assicura l'affidabilità dell'approssimazione per piccole deflessioni;
- (6) la massima deflessione $\delta_{\max} := \max\{|y(x)|\}$.

Esercizio 3. Una trave piana elastica di massa trascurabile, lunghezza $2L$ e rigidezza flessionale B è incernierata ad un estremo e supportata da un carrello orizzontale all'altro. Una forza $\mathbf{F} = -4F\mathbf{e}_y$ (con $F > 0$) è esercitata nel punto medio della trave, mentre all'estremo incernierato è esercitato un momento $\mathbf{M} = 2FL\mathbf{e}_z$.

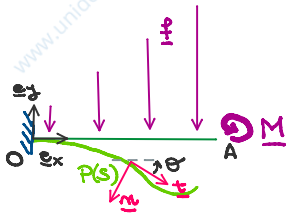


Scrivere

- (1) le reazioni vincolari Φ_O e Φ_A agli estremi;
- (2) la funzione $y(x)$ che descrive la forma della trave all'equilibrio, in caso di piccole deflessioni;
- (3) l'angolo massimo $\vartheta_{\max} := \max\{|\vartheta(x)|\}$;
- (4) la condizione sul parametro F che assicura l'affidabilità dell'approssimazione per piccole deflessioni.

Tutorato del 03/06/2020 **TRAVI**

1



OA = L

$f(s) = -\frac{P}{L^2} s e_y$ $M = \beta PL e_z$ con $\beta > 0$

1) $\underline{\Phi}_0 = ?$

2) forma $y(x)$ all'equilibrio per piccole deflessioni?

3) M_0 per piccole deflessioni?

4) per quale β $y_A = y(L) = 0$?

OSSERVAZIONI PRELIMINARI:

$\underline{t} = \cos\theta e_x - \sin\theta e_y$ $\underline{m} = -\sin\theta e_x - \cos\theta e_y$ $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{m} = -e_z$

$\underline{t}' = -\theta'(\sin\theta e_x + \cos\theta e_y) = c \underline{m} \Rightarrow c = \theta'$ e $\underline{\Gamma}' = \beta c \underline{b} = -\beta \theta' e_z$

* in O: $\underline{\Phi}_0 = -\underline{\Phi}(0)$ e $\underline{\Gamma}_0 = -\underline{\Gamma}(0)$, inoltre $y(0) = y_0 = 0$ e $\theta(0) = \theta_0 = 0$
 * in A: $\underline{\Phi}_A = \underline{\Phi}(L) = 0$ e $\underline{\Gamma}_A = \underline{\Gamma}(L) = \underline{M} \Rightarrow \underline{\Gamma}(L) = -\beta \theta'(L) e_z = \beta PL e_z \Rightarrow \theta'(L) = -\frac{\beta PL}{B}$ } condizioni al contorno

1) equilibrio totale:

$\underline{\Phi}_0 + \int_0^L \underline{f}(s) ds = 0 \Rightarrow \underline{\Phi}_0 = \int_0^L \frac{P}{L^2} s ds e_y = \frac{P}{L^2} \frac{L^2}{2} e_y = \frac{P}{2} e_y$

2) piccole deflessioni:

$|\theta| \ll 1 \Rightarrow \cos\theta \approx \cos(0) - \sin(0)\theta = 1$ e $\sin\theta \approx \sin(0) + \cos(0)\theta = \theta \Rightarrow \underline{t} \approx e_x - \theta e_y$
 sviluppo di Taylor attorno a 0 fino al 1° ordine e $\underline{t} = \underline{t}(s) = \frac{d}{ds}(x(s)e_x + y(s)e_y) = x'e_x + y'e_y$
 $\begin{cases} x' = 1 \Rightarrow x = s + c_1 \text{ con } x(0) = x_0 = 0 \Rightarrow x = s \\ y' = -\theta \Rightarrow y(x) = -\theta(x) \end{cases}$

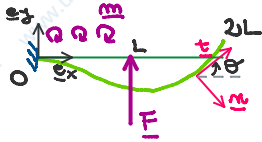
Usa le equazioni locali di equilibrio, le integro e scarico le condizioni iniziali per determinare le costanti di integrazione:

$\underline{\Phi}' + \underline{f} = 0 \Rightarrow \int \underline{\Phi}' = -\int \underline{f} \Rightarrow \underline{\Phi}(s) - \underline{\Phi}(0) = \frac{P}{L^2} \frac{s^2}{2} e_y \Rightarrow \underline{\Phi}_s = \frac{P}{2L^2} (s^2 - L^2) e_y$ controllo: $\underline{\Phi}_A = \underline{\Phi}(L) = 0$

$\underline{\Gamma}' + \underline{t} \times \underline{\Phi} + \underline{m} = 0 \Rightarrow -\beta \theta'' e_z + \frac{P}{2L^2} (x^2 - L^2) e_z = 0$
 $\Rightarrow \theta'' = \frac{P}{2BL^2} (x^2 - L^2)$ integrando $\theta' = \frac{P}{2BL^2} (\frac{x^3}{3} - L^2 x + c_1)$ con (4) $\Rightarrow c_1 = \frac{2}{3} (1 - 3\beta)L$
 $\Rightarrow \theta' = \frac{P}{6BL^2} [x^3 - 3L^2 x + 2(1 - 3\beta)L^3]$ con (3) $\Rightarrow c_2$
 $\Rightarrow \theta = \frac{P}{24BL^2} [x^4 - 6L^2 x^2 + 8(1 - 3\beta)L^3 x]$
 $\Rightarrow y = -\frac{P}{24BL^2} [\frac{x^5}{5} - 2L^2 x^3 + 4(1 - 3\beta)L^3 x^2 + c_3]$ con (2) $\Rightarrow c_3$
 $\Rightarrow y = -\frac{P}{24BL^2} [\frac{x^5}{5} - 2L^2 x^3 + 4(1 - 3\beta)L^3 x^2]$

3) $\underline{\Gamma}_0 = -\underline{\Gamma}(0) = \beta \theta'(0) e_z = (\frac{1}{3} - \beta) PL e_z$ 4) $y(L) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5} - 2 + 4 - 12\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{11}{60}$

2



lunghezza = 2L

$\underline{F} = 2P \underline{e}_y$ con $P > 0$
 $\underline{m} = -P \underline{e}_z$ su $[0, L]$

1) $\underline{\Phi}_0 = ?$

2) $y(x)$ all'equilibrio per piccole deflessioni?

3) $\Gamma_0 = ?$

4) massimo angolo $\theta_{max} = \max|\theta| = ?$

5) condizione sul carico P che rende l'approssimazione per piccole deflessioni affidabile?

massima deflessione $\delta_{max} = \max|y| = ?$

OSSERVAZIONI PRELIMINARI:

$\underline{t} = \cos\theta \underline{e}_x + \sin\theta \underline{e}_y$ $\underline{m} = \sin\theta \underline{e}_x - \cos\theta \underline{e}_y$ $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{m} = -\underline{e}_z$

$\underline{t}' = -\theta' (\sin\theta \underline{e}_x - \cos\theta \underline{e}_y) = c \underline{m} \Rightarrow c = -\theta'$ e $\underline{\Gamma} = \mathcal{B} c \underline{b} = \mathcal{B} \theta' \underline{e}_z \rightarrow \underline{\Gamma}' = \mathcal{B} \theta'' \underline{e}_z$

* in 0: $\underline{\Phi}_0 = -\underline{\Phi}(0)$ ①

$\underline{\Gamma}_0 = -\underline{\Gamma}(0)$ ②

$\theta(0) = 0$ ⑤

$y(0) = 0$ ⑥

* in 2L: $\underline{\Phi}(2L) = \underline{0}$ ③

$\underline{\Gamma}(2L) = \underline{0} \Rightarrow \theta'(2L) = 0$ ④

* in L: \underline{F} è una forza concentrata \rightarrow $[[\underline{\Phi}(L)]] = -\underline{F}$ ⑦

ma non c'è momento concentrato \rightarrow $[[\underline{\Gamma}(L)]] = 0 \Rightarrow \mathcal{B}[\theta'(L)] \underline{e}_z = 0 \Rightarrow$ $[[\theta'(L)]] = 0$ ⑧

trave elastica \rightarrow $[[\theta(L)]] = 0$ ⑨ e $[[y(L)]] = 0$ ⑩

equilibrio totale:

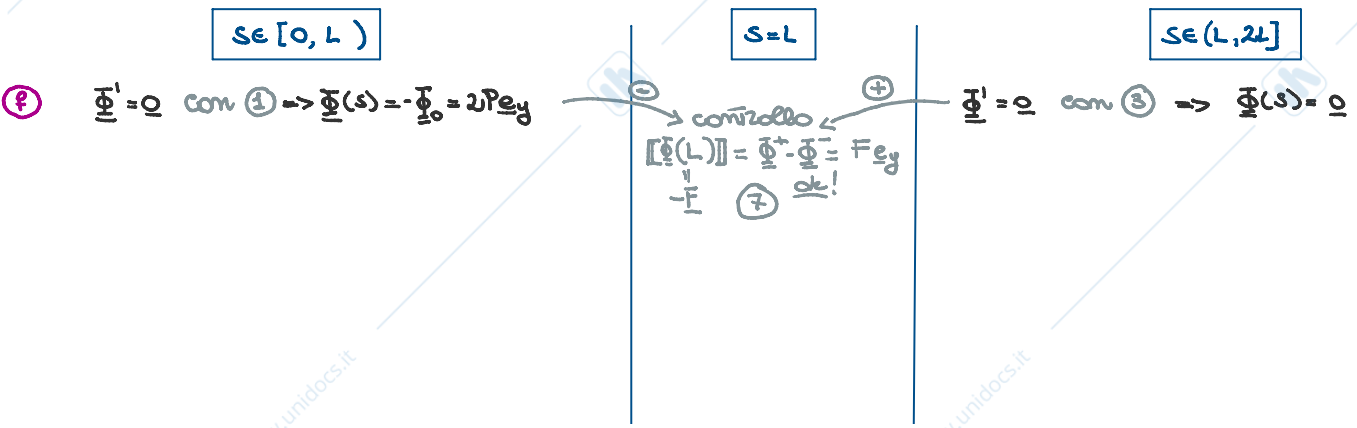
Ⓕ $\underline{\Phi}_0 + \underline{F} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\Phi}_0 = -2P \underline{e}_y$

piccole deflessioni:

$|\theta| \ll 1 \forall \theta \Rightarrow \cos\theta \approx \cos(0) - \sin(0)\theta = 1$ e $\sin\theta \approx \sin(0) + \cos(0)\theta = \theta$ $\rightarrow \underline{t} \approx \underline{e}_x + \theta \underline{e}_y$
 (Ⓓ) sviluppo di Taylor attorno a 0 fino al 1° ordine e $\underline{t} = \underline{p}'(s) = \frac{d}{ds} (x(s) \underline{e}_x + y(s) \underline{e}_y) = x' \underline{e}_x + y' \underline{e}_y$
 $\begin{cases} x' = 1 \rightarrow x = s + \cos\theta & \text{con } x(0) = x_0 = 0 \Rightarrow x = s \\ y' = \theta \rightarrow y(x) = \theta(x) \end{cases}$

Uso le equazioni locali di equilibrio, le integro e scordo le condizioni iniziali per determinare le costanti di integrazione.

Ho un salto in L \Rightarrow divido la trave in 2 e uso le condizioni di salto come racconto:



$\Gamma' + \underline{t} \times \underline{\Phi} + \underline{m} = \underline{0} \Rightarrow B\theta'' + 2P - P = 0$
 $\theta'' = -\frac{P}{B} \rightarrow \theta' = -\frac{P}{B}x + c_1^-$

$\Gamma' + \underline{t} \times \underline{\Phi} + \underline{m} = \underline{0} \Rightarrow B\theta'' = 0$
 $\theta'' = 0 \rightarrow \theta' = c_1^+ \text{ con } c_1^+ = 0$

$\theta^+(L) = \theta^-(L)$
 $c_1^- = \frac{PL}{B}$
 $\Gamma_0 = -B\theta'(0)e_z$
3) $\Gamma_0 = -PLe_z$

