

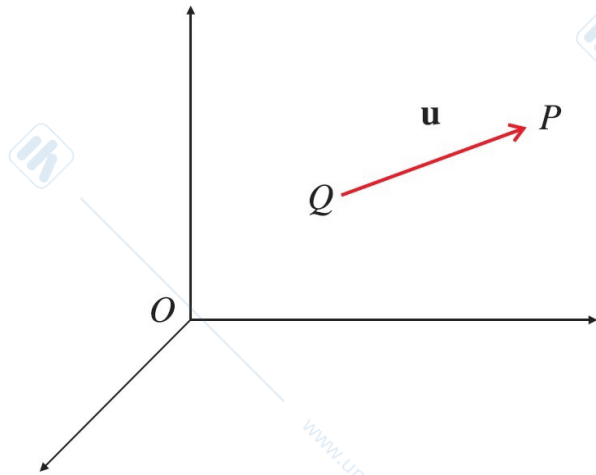
Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 1 del 22 Settembre 2020

1 Calcolo Vettoriale

1.1 Vettori e operazioni



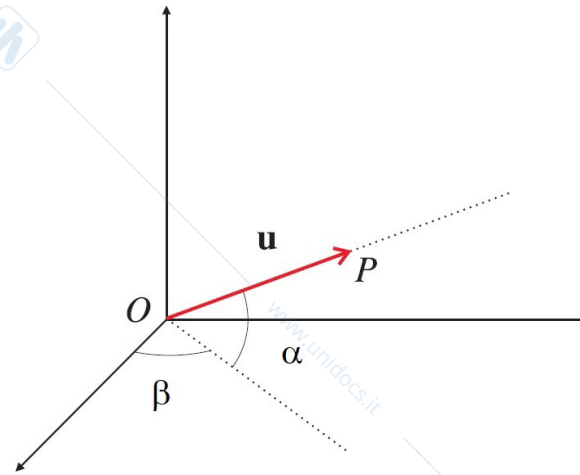
$$\mathbf{u} = P - Q, \quad \mathbf{u} = r_{Q/P}, \quad \mathbf{u} = \overrightarrow{QP}$$

modulo $|\mathbf{u}|, \quad u, \quad |QP|,$

Vettori liberi

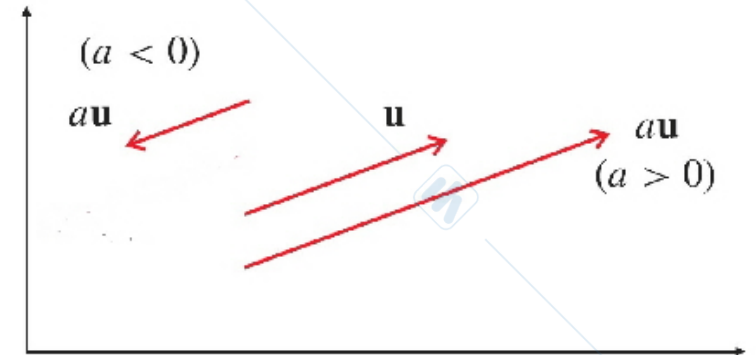
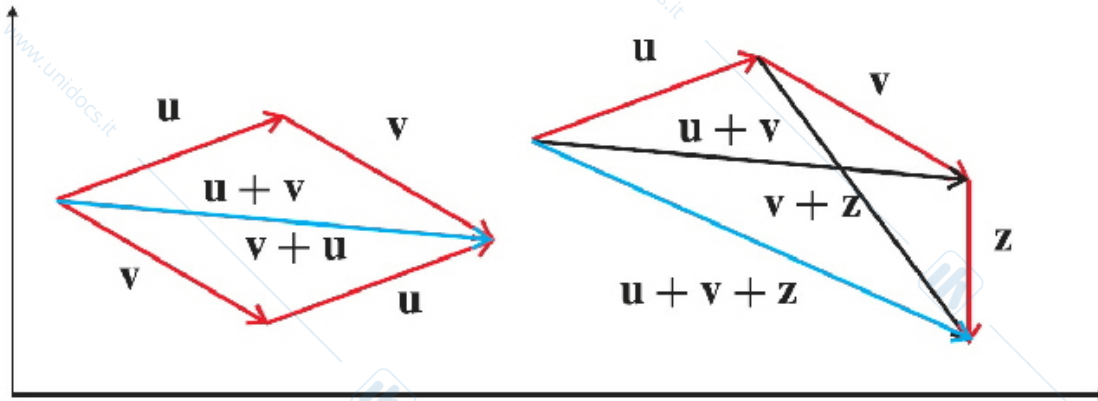
VS

Vettori applicati



$$\mathbf{u} = P - O, \quad \mathbf{u} = r_P, \quad \mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$$

versore $\mathbf{u} : |\mathbf{u}| = 1$



commutativa $u + v = v + u$

associativa $u + v + z = (u + v) + z = u + (v + z)$

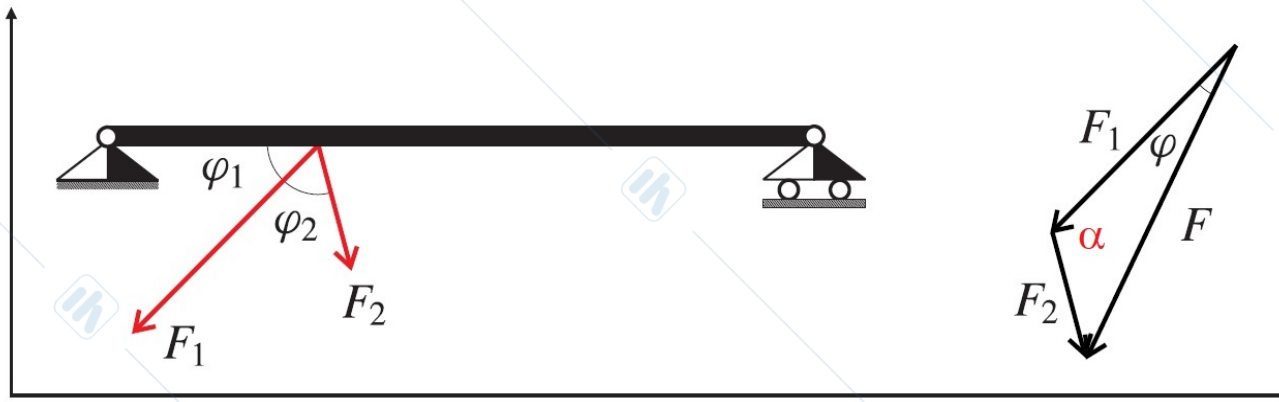
el. neutro $u + 0 = 0 + u = u$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad au : |au| = |a| |u| = |a| u, \quad \text{equiverso se } a > 0$

vettore opposto $-u = -1u : u - u = 0$ **vettore differenza** $u - v = u + (-v)$

versu $versu = u/u, \quad u = uversu$

Esempio 1. Si determini il vettore $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ sapendo che $F_1 = 15N$, $F_2 = 10N$, $\varphi_1 = \pi/4$ e $\varphi_2 = \pi/3$

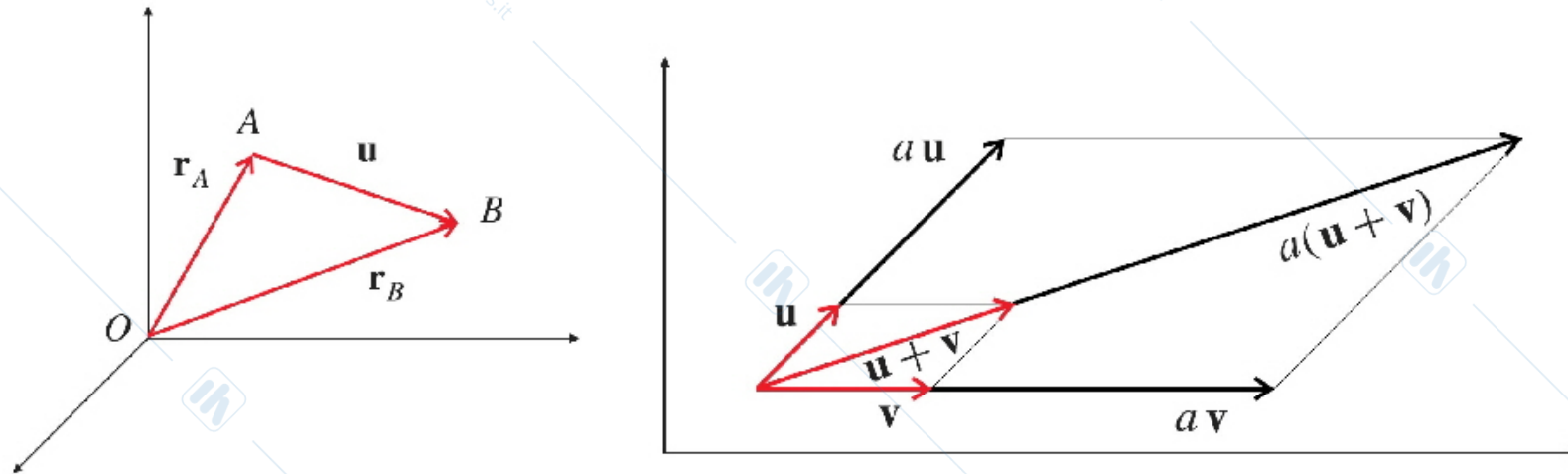


- Modulo \Leftrightarrow Teorema di Carnot

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad \alpha = \pi - \varphi_2 = 2\pi/3$$

- Direzione \Leftrightarrow Teorema dei seni

$$\frac{F}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \varphi} \Leftrightarrow \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \varphi} \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{F_2}{F} \sin \alpha$$

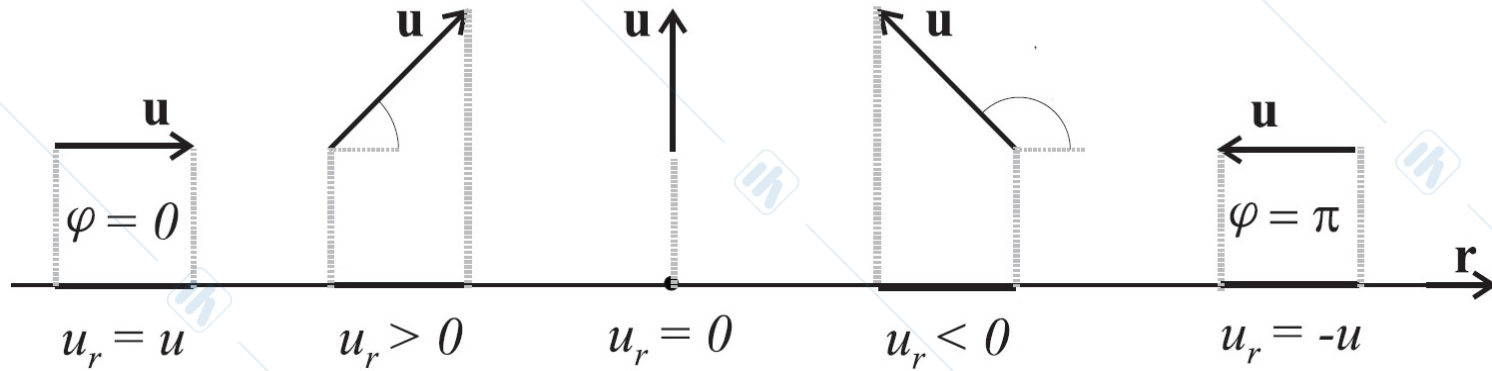


$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A, \quad B = A + \mathbf{u}$$

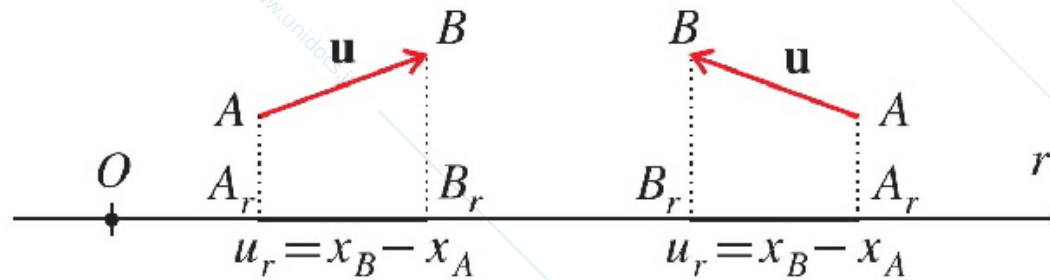
$$ab\mathbf{u} = a(b\mathbf{u}), \quad (a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}, \quad a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$

$(S, +, \cdot)$ spazio vettoriale su \mathfrak{R}

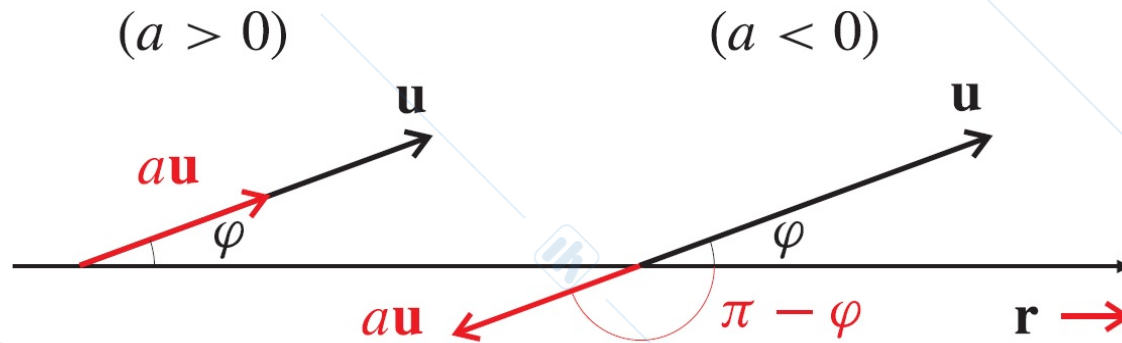
1.2 Componente di un vettore secondo una retta orientata



$$u_r = u \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]$$



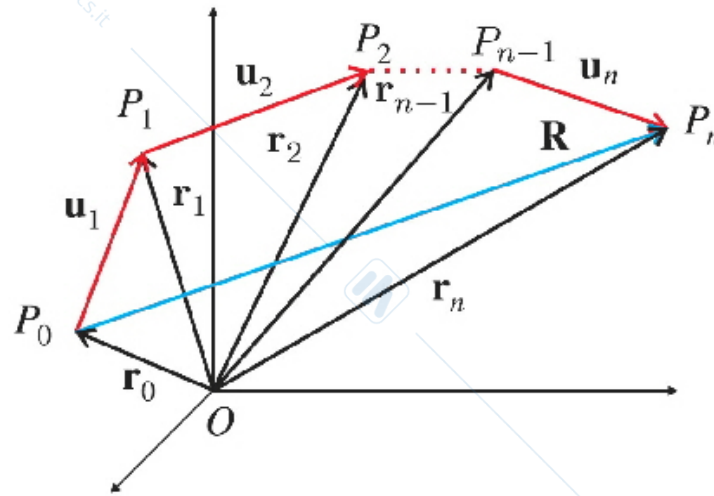
$$u_r = B_r - A_r$$



$$(a\mathbf{u})_r = au_r$$

se $a > 0$ $(a\mathbf{u})_r = |a\mathbf{u}| \cos \varphi = au \cos \varphi = au_r$

se $a < 0$ $(a\mathbf{u})_r = |a\mathbf{u}| \cos (\pi - \varphi) = -au \cos (\pi - \varphi) = au \cos \varphi = au_r$