$\theta' = \frac{P}{B}(L-x) \rightarrow \theta = \frac{P}{B}\left(-\frac{x^2}{2} + Lx + c_2^-\right)$ con $c_2^- = 0$
 $y' = \theta = \frac{P}{2B}x(2L-x)$

$\theta^+(L) = \theta^-(L)$
 $c_2^+ = \frac{PL^2}{2B}$
 $y' = \theta = \frac{PL^2}{2B}$

$y = \frac{P}{2B}\left(-\frac{x^3}{3} + Lx^2 + c_3^-\right)$ con $c_3^- = 0$
 $y^+(L) = y^-(L)$
 $c_3^+ = -\frac{L}{3}$
 $y = \frac{PL^2}{2B}(x + c_3^+)$

2)
$$y(x) = \begin{cases} \frac{P}{6B}x^2(3L-x) & \text{per } x \in [0, L] \\ \frac{PL^2}{6B}(3x-L) & \text{per } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

$$e \quad \theta(x) = \begin{cases} \frac{P}{2B}x(2L-x) > 0 & \text{per } x \in [0, L] \\ \frac{PL^2}{2B} > 0 & \text{per } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

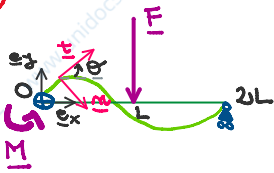
$$\theta'(x) = \begin{cases} \frac{P}{B}(L-x) > 0 & \text{per } x \in [0, L] \\ 0 & \text{per } x \in [L, 2L] \end{cases}$$

3) θ cresce da $\theta(0) = 0$ fino a $\theta(L) = \frac{PL^2}{2B}$ e poi resta costante $\Rightarrow \theta_{max} = \frac{PL^2}{2B}$ raggiunto $\forall x \in [L, 2L]$

4) y cresce da $y(0) = 0$ fino a $y(2L) = \frac{5}{6} \frac{PL^3}{B} \Rightarrow y_{max} = \frac{5}{6} \frac{PL^3}{B}$

5) $\theta_{max} \ll \frac{1}{3} \Rightarrow F \ll \frac{2B}{L^2}$

3



lunghezza = $2L$
 $\underline{F} = -4F \underline{e}_y$ $\underline{M} = 2FL \underline{e}_z$ con $F > 0$

- 1) $\underline{\Phi}_0 = ?$ $\underline{\Phi}_{2L} = ?$
- 2) $y(x)$ all'equilibrio per piccole deflessioni?

- 3) massimo angolo $\theta_{max} = \max|\theta| = ?$
- 4) massima deflessione $\delta_{max} = \max|y| = ?$
- 5) condizione sul carico F che rende l'approssimazione per piccole deflessioni affidabile?

OSSERVAZIONI PRELIMINARI:

$\underline{t} = \cos\theta \underline{e}_x + \sin\theta \underline{e}_y$ $\underline{m} = \sin\theta \underline{e}_x - \cos\theta \underline{e}_y$ $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{m} = -\underline{e}_z$
 $\underline{t}' = -\theta'(\sin\theta \underline{e}_x - \cos\theta \underline{e}_y) = c \underline{m} \Rightarrow c = -\theta'$ e $\underline{\Gamma} = B c \underline{b} = B \theta' \underline{e}_z \rightarrow \underline{\Gamma}' = B \theta'' \underline{e}_z$

* in 0 : $\underline{\Phi}_0 = -\underline{\Phi}(0)$ ¹ $\underline{\Gamma}(0) = -\underline{M} = -2FL \underline{e}_z \Rightarrow \theta'(0) = -\frac{2FL}{B}$ ² e $y(0) = 0$ ⁵
 * in $2L$: $\phi_L \underline{e}_y = \underline{\Phi}_{2L} = \underline{\Phi}(2L)$ ³ $\underline{\Gamma}(2L) = 0 \Rightarrow \theta'(2L) = 0$ ⁴ e $y(2L) = 0$ ⁶
casella orizzontale

* in L : \underline{F} è una forza concentrata \rightarrow $[[\underline{\Phi}(L)]] = -\underline{F}$ ⁷
 ma non c'è momento concentrato \rightarrow $[[\underline{\Gamma}(L)]] = 0 \Rightarrow B[\theta'(L)] \underline{e}_z = 0 \Rightarrow$ $[[\theta(L)]] = 0$ ⁸
 trave elastica \rightarrow $[[\theta(L)]] = 0$ ⁹ e $[[y(L)]] = 0$ ¹⁰

equilibrio totale:

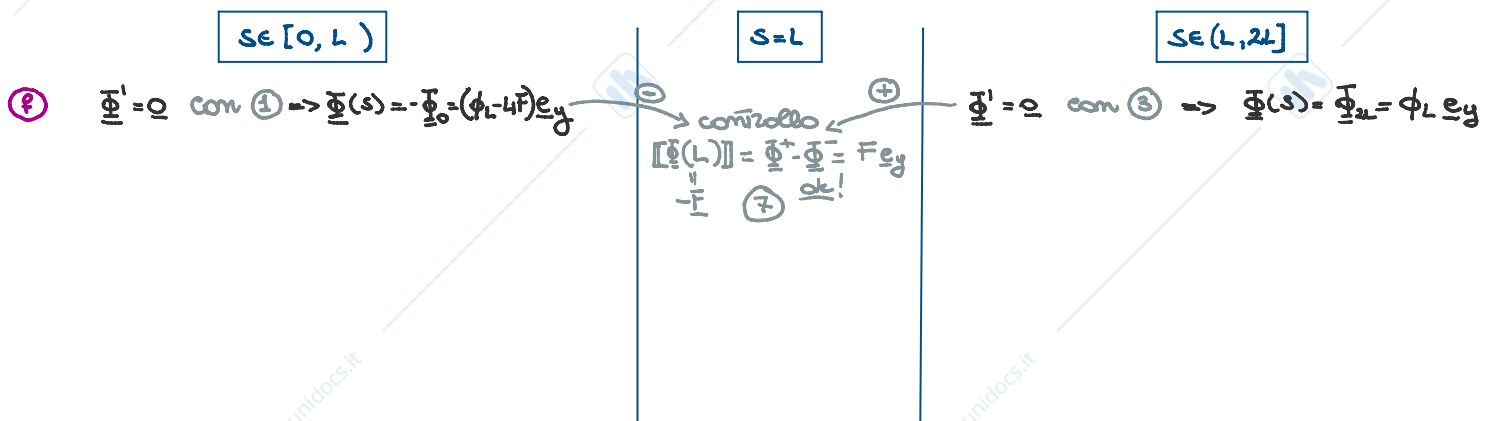
$\underline{\Phi}_0 + \underline{\Phi}_{2L} + \underline{F} = 0 \Rightarrow \phi_0 = -F - \phi_L = (4F - \phi_L) \underline{e}_y$

piccole deflessioni:

$|\theta| \ll 1 \forall \theta \Rightarrow \cos\theta \approx \cos(0) - \sin(0)\theta = 1$ e $\sin\theta \approx \sin(0) + \cos(0)\theta = \theta$ $\rightarrow \underline{t} \approx \underline{e}_x + \theta \underline{e}_y$
($\theta \neq 0$) sviluppo di Taylor attorno a 0 fino al 1° ordine
 e $\underline{t} = \underline{p}'(s) = \frac{d}{ds} (x(s) \underline{e}_x + y(s) \underline{e}_y)$
 $= x' \underline{e}_x + y' \underline{e}_y$
 $\begin{cases} x' = 1 \rightarrow x = s + \cos\theta \text{ con } x(0) = x_0 = 0 \Rightarrow x = s \\ y' = \theta \rightarrow y(x) = \theta(x) \end{cases}$

Uso le equazioni locali di equilibrio, le integro e scarico le condizioni iniziali per determinare le costanti di integrazione.