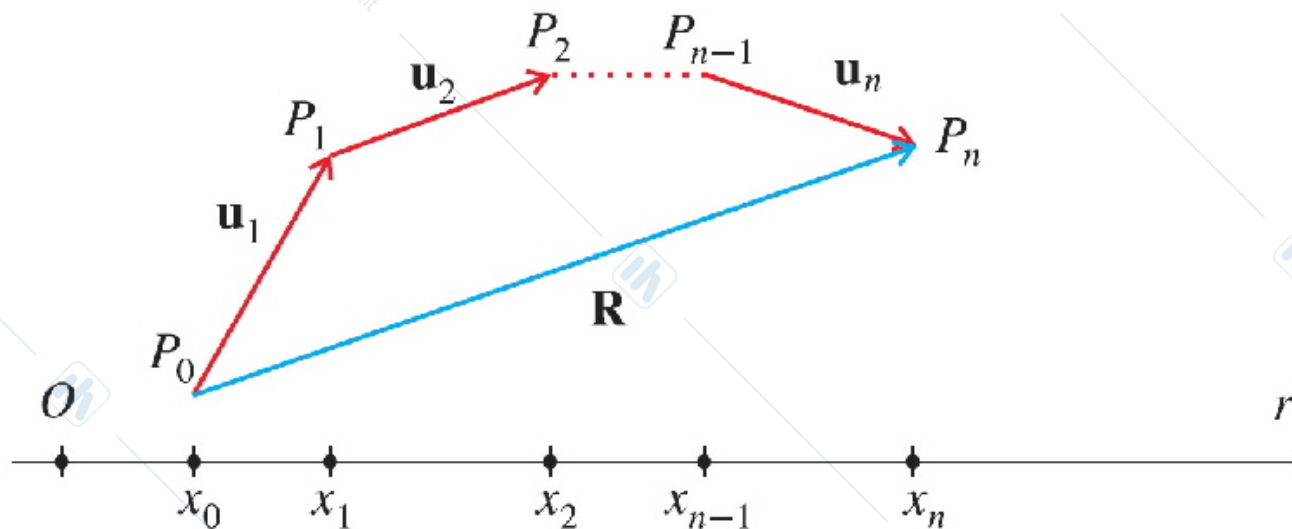


$$S = \{ \mathbf{u}_i, i = 1, \dots, n \} : \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{u}_n = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}$$

risultante
$$\mathbf{R} = \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_0$$

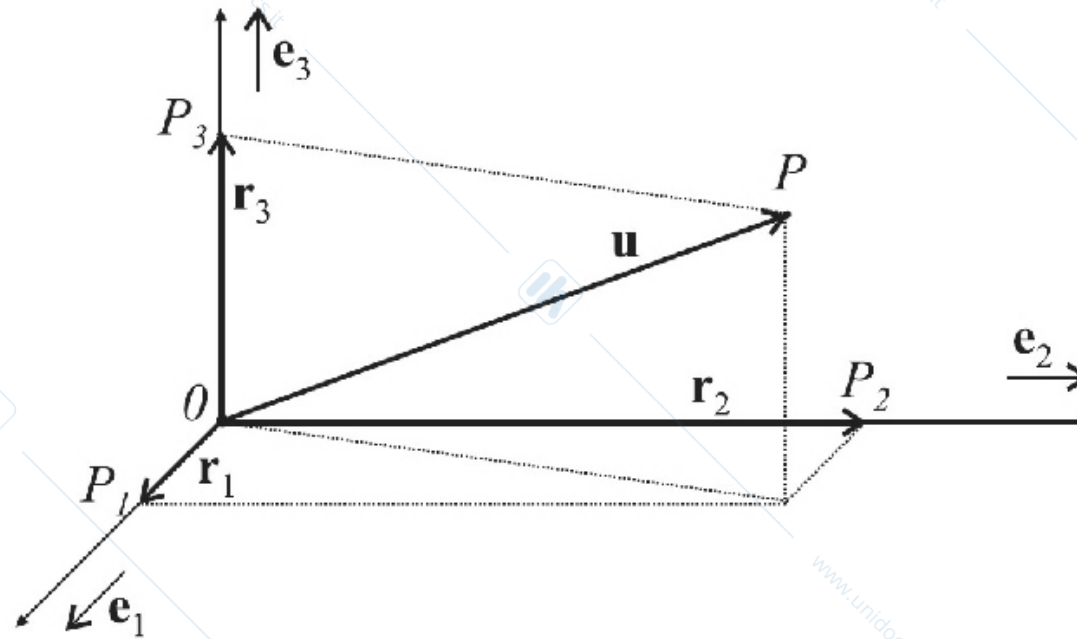
$$P_1 = P_0 + \mathbf{u}_1, \dots, P_n = P_{n-1} + \mathbf{u}_n \implies \mathbf{R} = P_n - P_0$$

se $P_0 = O \implies \mathbf{R} = \mathbf{r}_n,$ se $P_0 = P_n \implies \mathbf{R} = \mathbf{0},$



$$R_r = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \right)_r = \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_i)_r$$

Essendo $(\mathbf{u}_i)_r = x_i - x_{i-1} \implies \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_i)_r = x_n - x_0$



$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_i$$

$$u_i = x_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \mathbf{u} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

componenti cartesiane di \mathbf{u} : $x_1 \equiv u_1, x_2 \equiv u_2, x_3 \equiv u_3$

Le componenti cartesiane di un vettore lo individuano univocamente

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} \iff \begin{aligned} &(u_1 - v_1) \mathbf{e}_1 + (u_2 - v_2) \mathbf{e}_2 + (u_3 - v_3) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \iff \\ &(u_1 - v_1) = 0, (u_2 - v_2) = 0, (u_3 - v_3) = 0 \iff \\ &u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3 \end{aligned}$$

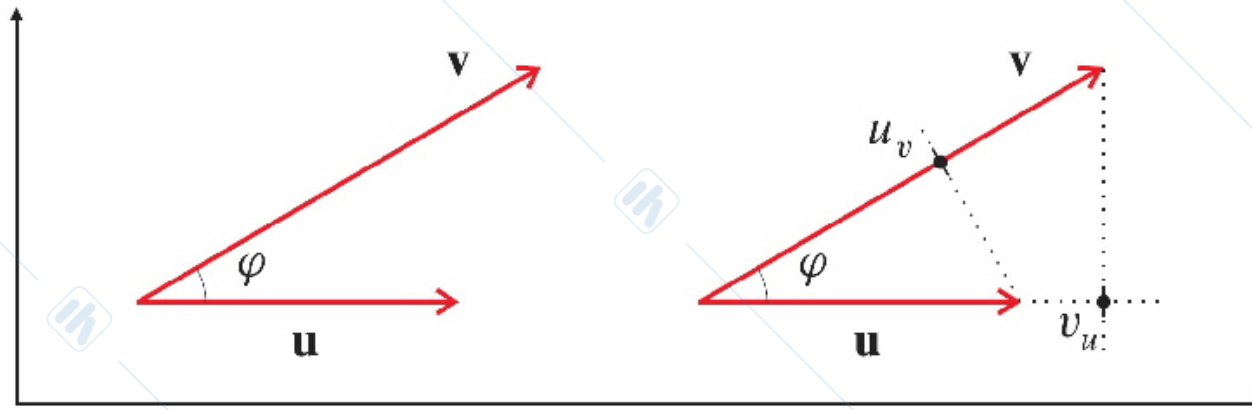
$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3, \quad u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

coseni direttori

$$\text{vers } \mathbf{u} = \frac{u_1}{u} \mathbf{e}_1 + \frac{u_2}{u} \mathbf{e}_2 + \frac{u_3}{u} \mathbf{e}_3, \quad \cos \alpha_i = \frac{u_i}{u}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{u_i}{u} \right)^2 = \frac{1}{u^2} \sum_{i=1}^3 u_i^2 = 1$$

1.3 Prodotto scalare, vettoriale e misto



$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]$$

$$(u_v = u \cos \varphi, \quad v_u = v \cos \varphi) \implies \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_v v = v_u u$$

$$u_r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff (\mathbf{u} \perp \mathbf{v}) \text{ oppure } (\mathbf{u} = \mathbf{0} \vee \mathbf{v} = \mathbf{0})$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},$$

$$(a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v}), \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}, \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j$$

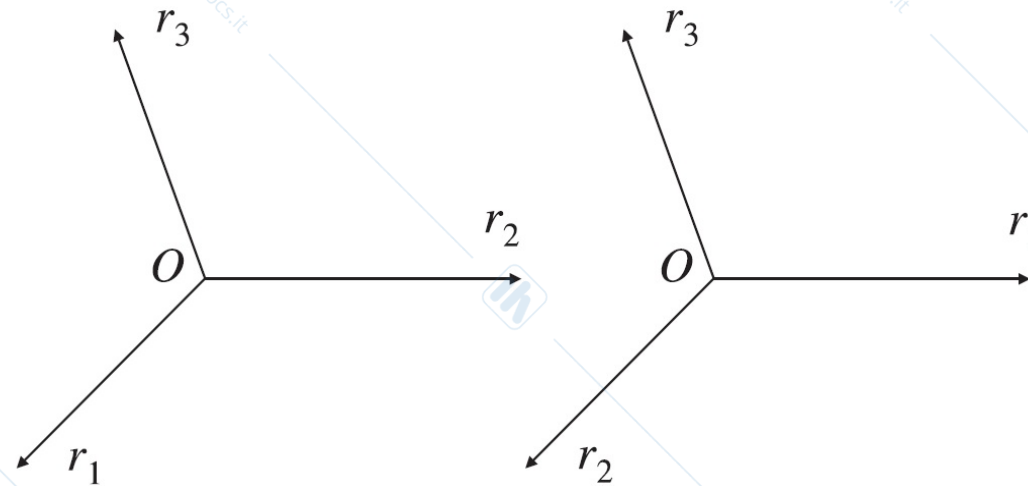
$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\begin{aligned} (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) &= u_1 \mathbf{e}_1 \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) \\ &+ u_2 \mathbf{e}_2 \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) + u_3 \mathbf{e}_3 \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) = v_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

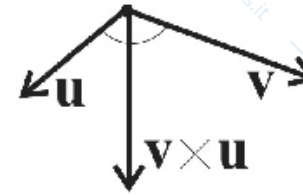
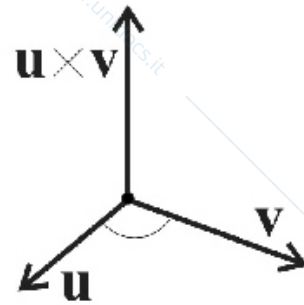


Una terna di assi orientati (ortogonale o non) $Or_1r_2r_3$ è **levogira** se per sovrapporre l'asse r_1 all'asse r_2 descrivendo un angolo $\varphi \leq \pi$ è necessaria una rotazione levogira (antioraria) attorno all'asse r_3 .

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = uv \sin \varphi$$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$: direzione normale al piano individuato da \mathbf{u} e \mathbf{v}

verso: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ levogira



$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$$

$$(a\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = a(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (a\mathbf{v}), \quad a \in \mathcal{R}$$

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}, \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^m b_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_j$$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ levogira $\begin{cases} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = 0, & i = 1, 2, 3 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \end{cases}$

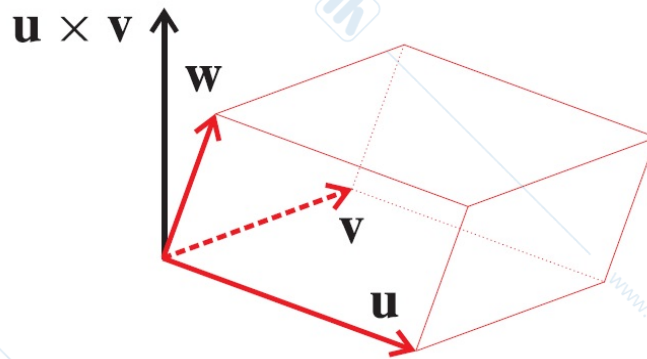
$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$$

$$\varepsilon_{ijh} = \begin{cases} 1, & ijh \text{ perm. pari} \\ -1, & ijh \text{ perm. dispari} \\ 0, & \text{almeno due indici uguali} \end{cases} \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \sum_{j,h} \varepsilon_{ijh} u_j v_h$$



prodotto misto $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| w_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} = \pm \text{volume del parallel. di spigoli } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$

propr. ciclica $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \iff$ almeno uno è nullo oppure sono complanari

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_1 w_1 + (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_2 w_2 + (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_3 w_3$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_i \left[\left(\sum_{j,h} \varepsilon_{ijh} u_j v_h \right) w_i \right]$$

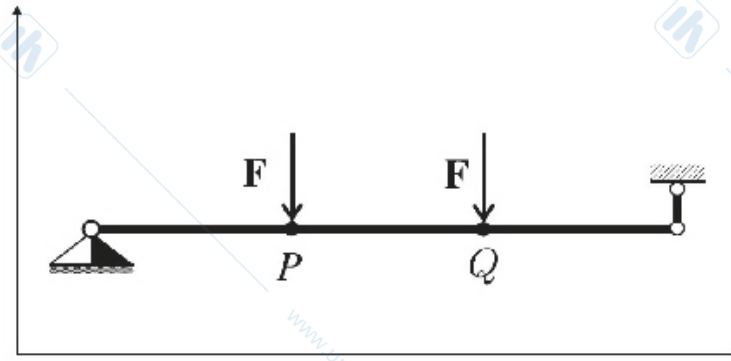
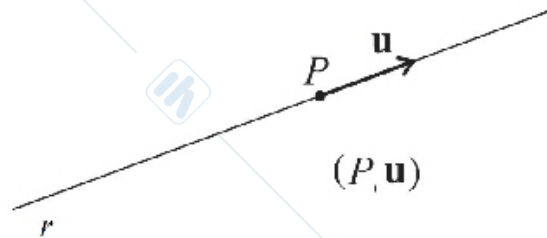
Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 02 del 24 Settembre 2020

1 Calcolo Vettoriale

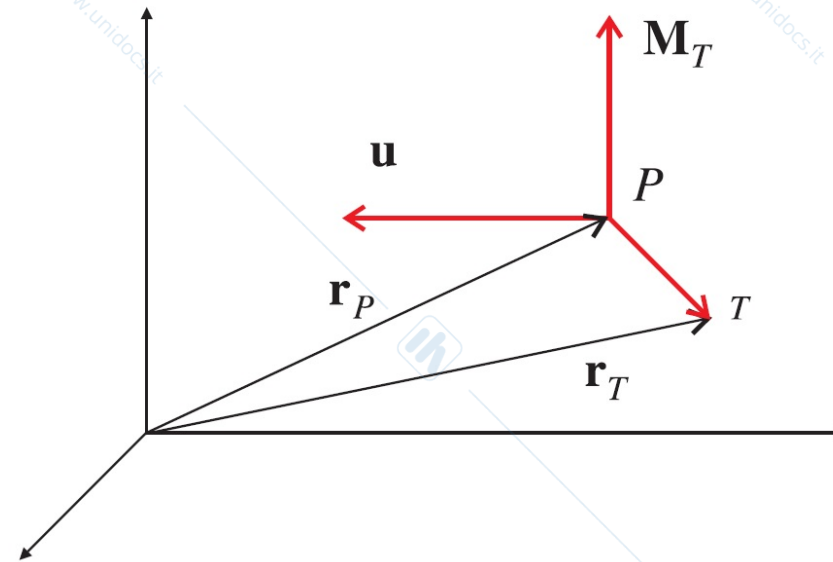
1.1 Momento polare



vettore applicato (P, \mathbf{u})

- P punto di applicazione
- r retta di applicazione

$$(P, \mathbf{u}) = (Q, \mathbf{v}) \iff P = Q, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}$$



Momento del vettore applicato (P, u) rispetto al polo T [risp. O]

$$\mathbf{M}_T = (P - T) \times \mathbf{u} = (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_T) \times \mathbf{u} \quad [\text{risp. } \mathbf{M}_O = (P - O) \times \mathbf{u} = \mathbf{r}_P \times \mathbf{u}] \quad (1)$$

Il vettore (libero) \mathbf{M}_T ha

- *modulo* pari all'area del parallelogramma dei due vettori $(P - T)$ e \mathbf{u} che coincide con ub , dove b (braccio) è la distanza di T dalla retta di applicazione di \mathbf{u}
- *direzione* normale al piano individuato dai due vettori $(P - T)$ e \mathbf{u}
- *verso* tale che i vettori $(P - T)$, \mathbf{u} e \mathbf{M}_T costituiscano una terna levogira.

$\mathbf{M}_T = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$ oppure $T \in r$ retta di applicazione di \mathbf{u}

Legge di variazione del momento al variare del polo

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_O + \mathbf{u} \times (T - O), \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{M}_S + \mathbf{u} \times (T - S)$$

$$\mathbf{M}_T = (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_T) \times \mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{r}_P \times \mathbf{u}} - \mathbf{r}_T \times \mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{M}_O} + \mathbf{u} \times \mathbf{r}_T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_T &= (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_T) \times \mathbf{u} = [(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_S) - (\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_S)] \times \mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{u}} - (\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{u} \\ &= \underbrace{\mathbf{M}_S} + \mathbf{u} \times (\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_S) = \mathbf{M}_S + \mathbf{u} \times (T - S) \end{aligned}$$

Il momento di (P, \mathbf{u}) non varia se si sposta il polo lungo una retta parallela ad \mathbf{u}

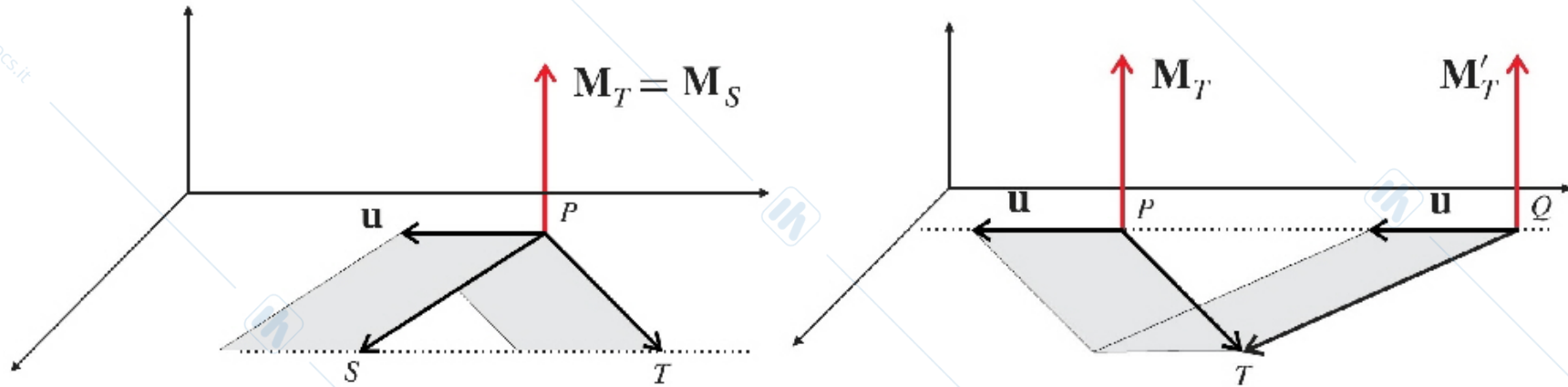
$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_S \quad \forall T, S \in s \parallel \mathbf{u}$$

Il momento non varia se si sposta il vettore \mathbf{u} lungo la sua retta di applicazione

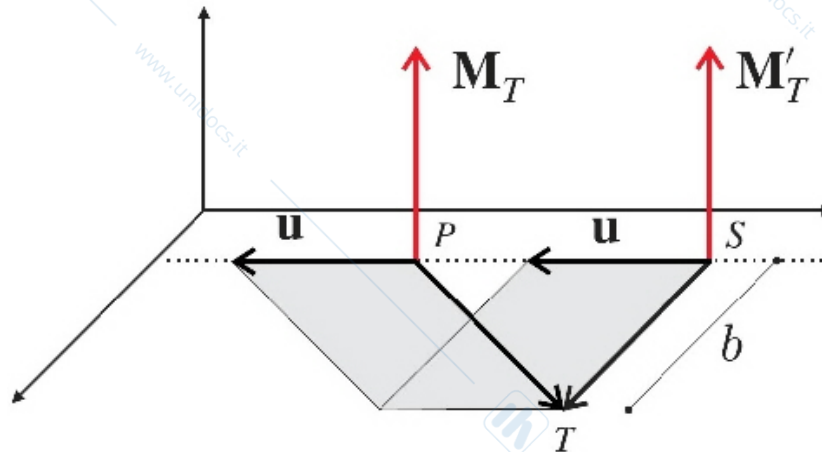
$$(P, \mathbf{u}), (Q, \mathbf{u}) : P, Q \in r \text{ retta di applicazione di } \mathbf{u} \implies \mathbf{M}_T = \mathbf{M}'_T$$

$$\mathbf{M}_T = (P - T) \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{M}'_T = (Q - T) \times \mathbf{u}$$

$$\mathbf{M}_T - \mathbf{M}'_T = (\mathbf{P} - \mathbf{T}) \times \mathbf{u} - (\mathbf{Q} - \mathbf{T}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$



$$|\mathbf{M}_T| = |(\mathbf{P} - \mathbf{T}) \times \mathbf{u}| = bu, \quad b \text{ braccio}$$

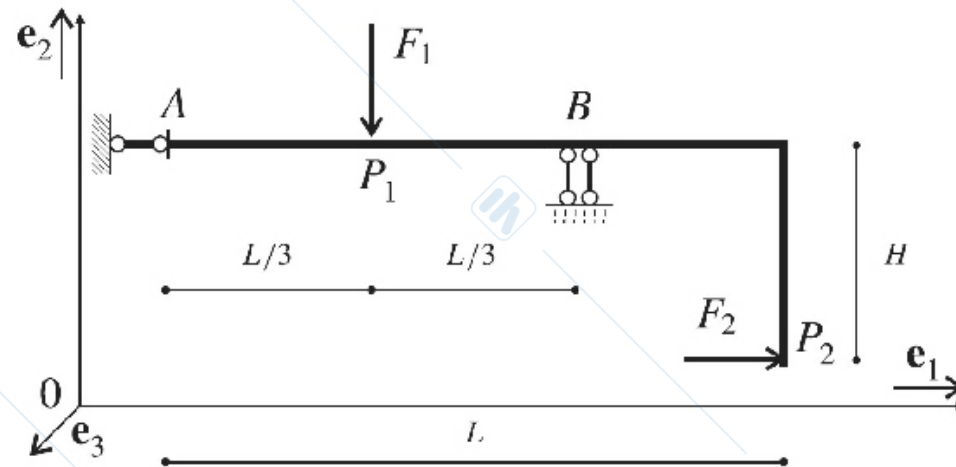


Componenti cartesiane del momento del vettore applicato (P, \mathbf{u}) rispetto al polo T

$$(P - T) = (x_P - x_T) \mathbf{i} + (y_P - y_T) \mathbf{j} + (z_P - z_T) \mathbf{k}, \quad \mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{M}_T = (P - T) \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} (y_P - y_T) & (z_P - z_T) \\ u_y & u_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} (x_P - x_T) & (z_P - z_T) \\ u_x & u_z \end{vmatrix} \mathbf{j} \\ + \begin{vmatrix} (x_P - x_T) & (y_P - y_T) \\ u_x & u_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Esercizio 2.1. Determinare i momenti dei vettori applicati (P_1, \mathbf{F}_1) ed (P_2, \mathbf{F}_2) rispetto ai poli A, B, P_1, P_2 .



$$\begin{aligned}
 (P_1, \mathbf{F}_1) : \quad \mathbf{M}_A &= (P_1 - A) \times \mathbf{F}_1 = L/3 \mathbf{e}_1 \times (-F_1 \mathbf{e}_2) = -L/3 F_1 \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{M}_B &= (P_1 - B) \times \mathbf{F}_1 = -L/3 \mathbf{e}_1 \times (-F_1 \mathbf{e}_2) = L/3 F_1 \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{M}_{P_1} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{P_2} = (P_1 - P_2) \times \mathbf{F}_1 = (-2L/3 \mathbf{e}_1 + H \mathbf{e}_2) \times (-F_1 \mathbf{e}_2) = 2L/3 F_1 \mathbf{e}_3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (P_2, \mathbf{F}_2) : \quad \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_{P_1} = \mathbf{M}_B &= (P_2 - A) \times \mathbf{F}_2 = (L \mathbf{e}_1 - H \mathbf{e}_2) \times (F_2 \mathbf{e}_1) = H F_2 \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{M}_{P_2} &= \mathbf{0},
 \end{aligned}$$

Momento polare di un sistema di vettori applicati $S = \{(P_i, \mathbf{u}_i), i = 1, \dots, n\}$

$$\mathbf{M}_T = \sum_{i=1}^n (P_i - T) \times \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_T) \times \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \times \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times (T - O), \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{M}_Q + \mathbf{R} \times (T - Q), \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_T = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i - \mathbf{r}_T \times \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i + \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \right) \times \mathbf{r}_T = \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times \mathbf{r}_T$$

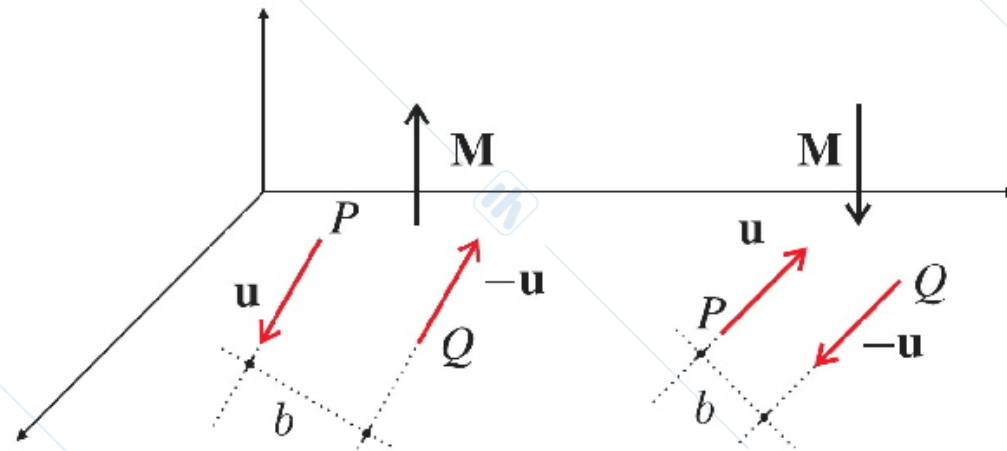
Teorema del Varignon. Il momento di un sistema di vettori applicati in uno stesso punto $S = \{(P, \mathbf{u}_i), i = 1, \dots, n\}$ coincide con il momento del risultante applicato in P

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{R} \times (T - P).$$

Il momento di un sistema di vettori applicati a risultante nullo non dipende dal polo e vale anche il viceversa

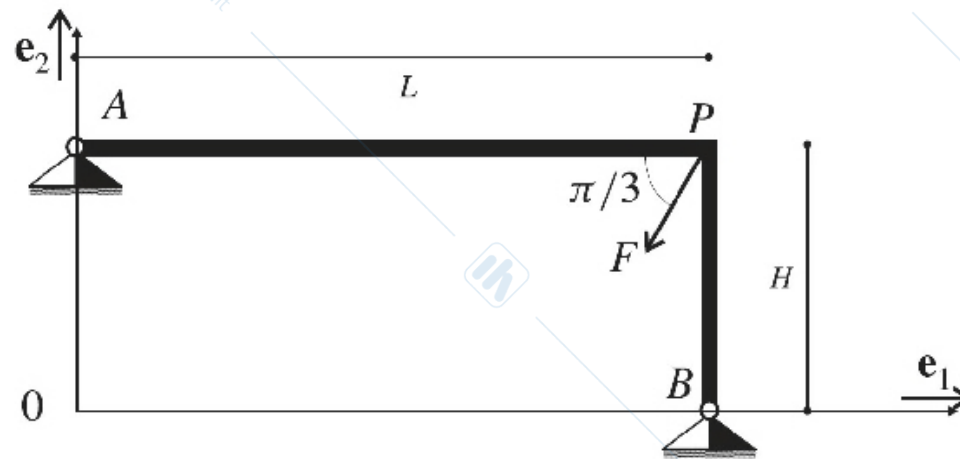
$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_Q \quad \forall T, Q \iff \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

Se $\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_Q \quad \forall T, Q$ allora dalla $(2)_2$ si ha che $\mathbf{R} \times (T - Q) = \mathbf{0} \quad \forall T, Q$ e quindi $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Viceversa se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ dalla $(2)_2$ si ha che $\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_Q \quad \forall T, Q$.



coppia $S = \{(P, \mathbf{u}), (Q, -\mathbf{u})\} \quad \mathbf{M} = (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{u}, \quad |\mathbf{M}| = bu$

Esercizio 2.2. Calcolare il momento del vettore applicato (P, \mathbf{F}) rispetto all'origine O



$$(P - O) = L\mathbf{e}_1 + H\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{F} = -F \cos \pi/3 \mathbf{e}_1 - F \sin \pi/3 \mathbf{e}_2 = -F/2 \mathbf{e}_1 - \sqrt{3}F/2 \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{M}_O = (P - O) \times \mathbf{F} = (L\mathbf{e}_1 + H\mathbf{e}_2) \times (-F/2 \mathbf{e}_1 - \sqrt{3}F/2 \mathbf{e}_2) = (F/2H - \sqrt{3}LF/2) \mathbf{e}_3$$

$$\{(P, \mathbf{F})\} \equiv \{(P, -F/2 \mathbf{e}_1), (P, -\sqrt{3}F/2 \mathbf{e}_2)\}$$

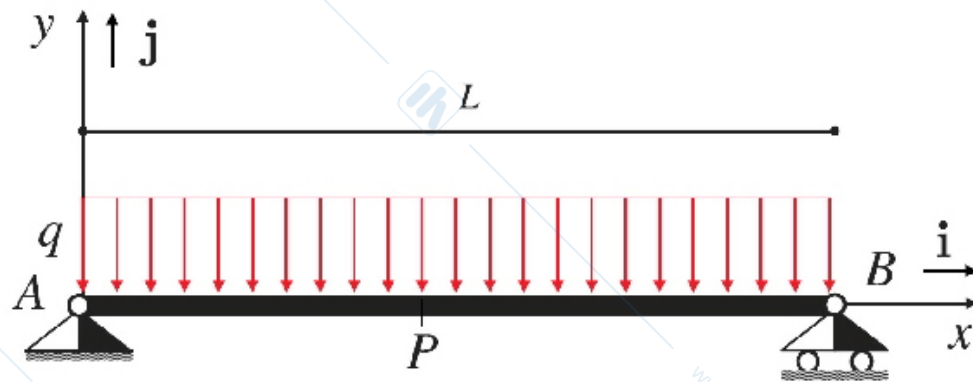
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{R} \times (O - P) = (-F/2 \mathbf{e}_1 - \sqrt{3}F/2 \mathbf{e}_2) \times (-L\mathbf{e}_1 - H\mathbf{e}_2)$$