Ho un salto in $L \Rightarrow$ divido la trave in 2 e uso le condizioni di salto come raccordo:



(m) $\Gamma' + \underline{t} \times \underline{\Phi} + \underline{m} = \underline{0} \Rightarrow B\theta'' + \phi_L - F = 0$

$\theta'' = \frac{4F - \phi_L}{B} \rightarrow \theta' = \frac{4F - \phi_L}{B} x + c_1^- \text{ con } (2) \rightarrow c_1^- = -\frac{2FL}{B}$

com (3) $\theta^+(L) = \theta^-(L)$

$\frac{\phi_L L}{B} = -\frac{\phi_L L}{B} + \frac{2FL}{B}$

$\rightarrow \phi_L = F$

1) $\frac{F}{B} \phi_0 = 3F \epsilon y$
 $\frac{F}{B} \phi_{2L} = F \epsilon y$

$\theta' = \frac{F}{B}(3x - 2L) \rightarrow \theta = \frac{F}{B}(\frac{3x^2}{2} - 2Lx + c_2^-)$

$y' = \theta = \frac{F}{B}(\frac{3x^2}{2} - 2Lx + 2L^2 + c_2^+)$

$y = \frac{F}{B} [\frac{x^3}{2} - Lx^2 + (2L^2 + c_2^+)x + c_3^-]$

com (5) $\rightarrow c_3^- = 0$

$y = \frac{F}{B} [\frac{x^3}{2} - Lx^2 + (2L^2 + c_2^+)x]$

$\Gamma' + \underline{t} \times \underline{\Phi} + \underline{m} = \underline{0} \Rightarrow B\theta'' + \phi_L = 0$

$\theta'' = -\frac{\phi_L}{B} \rightarrow \theta' = -\frac{\phi_L}{B} x + c_1^+ \text{ con } (4) \rightarrow c_1^+ = \frac{2\phi_L}{B}$

$\theta' = \frac{F}{B}(2L - x) \rightarrow \theta = \frac{F}{B}(-\frac{x^2}{2} + 2Lx + c_2^+)$
 $y' = \theta$

$y = \frac{F}{B}(-\frac{x^3}{6} + Lx^2 + c_2^+x + c_3^+)$ com (6) $\rightarrow c_3^+ = -2c_2^+L$

$y = \frac{F}{B}(-\frac{x^3}{6} + Lx^2 + c_2^+x - 2c_2^+L - \frac{8}{3}L^3)$

com (10) $y^+(L) = y^-(L)$
 $c_2^+ = -\frac{5}{3}L^2$

$(x - \frac{2+\sqrt{2}}{3}L)(x - \frac{2-\sqrt{2}}{3}L)$

2) $y(x) = \begin{cases} \frac{F}{2B} x(x^2 - 2Lx + \frac{2}{3}L^2) & \text{per } x \in [0, L] \\ \frac{F}{6B} (-x^3 + 6Lx^2 - 10L^2x + 4L^3) & \text{per } x \in [L, 2L] \end{cases}$

e $\theta(x) = \begin{cases} \frac{3F}{2B} (x^2 - \frac{4}{3}Lx + \frac{2}{9}L^2) & \text{per } x \in [0, L] \\ -\frac{F}{2B} (x^2 - 4Lx + \frac{10}{3}L^2) & \text{per } x \in [L, 2L] \end{cases}$

$\theta'(x) = \begin{cases} \frac{3F}{B} (x - \frac{2}{3}L) & \text{per } x \in [0, L] \\ -\frac{F}{B} (x - 2L) > 0 & \text{per } x \in [L, 2L] \end{cases}$

3) θ' decresce da $\theta'(0) = \frac{FL^2}{3B}$ fino a $\theta'(\frac{2}{3}L) = -\frac{2FL^2}{9B}$ poi cresce fino a $\theta'(2L) = \frac{FL^2}{3B}$

$\Rightarrow \theta_{\max} = \max\{|\frac{FL^2}{3B}|, |-\frac{2FL^2}{9B}|\} = \frac{FL^2}{3B}$ raggiunto in $x=0$ e $x=2L$

4) y cresce da $y(0)=0$ fino a $y(\frac{2-\sqrt{2}}{3}L) = 2\frac{\sqrt{2}-1}{27}\frac{FL^3}{B}$, poi decresce fino a $y(2L - \frac{\sqrt{2}}{3}L) = -\frac{2}{9}\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{FL^3}{B}$ e poi cresce fino a $y(2L)=0$

$\Rightarrow \delta_{\max} = \frac{2}{9}\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{FL^3}{B}$

5) $\theta_{\max} \ll \delta \Rightarrow F \ll \frac{3B}{L^2}$