1.2 Campi vettoriali

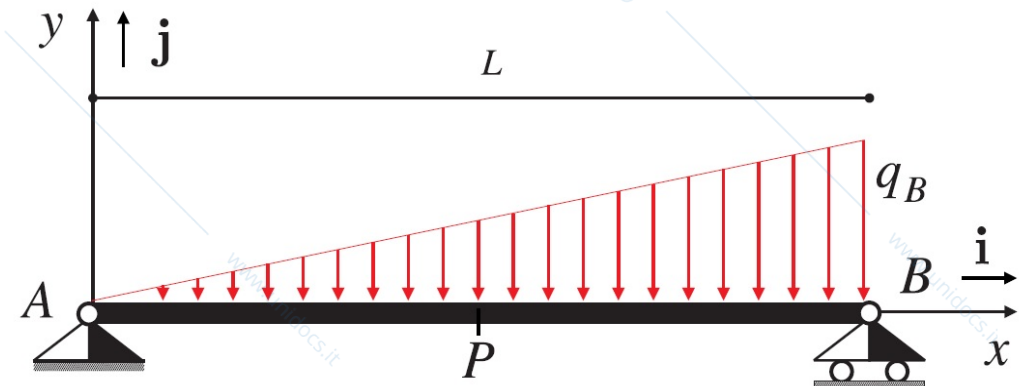
Si consideri un sistema di vettori applicati

$$S = \{(P, \mathbf{u}(P)), P \in \Omega\}$$

con $\mathbf{u}(P)$ campo vettoriale.



carico uniforme $\mathbf{u} = -q\mathbf{j}$, $\Omega = AB$



carico triangolare $\mathbf{u} = -q_B/Lx\mathbf{j}$, $\Omega = AB$

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(P) d\Omega, \quad \mathbf{M}_T = \int_{\Omega} (P - T) \times \mathbf{u}(P) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_T) \times \mathbf{u}(P) d\Omega,$$

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times \mathbf{r}_T, \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{M}_S + \mathbf{R} \times (\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_S)$$

Esercizio 2.3. Determinare il risultante e il momento risultante rispetto al polo A e al punto medio C del segmento AB dei carichi (i) uniforme e (ii) triangolare.

$$(i) \mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(P) d\Omega = - \int_0^L q\mathbf{j} dx = -qL\mathbf{j},$$

$$\mathbf{M}_A = \int_{\Omega} (P - A) \times \mathbf{u}(P) d\Omega = - \int_0^L x\mathbf{i} \times q\mathbf{j} dx = -q\mathbf{k} \int_0^L x dx = -q\frac{L^2}{2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_A + \mathbf{R} \times (C - A) = -q\frac{L^2}{2}\mathbf{k} - qL\mathbf{j} \times \frac{L}{2}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$(ii) \mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(P) d\Omega = - \int_0^L q_B/Lx\mathbf{j} dx = -q_B L/2\mathbf{j},$$

$$\mathbf{M}_A = \int_{\Omega} (P - A) \times \mathbf{u}(P) d\Omega = - \int_0^L x\mathbf{i} \times q_B/Lx\mathbf{j} dx = -q_B/L\mathbf{k} \int_0^L x^2 dx = -q_B L^2/3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_A + \mathbf{R} \times (C - A) = -q_B L^2/3\mathbf{k} - q_B L/2\mathbf{j} \times L/2\mathbf{i} = -q_B L^2/12\mathbf{k}$$

Esercizio 2.4. Determinare il luogo dei punti cui corrisponde momento nullo per il carico triangolare.

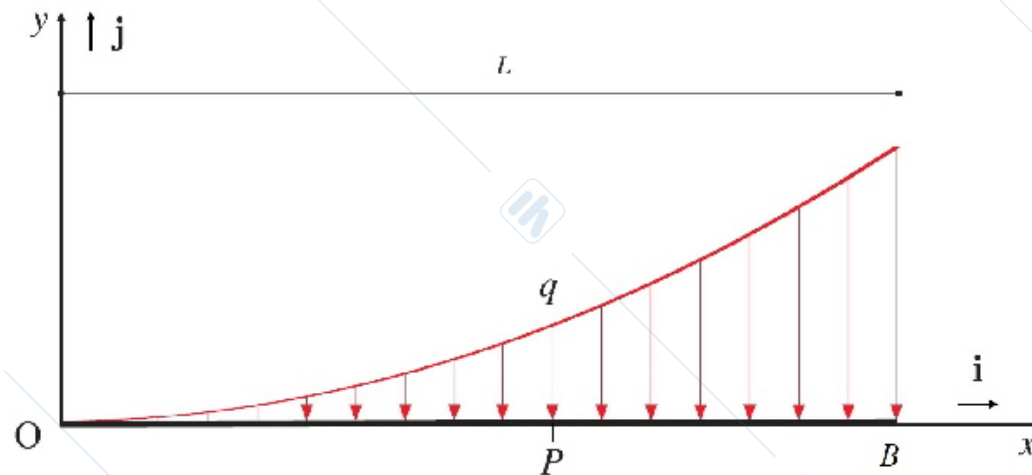
$$\mathbf{R} = -q_B L/2 \mathbf{j}, \quad \mathbf{M}_A = -q_B L^2/3 \mathbf{k}$$
$$D \equiv (x_D, y_D, z_D) : \mathbf{M}_D = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_D &= \mathbf{M}_A + \mathbf{R} \times (D - A) = -q_B L^2/3 \mathbf{k} - q_B L/2 \mathbf{j} \times (x_D \mathbf{i} + y_D \mathbf{j} + z_D \mathbf{k}) \\ &= -q_B L^2/3 \mathbf{k} + q_B x_D L/2 \mathbf{k} - q_B L/2 z_D \mathbf{i} = -q_B L/2 z_D \mathbf{i} + q_B L (-L/3 + x_D/2) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{0} \iff \begin{cases} z_D = 0 \\ -L/3 + x_D/2 = 0 \end{cases}$$

$$\{D \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{M}_D = \mathbf{0}\} = \{(2L/3, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 2.5. Determinare il luogo dei punti cui corrisponde momento nullo per il carico parabolico.



carico parabolico $u = -kx^2\mathbf{j}$, $\Omega = OB$

$$\mathbf{R} = -\int_0^L kx^2\mathbf{j}dx = -kL^3/3\mathbf{j}, \quad \mathbf{M}_O = -\int_0^L x\mathbf{i} \times kx^2\mathbf{j}dx = -kL^4/4\mathbf{k}$$

$$D \equiv (x_D, y_D, z_D) : \mathbf{M}_D = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_D &= \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times (D - O) = -kL^4/4\mathbf{k} - kL^3/3\mathbf{j} \times (x_D\mathbf{i} + y_D\mathbf{j} + z_D\mathbf{k}) \\ &= -kL^4/4\mathbf{k} + x_DkL^3/3\mathbf{k} - z_DkL^3/3\mathbf{i} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{0} \iff \begin{cases} z_D = 0 \\ -L/4 + x_D/3 = 0 \end{cases} \implies \{D \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{M}_D = \mathbf{0}\} = \{(3L/4, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 03 del 29 Settembre 2020

1 Calcolo Vettoriale

1.1 Momento assiale

Sia \mathcal{S} un sistema di vettori applicati di risultante \mathbf{R} ed r una retta orientata di versore \mathbf{r}

$$\mathbf{M}_T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{r}, \quad \forall T, S \in r$$

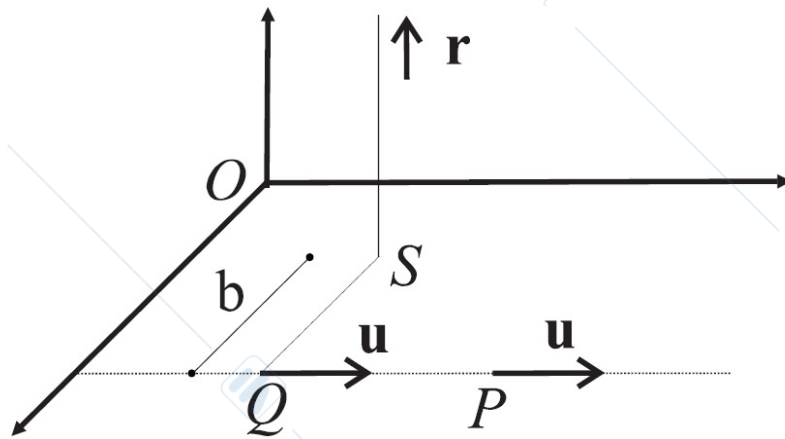
$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_S + \mathbf{R} \times (T - S), \quad \forall T, S \implies \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{r} + \underbrace{\mathbf{R} \times (T - S) \cdot \mathbf{r}}_{=0}, \quad \forall T, S \in r$$

momento assiale $M_r = \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{r} \quad \forall T \in r \quad (\forall T \in s \parallel r)$

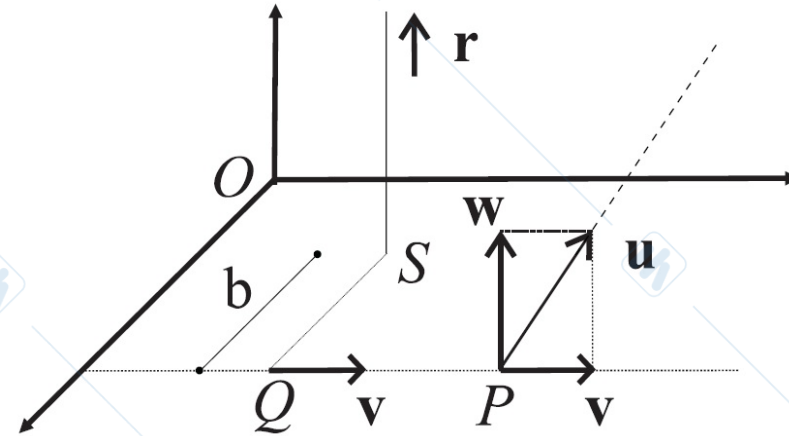
La componente ortogonale del momento del sistema \mathcal{S} rispetto ad r ($s \parallel r$) è invariante rispetto al polo su r ($s \parallel r$) per cui è valutato il momento

Sia $\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u})\}$ e si considerino i seguenti casi

1. $r \perp \pi, \quad (P, \mathbf{u}) \in \pi$
2. $r \perp \pi, \quad (P, \mathbf{u}) \notin \pi$



$$r \perp \pi, \quad (P, \mathbf{u}) \in \pi$$



$$r \perp \pi, \quad (P, \mathbf{u}) \notin \pi$$

1. Sia $S = r \cap \pi$, Q la proiezione ortogonale di S sulla retta di applicazione di \mathbf{u} e $b = d(S, Q)$ (braccio)

$$M_r = (Q - S) \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = \pm bu$$

\pm a seconda che i vettori $(Q - S)$, \mathbf{u} e \mathbf{r} formino una terna levogira o destrogira.

2. Sia $S = r \cap \pi$ e $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{w} \parallel \mathbf{r}$ e $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$

$$M_r = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{r} = (P - S) \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = (P - S) \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \underbrace{(P - S) \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}}_{=0} = (P - S) \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \pm bv$$

e il momento assiale di (P, \mathbf{u}) coincide con quello di (P, \mathbf{v}) con $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$.

1.2 Invariante scalare e asse centrale

Sia S un sistema di vettori applicati di risultante \mathbf{R}

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_S + \mathbf{R} \times (T - S), \quad \forall T, S \implies \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{R}, \quad \forall T, S$$

invariante scalare $I = \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{R}$

Sia r una retta parallela ad $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$

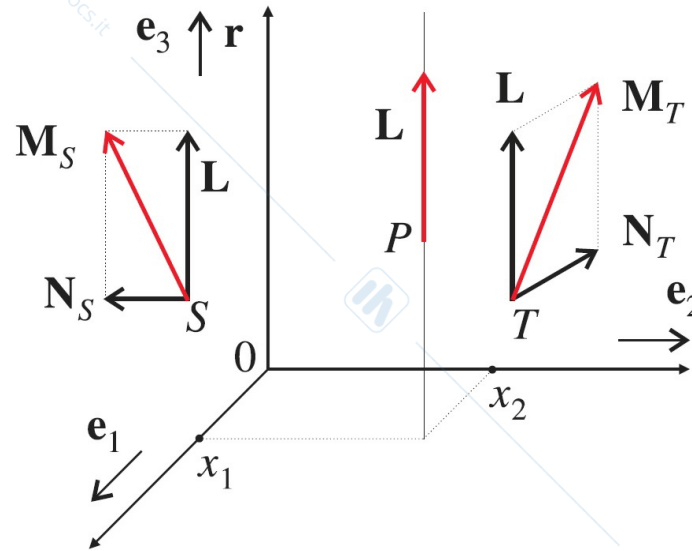
$$\mathbf{R} = R_r \mathbf{r}, \quad R_r = \pm R \neq 0$$

$$\mathbf{M}_T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{R}, \quad \forall T, S \iff \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{r}, \quad \forall T, S \quad \mathbf{r} \parallel \mathbf{R}$$

è costante la componente normale del momento lungo ogni retta parallela al risultante.

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{L} + \mathbf{N}_T \quad \mathbf{L} \parallel \mathbf{R} \quad \mathbf{N}_T \perp \mathbf{R} \implies I = \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{L} + \mathbf{N}_T) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

La componente \mathbf{L} del momento parallela al risultante non dipende dal polo.



La variabilità del momento M_T al variare del polo T è dovuta alla sua componente normale N_T , inoltre $M_T \nearrow N_T$.

asse centrale
$$\mathcal{A} = \left\{ P : |M_P| = \min_T |M_T| \right\} = \{ P : N_P = \mathbf{0} \} = \{ P : M_P = L \}$$

L'asse centrale \mathcal{A} è una retta.

DIM. Siano r una retta parallela ad R e $Ox_1x_2x_3 : Ox_3 \parallel r$

$$M_P = M_O + R \times (P - O) \quad P \equiv (x_1, x_2, x_3)$$

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & R_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} M_{P1} = M_{O1} - x_2 R_3 \\ M_{P2} = M_{O2} + x_1 R_3 \\ M_{P3} = M_{O3} \end{cases}$$

$$P \in \mathcal{A} \iff \mathbf{M}_P = \mathbf{L} \iff M_{O1} - x_2 R_3 = 0 \quad M_{O2} + x_1 R_3 = 0 \iff x_2 = \frac{M_{O1}}{R_3} \quad x_1 = -\frac{M_{O2}}{R_3}$$

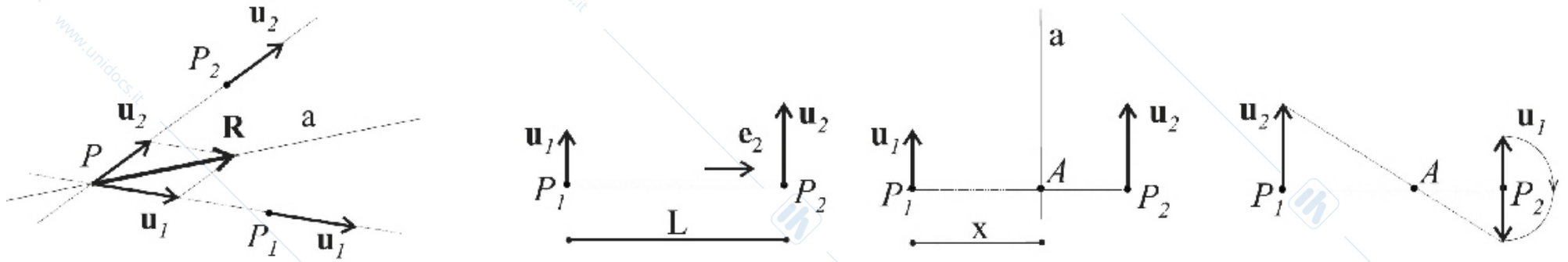
$$\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{M_{O2}}{R_3}, x_2 = \frac{M_{O1}}{R_3}, x_3 \in \mathfrak{R} \right\}$$

L'asse centrale è una retta parallela all'asse Ox_3 (e quindi ad \mathbf{R}) che interseca il piano Ox_1x_2 nel punto $(-M_{O2}/R_3, M_{O1}/R_3, 0)$.

$$\exists Q : \mathbf{M}_Q = \mathbf{0} \implies \mathcal{A} \equiv \text{retta passante per } Q \text{ e parallela ad } \mathbf{R}$$

Esempio 3.1. L'asse centrale di $\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u})\}$ è la retta di applicazione di \mathbf{u} .

Esempio 3.2. L'asse centrale di $\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u}_i), i = 1, \dots, n\} : \mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ è la retta per P parallela ad \mathbf{R} .



Esercizio 3.3. Determinare l'asse centrale del sistema $\mathcal{S} = \{(P_1, \mathbf{u}_1), (P_2, \mathbf{u}_2)\}$ con \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 paralleli e concordi.

$$\mathbf{R} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (u_1 + u_2) \mathbf{e}_3, \quad (P_1 - A) = -x \mathbf{e}_2, \quad (P_2 - A) = (L - x) \mathbf{e}_2,$$

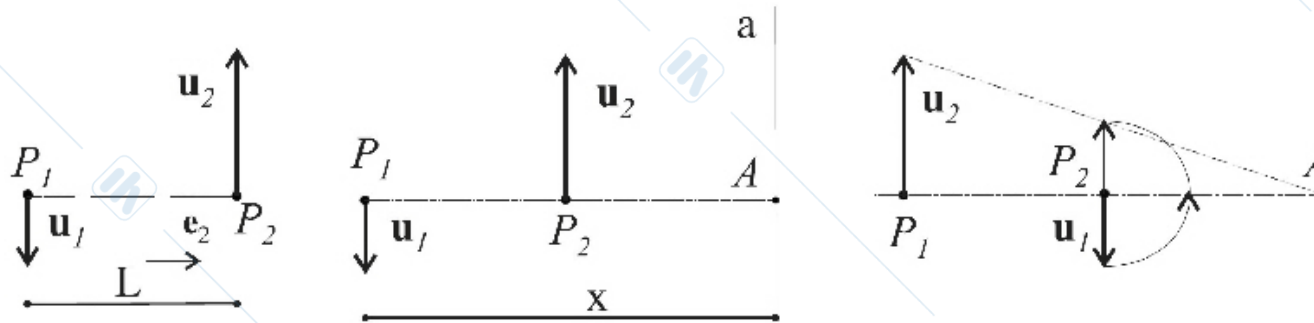
$$A : \mathbf{M}_A = \mathbf{0} \quad \mathbf{M}_A = (P_1 - A) \times \mathbf{u}_1 + (P_2 - A) \times \mathbf{u}_2 = [-xu_1 + (L - x)u_2] \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{0} \iff -xu_1 + (L - x)u_2 = 0 \iff xu_1 = (L - x)u_2 \iff x = L \frac{u_2}{u_1 + u_2}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = L \frac{u_2}{u_1 + u_2}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \mathcal{A} \cap \pi = A \equiv \left(0, L \frac{u_2}{u_1 + u_2}, 0 \right)$$

L'asse centrale è la retta parallela al risultante e passante per il punto A (**centro**) interno al segmento P_1P_2 .

Esercizio 3.4. Determinare l'asse centrale del sistema $\mathcal{S} = \{(P_1, \mathbf{u}_1), (P_2, \mathbf{u}_2)\}$ con \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 paralleli e discordi.



$$\mathbf{R} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 = (-u_1 + u_2) \mathbf{e}_3, \quad (P_1 - A) = -x \mathbf{e}_2, \quad (P_2 - A) = (L - x) \mathbf{e}_2,$$

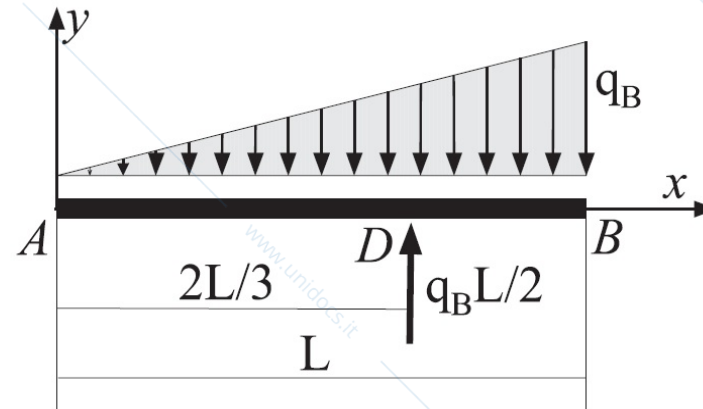
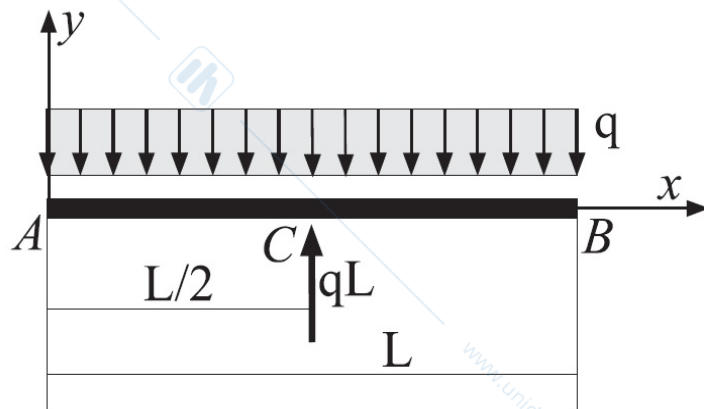
$$A : \mathbf{M}_A = \mathbf{0} \quad \mathbf{M}_A = (P_1 - A) \times \mathbf{u}_1 + (P_2 - A) \times \mathbf{u}_2 = [xu_1 + (L - x)u_2] \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{0} \iff xu_1 + (L - x)u_2 = 0 \iff xu_1 = (x - L)u_2 \iff x = L \frac{u_2}{u_2 - u_1}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = L \frac{u_2}{u_2 - u_1}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \mathcal{A} \cap \pi = A \equiv \left(0, L \frac{u_2}{u_2 - u_1}, 0 \right)$$

L'asse centrale è la retta parallela al risultante e passante per il punto A (**centro**) esterno al segmento P_1P_2 .

Esercizio 3.5. Determinare il centro e l'asse centrale di $\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u}(P)), \mathbf{u}(P) = -q\mathbf{j}\}$.



$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(P) d\Omega = -qL\mathbf{j}, \quad \mathbf{M}_A = \int_{\Omega} (P - A) \times \mathbf{u}(P) d\Omega = -q \frac{L^2}{2} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_A + \mathbf{R} \times (C - A), \quad C - A = x\mathbf{i}, \quad B - C = (L - x)\mathbf{i}$$

$$C : \mathbf{M}_C = \mathbf{0} \quad \mathbf{M}_C = \mathbf{M}_A + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -qL & 0 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} M_{Cx} = 0 \\ M_{Cy} = 0 \\ M_{Cz} = -q\frac{L^2}{2} + qLx \end{cases} \iff x = \frac{L}{2}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x, y, z) : x = \frac{L}{2}, y \in \mathbb{R}, z = 0 \right\}$$

Esercizio 1. Determinare il centro e l'asse centrale del carico triangolare in Figura.

Osservazione. L'invariante scalare può definirsi anche per sistemi a risultante nullo, inoltre esistono sistemi a risultante non nullo con invariante scalare nullo

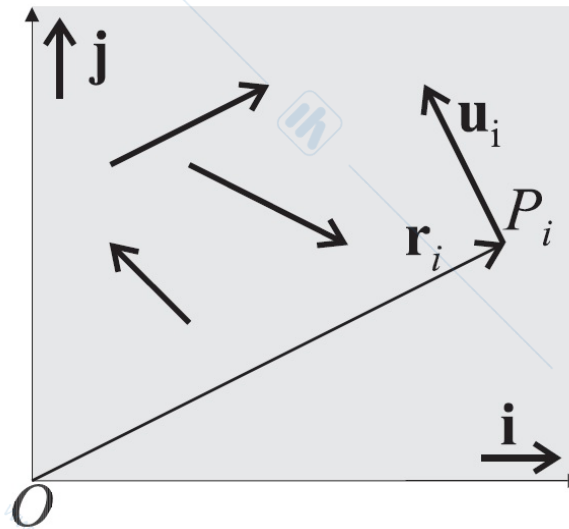
$$\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u}), (P, -\mathbf{u})\} \quad (\mathbf{R} = \mathbf{0}) \implies I = \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{R} = 0$$

$$\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u})\} \quad (\mathbf{M}_P = \mathbf{0}) \implies I = 0$$

Esercizio 2. Provare che l'invariante scalare dei carichi uniforme e triangolare è nullo.

1.3 Sistemi piani e sistemi equilibrati

Un sistema \mathcal{S} di vettori applicati è un **sistema piano** se tutti i vettori appartengono ad un piano.



$$\mathcal{S} = \{(P_i, \mathbf{u}_i) : P_i \in \pi, \mathbf{u}_i \parallel \pi, i = 1, \dots, n\} \implies \mathbf{R} \parallel \pi \quad \forall T \in \pi \quad \mathbf{M}_T \perp \pi$$

$$\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u}(P)) : P \in \pi, \mathbf{u}(P) \parallel \pi\}$$

$$\mathbf{M}_T = \sum_{i=1}^n (P_i - T) \times \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_T) \times \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{M}_T = \int_{\Omega} (P - T) \times \mathbf{u}(P) d\Omega,$$

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}, \quad (R_z = 0), \quad \mathbf{M}_O = M_{Oz} \mathbf{k}, \quad (M_{Ox} = M_{Oy} = 0), \quad I = 0$$

Un sistema è **equilibrato** o **equivalente a zero** se

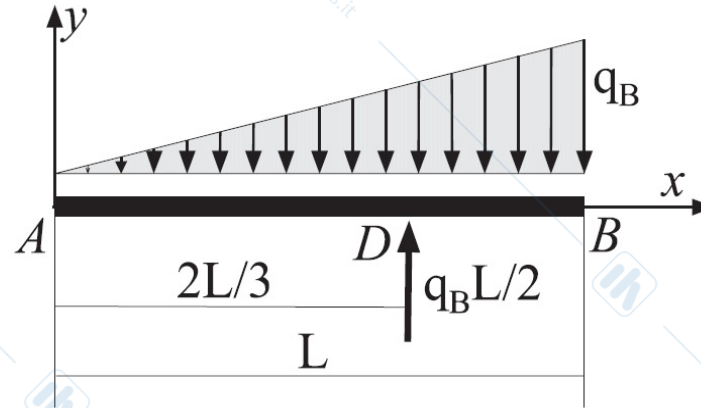
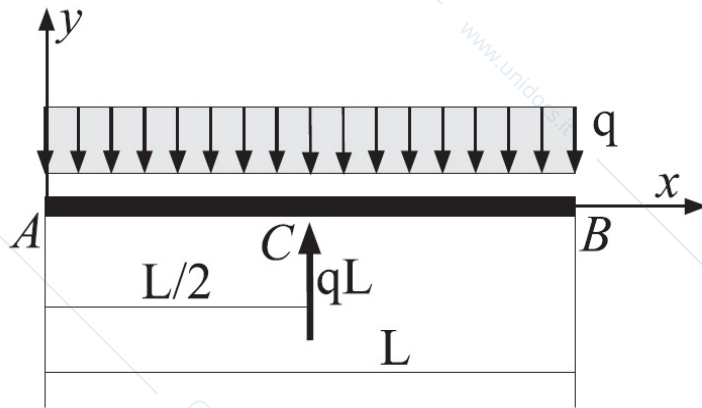
$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{0} \quad (\forall T) \tag{1}$$

$$(3D) \quad R_x = R_y = R_z = 0 \quad M_{Ox} = M_{Oy} = M_{Oz} = 0$$

$$(2D) \quad R_x = R_y = 0 \quad M_{Oz} = 0$$

Osservazione. Per un sistema S a risultante nullo si ha $\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_Q, \forall T, Q$, pertanto la (1)₂ è verificata se $\exists T : \mathbf{M}_T = \mathbf{0}$.

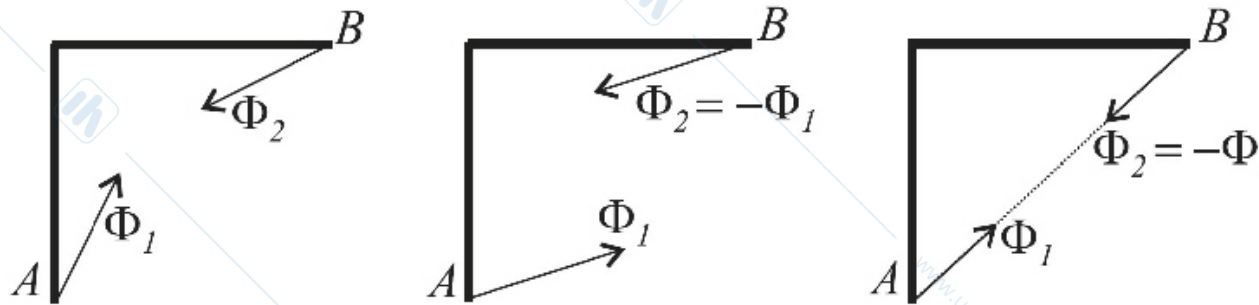
Esempio 3.6. Il sistema $S = \{(P, \mathbf{u}(P)), \mathbf{u}(P) = -q\mathbf{j}\} \cup \{(C, qL\mathbf{j})\}$ è equilibrato.



Provare che è equilibrato anche il sistema

$$\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u}(P)), \mathbf{u}(P) = -q_B/Lx\mathbf{j}\} \cup \{(D, q_B L/2\mathbf{j})\}.$$

Esercizio 3.7. Provare sotto quali condizioni il sistema $\mathcal{S} = \{(A, \Phi_1), (B, \Phi_2)\}$ è equilibrato.

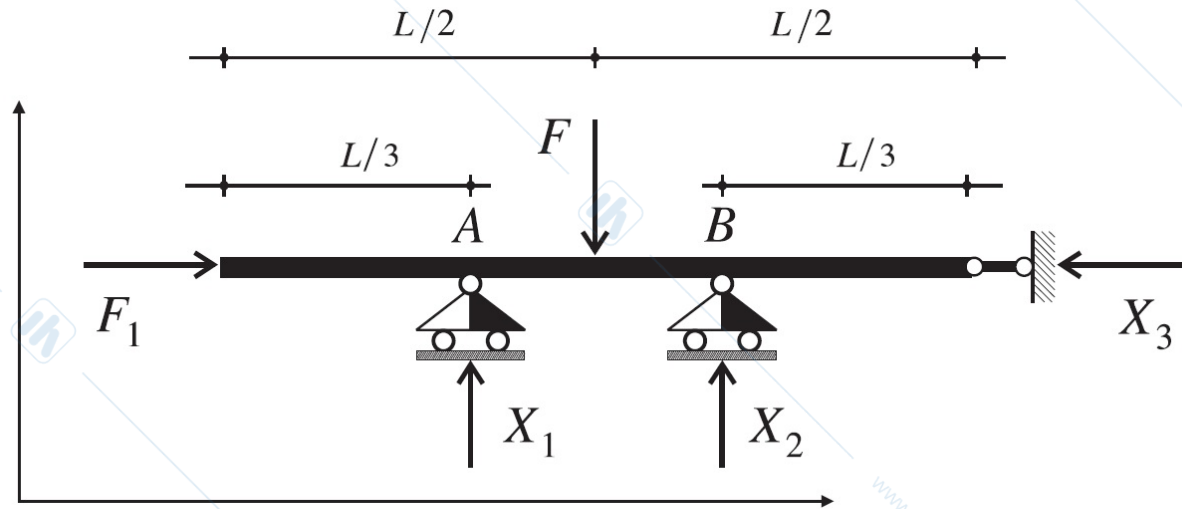


$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \iff \Phi_1 + \Phi_2 = \mathbf{0} \iff \Phi_1 = -\Phi_2$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{0} \iff (B - A) \times \Phi_2 = \mathbf{0} \iff \Phi_2 \parallel (B - A)$$

Il sistema \mathcal{S} è equilibrato se i due vettori $(A, \Phi_1), (B, \Phi_2)$ formano una coppia di braccio nullo.

Esercizio 3.8. Determinare le reazioni dei vincoli X_1 , X_2 , X_3 che rendono equilibrato il sistema di forze applicato alla trave in figura.



$$\begin{cases} R_x = 0, \\ R_y = 0, \\ M_{Az} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} F_1 - X_3 = 0, \\ -F + X_1 + X_2 = 0, \\ M_{Az} = X_2 \frac{L}{3} - F \frac{L}{6} = 0 \end{cases} \iff X_1 = X_2 = \frac{F}{2}, X_3 = F_1$$

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 04 del 01 Ottobre 2020

1 Calcolo Vettoriale

1.1 Momento assiale, invariante scalare, asse centrale

Sia S un sistema di vettori applicati di risultante \mathbf{R} ed r una retta orientata di versore \mathbf{r}

$$\mathbf{M}_T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{r}, \quad \forall T, S \in r$$

momento assiale $M_r = \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{r} \quad \forall T \in r \quad (\forall T \in s \parallel r)$

La componente ortogonale del momento del sistema S rispetto ad r ($s \parallel r$) è invariante rispetto al polo su r ($s \parallel r$) per cui è valutato il momento

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_S + \mathbf{R} \times (T - S), \quad \forall T, S \implies \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{R}, \quad \forall T, S$$

invariante scalare $I = \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{R}$

Sia r una retta parallela ad $\mathbf{R} \neq 0$

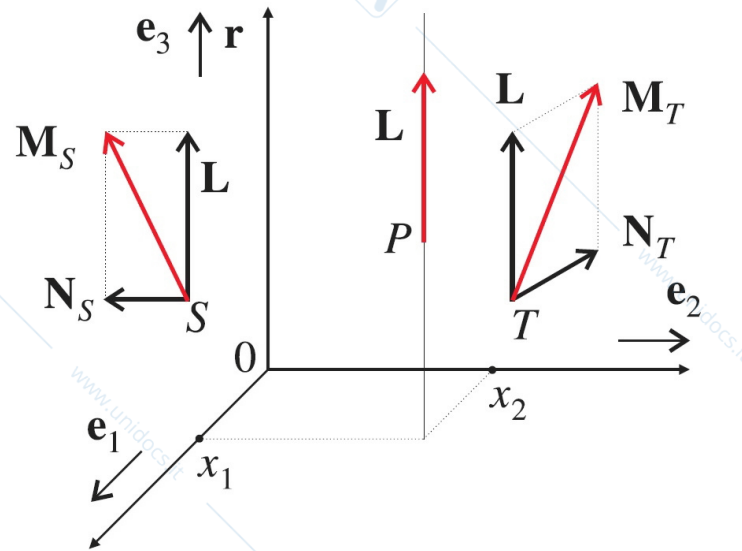
$$\mathbf{R} = R_r \mathbf{r}, \quad R_r = \pm R \neq 0$$

$$\mathbf{M}_T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{R}, \quad \forall T, S \iff \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{r}, \quad \forall T, S \quad \mathbf{r} \parallel \mathbf{R}$$

è costante la componente normale del momento lungo ogni retta parallela al risultante.

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{L} + \mathbf{N}_T \quad \mathbf{L} \parallel \mathbf{R} \quad \mathbf{N}_T \perp \mathbf{R} \implies I = \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{L} + \mathbf{N}_T) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

La componente \mathbf{L} del momento parallela al risultante non dipende dal polo.



La variabilità del momento \mathbf{M}_T al variare del polo T è dovuta alla sua componente normale \mathbf{N}_T , inoltre $\mathbf{M}_T \nearrow \mathbf{N}_T$.

asse centrale $\mathcal{A} = \left\{ P : |\mathbf{M}_P| = \min_T |\mathbf{M}_T| \right\} = \{ P : \mathbf{N}_P = \mathbf{0} \} = \{ P : \mathbf{M}_P = \mathbf{L} \}$

L'asse centrale \mathcal{A} è una retta.

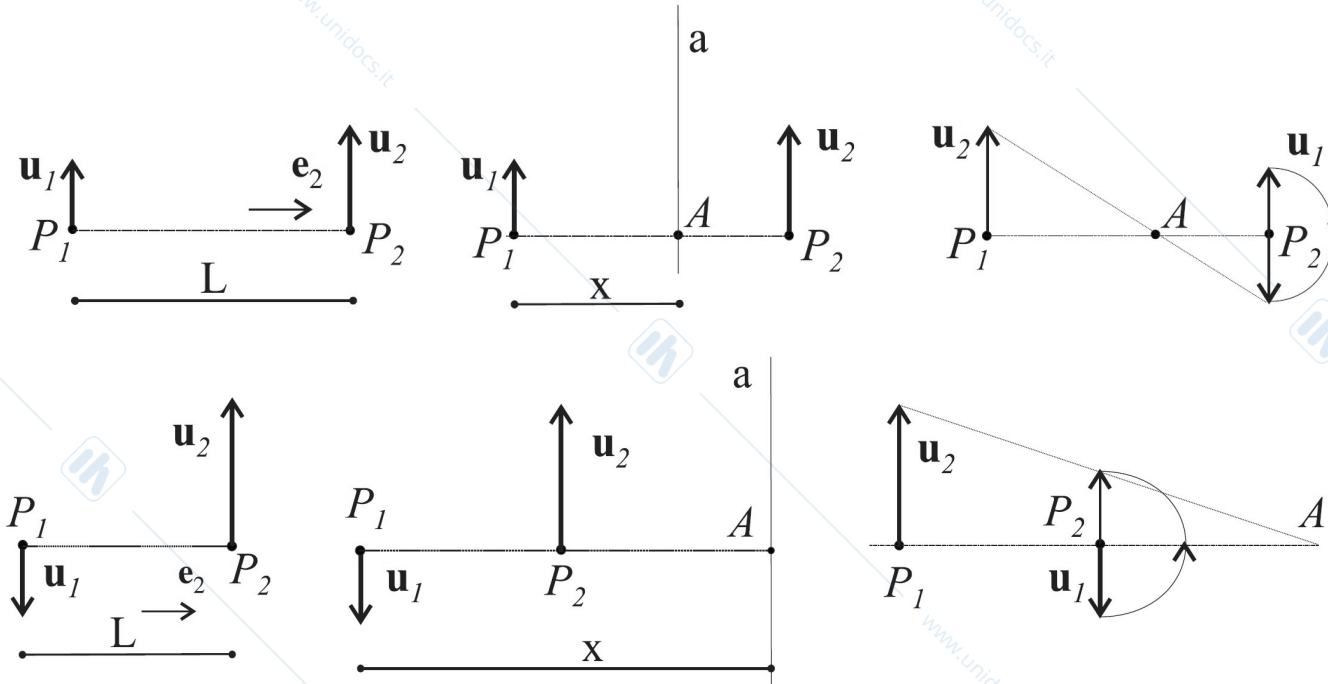
$$\exists Q : \mathbf{M}_Q = \mathbf{0} \implies \mathcal{A} \equiv \text{retta passante per } Q \text{ e parallela ad } \mathbf{R}$$

L'asse centrale del sistema $\mathcal{S} = \{(P_1, \mathbf{u}_1), (P_2, \mathbf{u}_2)\}$ con \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 paralleli e concordi è la retta \mathcal{A} parallela al risultante \mathbf{R} e passante per il punto A (**centro**) interno al segmento P_1P_2

$$\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = L \frac{u_2}{u_1 + u_2}, x_3 \in \mathfrak{R} \right\} \quad \mathcal{A} \cap \pi = A \equiv \left(0, L \frac{u_2}{u_1 + u_2}, 0 \right).$$

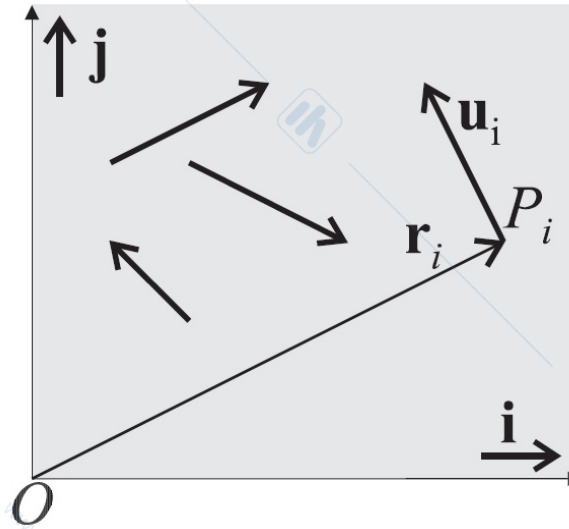
L'asse centrale del sistema $\mathcal{S} = \{(P_1, \mathbf{u}_1), (P_2, \mathbf{u}_2)\}$ con \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 paralleli e discordi è la retta parallela al risultante e passante per il punto A (**centro**) esterno al segmento P_1P_2

$$\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = L \frac{u_2}{u_2 - u_1}, x_3 \in \mathfrak{R} \right\} \quad \mathcal{A} \cap \pi = A \equiv \left(0, L \frac{u_2}{u_2 - u_1}, 0 \right)$$



1.2 Sistemi piani e sistemi equilibrati

Un sistema \mathcal{S} di vettori applicati è un **sistema piano** se tutti i vettori appartengono ad un piano π .



$$\mathcal{S} = \{(P_i, \mathbf{u}_i) : P_i \in \pi, \mathbf{u}_i \parallel \pi, i = 1, \dots, n\} \implies \mathbf{R} \parallel \pi \quad \forall T \in \pi \quad \mathbf{M}_T \perp \pi$$

$$\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u}(P)) : P \in \Omega \subseteq \pi, \mathbf{u}(P) \parallel \pi\}$$

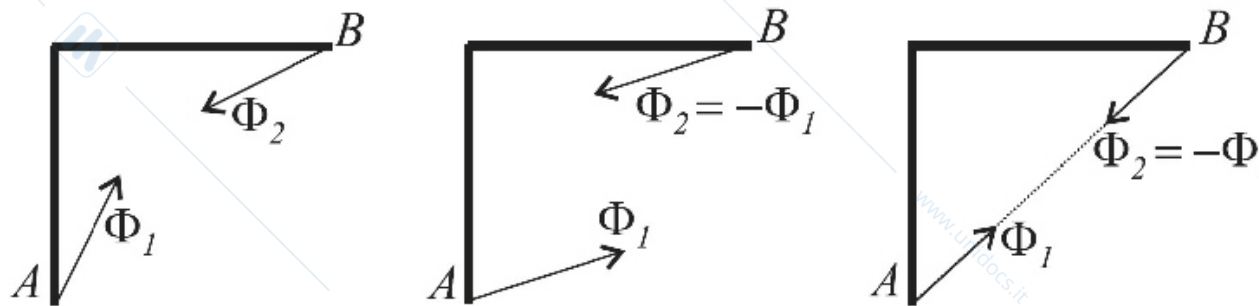
$$\pi \equiv Oxy \quad \mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}, \quad (R_z = 0), \quad \mathbf{M}_O = M_{Oz} \mathbf{k}, \quad (M_{Ox} = M_{Oy} = 0), \quad I = 0$$

$$S \text{ equivalente a zero} \iff \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{0} \quad \forall T$$

$$(3D) \quad R_x = R_y = R_z = 0 \quad M_{Ox} = M_{Oy} = M_{Oz} = 0$$

$$(2D) \quad R_x = R_y = 0 \quad M_{Oz} = 0$$

Il sistema $S = \{(A, \Phi_1), (B, \Phi_2)\}$ è equilibrato se i due vettori $(A, \Phi_1), (B, \Phi_2)$ formano una coppia di braccio nullo.



Il sistema $S = \{(A, \mathbf{u}), (B, \mathbf{v}), (C, \mathbf{w})\}$ è equilibrato se i tre vettori sono complanari e concorrenti in un punto proprio o improprio.

$$S = \{(A, \mathbf{u}), (B, \mathbf{v}), (C, \mathbf{w})\} \quad \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{0} \quad \forall T$$

$$\mathbf{M}_A = (B - A) \times \mathbf{v} + (C - A) \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$$(B - A) \times \mathbf{v} \cdot (C - A) = 0 \implies \mathbf{v} \text{ è complanare a } (B - A) \text{ e } (C - A)$$

$$(C - A) \times \mathbf{w} \cdot (B - A) = 0 \implies \mathbf{w} \text{ è complanare a } (B - A) \text{ e } (C - A)$$

allora \mathbf{v} e \mathbf{w} appartengono allo stesso piano π cui appartengono i punti A , B e C

$$\mathbf{M}_B = (A - B) \times \mathbf{u} + (C - B) \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$$(A - B) \times \mathbf{u} \cdot (C - B) = 0 \implies \mathbf{u} \text{ è complanare a } (A - B) \text{ e } (C - B)$$

anche \mathbf{u} appartiene al piano π e quindi i tre vettori sono complanari.

Se i tre vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} sono paralleli tra loro, allora si incontrano in un punto improprio.

Se invece non sono paralleli tra loro almeno due (ad esempio \mathbf{u} , \mathbf{v}) concorrono in un punto T

$$\exists T : \text{retta di applicazione di } \mathbf{u} \cap \text{retta di applicazione di } \mathbf{v} = T$$

$$\mathbf{M}_T = (C - T) \times \mathbf{w} = \mathbf{0} \implies (C - T) \parallel \mathbf{w}$$

allora anche la retta di applicazione di \mathbf{w} concorre nel punto T .

Si è già osservato che

$$(\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{0} \quad \forall T) \iff (\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \exists T : \mathbf{M}_T = \mathbf{0}).$$

Criterio 1. Un sistema S è *equivalente a zero* se esistono tre punti non allineati tali che i momenti polari siano nulli

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{0} \quad \forall T \iff \exists A, B, C \text{ non allineati} : \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B = \mathbf{M}_C = \mathbf{0}.$$

DIM. E' sufficiente provare l'implicazione " \Leftarrow " .

$$\begin{cases} \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B + \mathbf{R} \times (A - B), & \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B \\ \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_C + \mathbf{R} \times (A - C), & \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_C \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{R} \times (A - B) = \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \times (A - C) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathbf{R} \parallel (A - B) \\ \mathbf{R} \parallel (A - C) \end{cases} \xrightarrow{A, B, C \text{ non allineati}} \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \implies \mathbf{M}_T = \mathbf{M}_A = \mathbf{0} \quad \forall T.$$

Criterio 2. Un sistema S è *equivalente a zero* se esistono due punti tali che i momenti polari siano nulli e sia nulla anche la componente del risultante rispetto alla retta per i

due punti

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{0} \quad \forall T \iff \exists A, B : \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B = \mathbf{0} \quad R_s = 0 \text{ con } s \text{ retta per } A \text{ e } B.$$

DIM. E' sufficiente provare l'implicazione " \Leftarrow ". Sia s la retta per A e B di versore s

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot \mathbf{s} = R_s = 0 &\iff \mathbf{R} \perp \mathbf{s} \\ \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B + \mathbf{R} \times (A - B), \quad \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B &\iff \mathbf{R} \parallel (A - B) \iff \mathbf{R} \parallel \mathbf{s} \iff \mathbf{R} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

1.3 Sistemi equivalenti

Si considerino due sistemi \mathcal{S} e \mathcal{S}' di vettori applicati

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \{(P_i, \mathbf{u}_i), i = 1, \dots, n\}, & \quad (\text{risp. } \mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u}(P)) : P \in \Omega\}) & \quad \mathbf{R}, \quad \mathbf{M}_T \quad \forall T \\ \mathcal{S}' = \{(Q_j, \mathbf{v}_j), j = 1, \dots, m\} & \quad (\text{risp. } \mathcal{S}' = \{(P, \mathbf{v}(P)) : P \in \Omega'\}) & \quad \mathbf{R}', \quad \mathbf{M}'_T \quad \forall T \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \text{ e } \mathcal{S}' \text{ sono equivalenti} \iff \mathbf{R} = \mathbf{R}', \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{M}'_T \quad \forall T.$$

Analogamente ai sistemi equivalenti a zero si ha

$$\mathcal{S} \text{ e } \mathcal{S}' \text{ sono equivalenti} \iff \mathbf{R} = \mathbf{R}', \quad \exists O : \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O.$$

DIM. E' sufficiente provare l'implicazione " \Leftarrow "

$$\begin{cases} \mathbf{M}_T = \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times (T - O), \\ \mathbf{M}'_T = \mathbf{M}'_O + \mathbf{R}' \times (T - O), \end{cases} \implies \mathbf{M}_T - \mathbf{M}'_T = \mathbf{M}_O - \mathbf{M}'_O + (\mathbf{R} - \mathbf{R}') \times (T - O), \forall T$$

$$\stackrel{\mathbf{R}=\mathbf{R}'}{\iff} \mathbf{M}_T - \mathbf{M}'_T = \mathbf{M}_O - \mathbf{M}'_O = \mathbf{0}, \quad \forall T$$

In modo del tutto analogo è possibile provare i seguenti criteri¹

Criterio 1.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}', \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{M}'_T \quad \forall T \iff \begin{matrix} \exists A, B, C \text{ non allineati} : \mathbf{M}_A = \mathbf{M}'_A \\ \mathbf{M}_B = \mathbf{M}'_B, \mathbf{M}_C = \mathbf{M}'_C \end{matrix}$$

Criterio 2.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}', \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{M}'_T \quad \forall T \iff \begin{matrix} \exists A, B : \mathbf{M}_A = \mathbf{M}'_A, \mathbf{M}_B = \mathbf{M}'_B \\ R_s = R'_s \text{ con } s \text{ retta per } A \text{ e } B. \end{matrix}$$

¹ Si osservi che se \mathcal{S} e \mathcal{S}' sono equivalenti allora il sistema

$$\mathcal{S}^* = \{(P_i, \mathbf{u}_i), i = 1, \dots, n\} \cup \{(Q_j, -\mathbf{v}_j), j = 1, \dots, m\}, \quad (\text{risp. } \mathcal{S}^* = \{(P, \mathbf{u}(P)) : P \in \Omega\} \cup \{(P, -\mathbf{v}(P)) : P \in \Omega'\})$$

è equivalente a zero.

Ogni sistema S di vettori applicati è equivalente ad un sistema S' costituito da un vettore applicato ed una coppia²

$$S \quad \mathbf{R}, \quad \mathbf{M}_O \qquad S' = \{(O, \mathbf{R}), (A, \mathbf{u}), (B, -\mathbf{u})\} : (A, \mathbf{u}), (B, -\mathbf{u}) \text{ di momento } \mathbf{M}_O \qquad S \text{ e } S' \text{ equivalenti}$$

Un sistema S di vettori applicati di risultante \mathbf{R} e momento \mathbf{M}_O è equivalente al proprio risultante (se $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$) applicato in un punto P dell'asse centrale a oppure (se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$) ad una coppia di momento \mathbf{M}_O se e solo se $I = 0$

$$S \text{ è equivalente a } \begin{cases} \{(P, \mathbf{R})\} : P \in a & (\mathbf{R} \neq \mathbf{0}) \\ \{(A, \mathbf{u}), (B, -\mathbf{u})\} \text{ di momento } \mathbf{M}_O & (\mathbf{R} = \mathbf{0}) \end{cases} \iff I = 0.$$

DIM. L'implicazione " \implies " è evidente essendo

$$I = \mathbf{M}_P \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} \quad \forall O, P$$

²

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} + \mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{M}'_O = (A - O) \times \mathbf{u} - (B - O) \times \mathbf{u} = \mathbf{M}_O$$

e quindi $I = 0$ nel primo caso perchè $\mathbf{M}_P = \mathbf{0}$ e nel secondo perchè $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

” \Longleftarrow ”

Se $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ allora esiste l'asse centrale a e $\forall P \in a$ si ha che $\mathbf{M}_P \parallel \mathbf{R}$ inoltre si ha

$$0 = I = \mathbf{M}_P \cdot \mathbf{R} = \pm M_P R \xrightarrow{R \neq 0} \mathbf{M}_P = \mathbf{0} \implies \mathcal{S} \text{ è equivalente a } \{(P, \mathbf{R})\}$$

dove il \pm si riferisce al fatto che \mathbf{M}_P ed \mathbf{R} possono essere concordi o discordi.

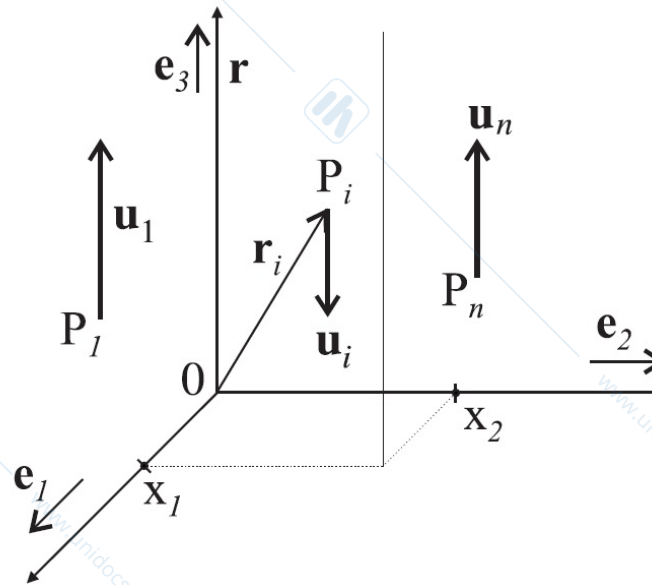
Se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ allora una (qualunque) coppia di momento \mathbf{M}_O è equivalente ad \mathcal{S} .

Esempio 4.1.

$$\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u}_i), i = 1, \dots, n\} : \begin{array}{l} \mathbf{R} = \mathbf{0}, \mathbf{M}_P = \mathbf{0} \implies \mathcal{S} \text{ è equilibrato} \\ \mathbf{R} \neq \mathbf{0} \implies P \in \mathcal{A} \parallel \mathbf{R} \quad \mathcal{S} \text{ è equivalente a } (A, \mathbf{R}) \quad A \in \mathcal{A} \end{array}$$

1.4 Sistemi di vettori paralleli

Un **sistema di vettori paralleli** è un sistema \mathcal{S} di vettori applicati aventi tutti la stessa direzione (equiversi o no)



$$\mathcal{S} = \{(P_i, \mathbf{u}_i) : \mathbf{u}_i = f_i \mathbf{r}, i = 1, \dots, n\}, \quad (f_i = u_{ir} = \pm u_i)$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{r} = f \mathbf{r}, \quad f = \sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n u_{ir} = R_r = \pm R$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times f_i \mathbf{r}$$

Essendo

$$I = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$$

si ha che *un sistema di vettori paralleli è equivalente ad una coppia se $\mathbf{R} = 0$ oppure al proprio risultante applicato in un punto P dell'asse centrale se $\mathbf{R} \neq 0$.*

Supposto che $\mathbf{R} \neq 0$, in una terna $Ox_1x_2x_3$ sia $\mathbf{r} = \mathbf{e}_3$ e $P_i - O = x_{i1}\mathbf{e}_1 + x_{i2}\mathbf{e}_2 + x_{i3}\mathbf{e}_3$, allora si ha

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n (x_{i1}\mathbf{e}_1 + x_{i2}\mathbf{e}_2 + x_{i3}\mathbf{e}_3) \times f_i \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^n x_{i2} f_i \mathbf{e}_1 - \sum_{i=1}^n x_{i1} f_i \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{e}_3 = f \mathbf{e}_3$$

e ricordando che

$$\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{M_{O2}}{R_3}, x_2 = \frac{M_{O1}}{R_3}, x_3 \in \mathfrak{R} \right\}$$

si ha

$$\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3) : x_1 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n x_{i1} f_i, x_2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n x_{i2} f_i, x_3 \in \mathfrak{R} \right\},$$

Si definisce **centro del sistema di vettori paralleli** il punto C dell'asse centrale di coordinate

$$x_{1C} = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n x_{i1} f_i, \quad x_{2C} = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n x_{i2} f_i, \quad x_{3C} = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n x_{i3} f_i,$$

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{r}_i, \quad C - O = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n f_i (P_i - O)$$

$$\mathcal{S} = \{(P, \mathbf{u}(P)) : \mathbf{u}(P) = f(P) \mathbf{r}, P \in \Omega\},$$

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} f(P) \mathbf{r} d\Omega = f_R \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_C = \frac{1}{f_R} \int_{\Omega} f(P) \mathbf{r}_P d\Omega,$$

$$\mathcal{S} = \{(P_i, \mathbf{u}_i) : P_i \in \pi, \mathbf{u}_i \parallel \pi, i = 1, \dots, n\}, \quad \pi = Ox_1x_2 \implies x_{i3} = 0 \quad \forall i \implies x_{3C} = 0$$

$$\mathcal{S} = \{(P_i, \mathbf{u}_i) : P_i \in \pi, \mathbf{u}_i \parallel \pi, i = 1, \dots, n\}, \quad P_i \in s \implies C \in s$$

I due sistemi di vettori paralleli \mathcal{S} ed \mathcal{S}'

$$\mathcal{S} = \{(P_i, \mathbf{u}_i) : \mathbf{u}_i = f_i \mathbf{r}, i = 1, \dots, n\}, \quad \mathbf{r}_C = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{r}_i,$$

$$\mathcal{S}' = \{(P_i, \mathbf{u}'_i) : \mathbf{u}'_i = a \mathbf{u}_i, i = 1, \dots, n\}, \quad \mathbf{r}_{C'} = \frac{1}{f'} \sum_{i=1}^n f'_i \mathbf{r}_i, \quad f' = \sum_{i=1}^n f'_i,$$

$$\mathbf{u}'_i = a \underbrace{\mathbf{u}_i}_{= f_i \mathbf{r}} = a \underbrace{f_i \mathbf{r}}_{= f'_i \mathbf{r}} \implies f'_i = a f_i, \quad f' = \sum_{i=1}^n a f_i = a f$$

hanno lo stesso centro

$$\mathbf{r}_{C'} = \frac{1}{f'} \sum_{i=1}^n f'_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{af} \sum_{i=1}^n a f_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C.$$

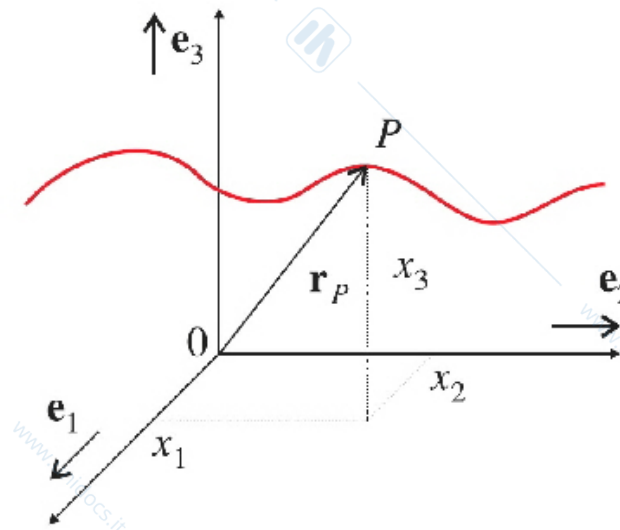
Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 05 del 06 Ottobre 2020

1 Cinematica (geometria del moto)

1.1 Cinematica del punto materiale



$$(P, m) \quad P \equiv (x_1, x_2, x_3) : x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in \mathfrak{R}$$

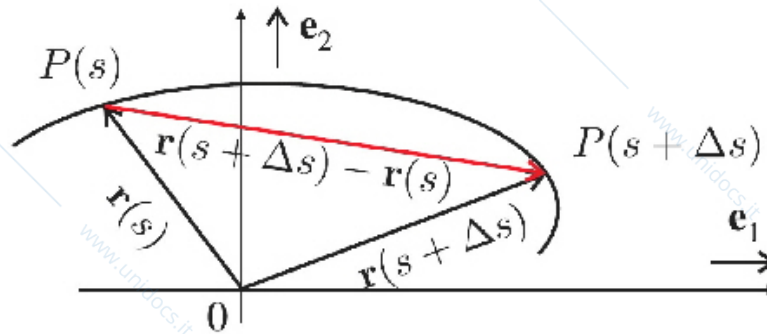
$$\mathbf{r}_P = P - O, \quad \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P(t), \quad \mathbf{r}_P = x_1(t) \mathbf{e}_1 + x_2(t) \mathbf{e}_2 + x_3(t) \mathbf{e}_3, \quad t \in \mathfrak{R}$$

equazioni finite del moto $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P(t), \quad x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in \mathfrak{R}$

velocità vettoriale $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_P(t) = \dot{x}_1(t) \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2(t) \mathbf{e}_2 + \dot{x}_3(t) \mathbf{e}_3, \quad v_i = \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3$

accelerazione vettoriale $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}_P(t) = \ddot{x}_1(t) \mathbf{e}_1 + \ddot{x}_2(t) \mathbf{e}_2 + \ddot{x}_3(t) \mathbf{e}_3, \quad a_i = \ddot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3$

traiettoria arco di curva di eq. parametriche $x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in \mathfrak{R}$



legge oraria $s = s(t), \quad \mathbf{r}_P(s) = x_1(s) \mathbf{e}_1 + x_2(s) \mathbf{e}_2 + x_3(s) \mathbf{e}_3,$

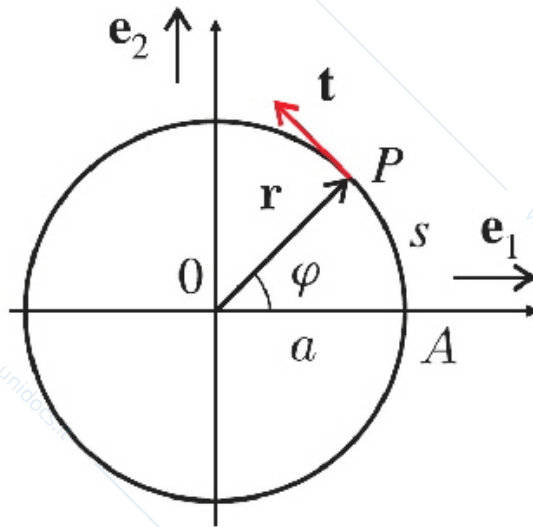
traiettoria $\mathbf{r}_P = x_1(s(t)) \mathbf{e}_1 + x_2(s(t)) \mathbf{e}_2 + x_3(s(t)) \mathbf{e}_3,$

tangente principale $\mathbf{r}'_P(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_P(s + \Delta s) - \mathbf{r}_P(s)}{\Delta s}, \quad \mathbf{r}'_P(s) = \mathbf{t}(s) : |\mathbf{t}(s)| = 1$

velocità scalare $\dot{s}(t)$

$\mathbf{v} = \mathbf{r}'_P \dot{s} = \dot{s} \mathbf{t} \quad |\mathbf{v}(s)| = |\dot{s}|$

Esempio 5.1. Traiettoria circolare

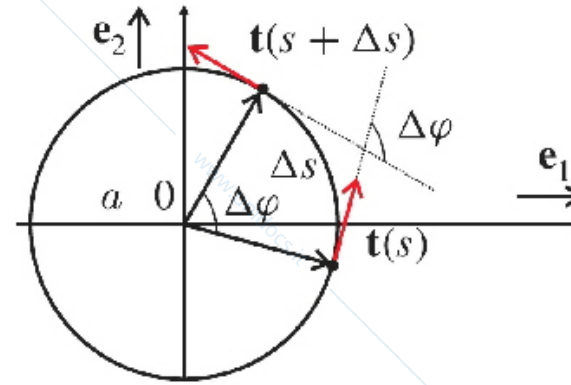
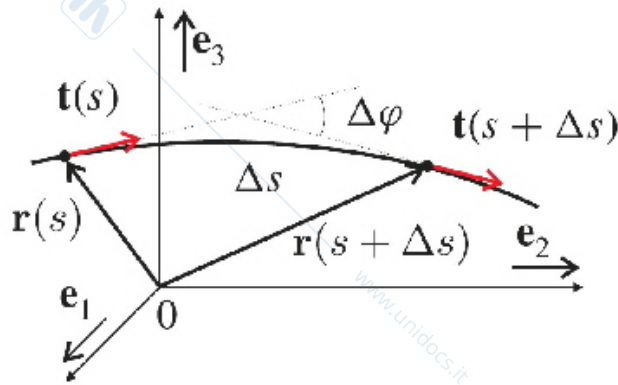


$x_1 = a \cos \varphi, \quad x_2 = a \sin \varphi, \quad x_3 = 0$

$$s = a\varphi \quad x_1 = a \cos \frac{s}{a}, \quad x_2 = a \sin \frac{s}{a}, \quad x_3 = 0,$$

$$\mathbf{r}_P(s) = a \cos \frac{s}{a} \mathbf{e}_1 + a \sin \frac{s}{a} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{t}(s) = \mathbf{r}'_P(s) = -\sin \frac{s}{a} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{s}{a} \mathbf{e}_2,$$

$$|\mathbf{t}(s)| = \sqrt{\sin^2 \frac{s}{a} + \cos^2 \frac{s}{a}} = 1, \quad \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{r}_P(s) = -a \cos \frac{s}{a} \sin \frac{s}{a} + a \sin \frac{s}{a} \cos \frac{s}{a} = 0$$



angolo di contingenza $\Delta\varphi$

curvatura $c(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$

raggio di curvatura

$$R(s) = \frac{1}{c(s)},$$

Esempio 5.2. Traiettoria circolare e rettilinea

Per una traiettoria circolare di raggio a risulta

$$\Delta s = a\Delta\varphi \quad c(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{a}, \quad R(s) = a,$$

per una traiettoria rettilinea si ha

$$\Delta\varphi = 0, \quad c(s) = 0.$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'_P \dot{s} = \dot{s} \mathbf{t} \implies \mathbf{a}(s) = \ddot{s} \mathbf{t} + \dot{s}^2 \mathbf{t}'$$

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1 \implies \begin{aligned} \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) + \mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) &= 2\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = 0 \\ \mathbf{t}(s) = \mathbf{r}'_P \quad \mathbf{t}'(s) = \mathbf{r}''_P \quad \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{r}''_P(s) &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{n}(s)$ **normale principale** : $\mathbf{t}'(s) = \mathbf{r}''_P(s) = |\mathbf{r}''_P(s)| \mathbf{n}(s) \quad |\mathbf{r}''_P(s)| = c(s) = \frac{1}{R(s)}$

I° formula di Frénet $\mathbf{t}'(s) = \frac{\mathbf{n}(s)}{R(s)}$

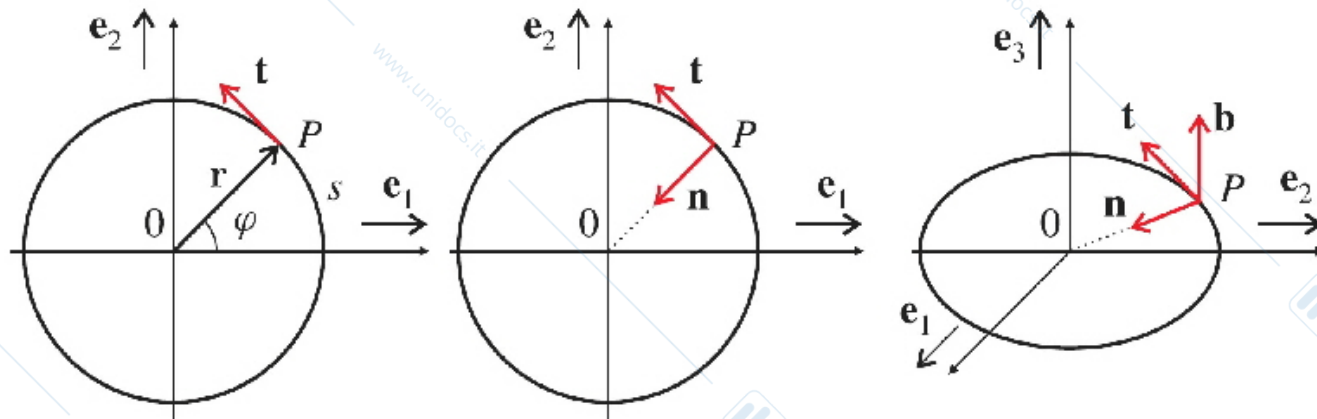
$$\mathbf{a}(s) = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{R(s)}\mathbf{n}(s)$$

$\mathbf{b}(s)$ binormale principale : $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$

Triedro principale di Frénet $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$

$(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 0$
 $\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s), \mathbf{n}(s) \times \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s) = \mathbf{n}(s)$

Esempio 5.3. Traiettoria circolare



$$\mathbf{r}_P(s) = a \cos \frac{s}{a} \mathbf{e}_1 + a \sin \frac{s}{a} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{t}(s) = \mathbf{r}'_P(s) = -\sin \frac{s}{a} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{s}{a} \mathbf{e}_2, \quad c(s) = \frac{1}{a}, \quad R(s) = a,$$

$$\mathbf{t}'(s) = \mathbf{r}''_P(s) = -\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{a} \sin \frac{s}{a} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n}(s) = R(s) \mathbf{t}'(s) = -\cos \frac{s}{a} \mathbf{e}_1 - \sin \frac{s}{a} \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{t}'(s) = \frac{\mathbf{n}(s)}{R(s)} = \frac{\mathbf{n}(s)}{a} = c \mathbf{n}(s), \quad |\mathbf{n}(s)| = 1$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \left(-\sin \frac{s}{a} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{s}{a} \mathbf{e}_2 \right) \times \left(-\cos \frac{s}{a} \mathbf{e}_1 - \sin \frac{s}{a} \mathbf{e}_2 \right) = \mathbf{e}_3$$

1.2 Moto uniforme e uniformemente vario

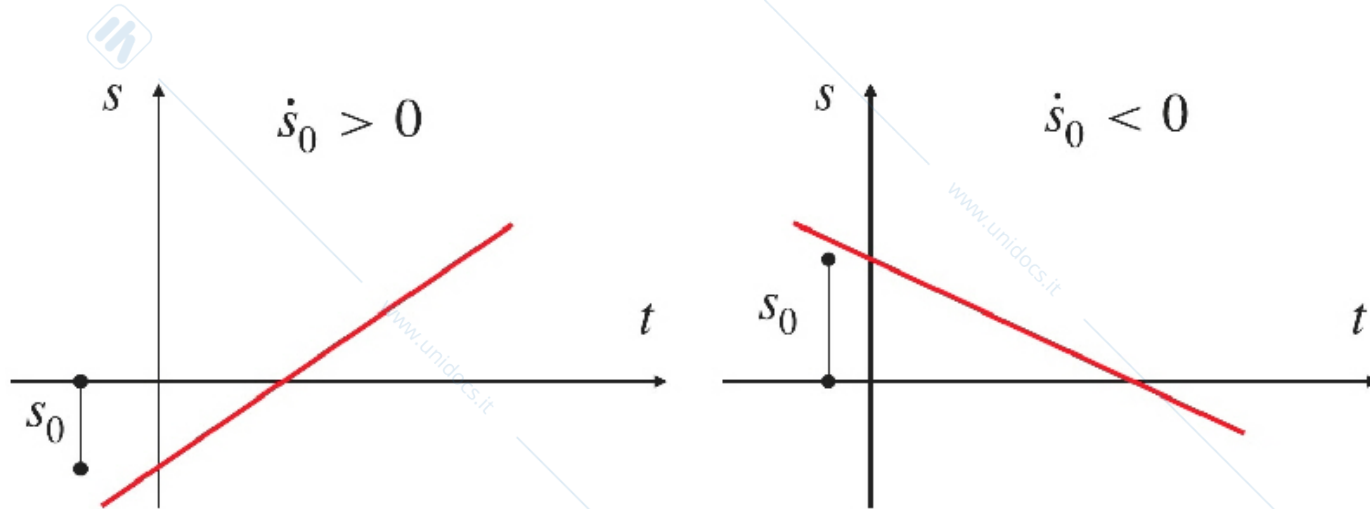
moto progressivo in I (risp. retrogrado) $\dot{s}(t) > 0 \quad \forall t \in I$ ($\dot{s}(t) < 0 \quad \forall t \in I$)

moto uniforme

$$\ddot{s}(t) = 0 \quad \forall t \quad (\dot{s}(t) = \text{cost} \quad \forall t)$$

legge oraria del moto uniforme

$$s(t) = \dot{s}_0 t + s_0 \quad \forall t \quad [\dot{s}_0 = \dot{s}(t_0), s_0 = s(t_0)]$$

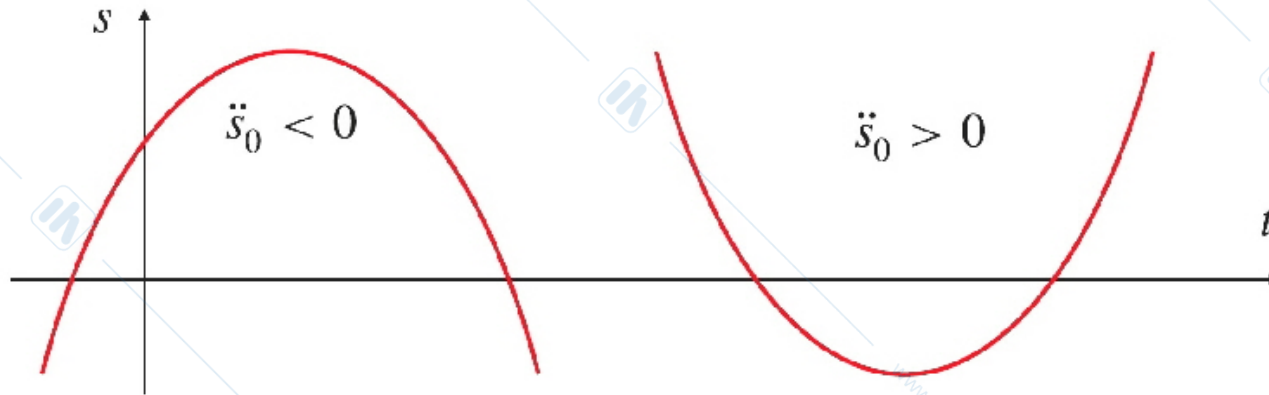


moto uniformemente vario

legge oraria del moto uniform. vario

$$\ddot{s}(t) = \text{cost} = \ddot{s}_0 \quad \forall t$$

$$s(t) = \frac{1}{2}\ddot{s}_0 t^2 + \dot{s}_0 t + s_0 \quad \forall t \quad [\ddot{s}_0 = \ddot{s}(t_0)]$$



istante di arresto t^* : $\dot{s}(t^*) = 0$

moto accelerato (risp. ritardato) in \bar{t} $|\dot{s}(t)|$ è crescente in \bar{t} (risp. decrescente in \bar{t})

$$\frac{d\dot{s}^2}{dt} = 2\dot{s}\ddot{s} \implies \text{moto accelerato (risp. ritardato)} \iff \dot{s}\ddot{s} > 0 \quad (\text{risp. } \dot{s}\ddot{s} < 0)$$

Esempio 5.4. *Determinare gli istanti di arresto e gli intervalli in cui il moto uniformemente vario è accelerato o ritardato*

$$t^* : \dot{s}(t^*) = 0 \iff t^* : \ddot{s}_0 t^* + \dot{s}_0 = 0 \iff t^* = -\frac{\dot{s}_0}{\ddot{s}_0}$$

$$\dot{s}\ddot{s} = (\ddot{s}_0 t + \dot{s}_0) \ddot{s}_0 = \ddot{s}_0^2 t + \dot{s}_0 \ddot{s}_0 = \ddot{s}_0^2 \left(t + \frac{\dot{s}_0}{\ddot{s}_0} \right) = \ddot{s}_0^2 (t - t^*)$$

se $\ddot{s}_0 > 0 \implies [\dot{s}\ddot{s} = \ddot{s}_0^2 (t - t^*), \quad \dot{s} = \ddot{s}_0 (t - t^*)] \iff$

progressivo e accelerato $\forall t > t^*$
retrogrado e ritardato $\forall t < t^*$

se $\ddot{s}_0 < 0 \implies [\dot{s}\ddot{s} = \ddot{s}_0^2 (t - t^*), \quad \dot{s} = \ddot{s}_0 (t - t^*)] \iff$

retrogrado e accelerato $\forall t > t^*$
progressivo e ritardato $\forall t < t^*$

$$\mathbf{a}(s) = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{R(s)}\mathbf{n}(s)$$

- E' nulla la componente dell'accelerazione lungo la binormale \mathbf{b}
- I moti con accelerazione puramente normale ad ogni istante sono moti uniformi

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{R}\mathbf{n} \iff \ddot{s}\mathbf{t} = \mathbf{0} \iff \ddot{s} = 0$$

Non è imposta alcuna restrizione sulla traiettoria ma solo sulla legge oraria che dev'essere quella dei moti uniformi.

- I moti con accelerazione puramente tangenziale ad ogni istante sono moti rettilinei

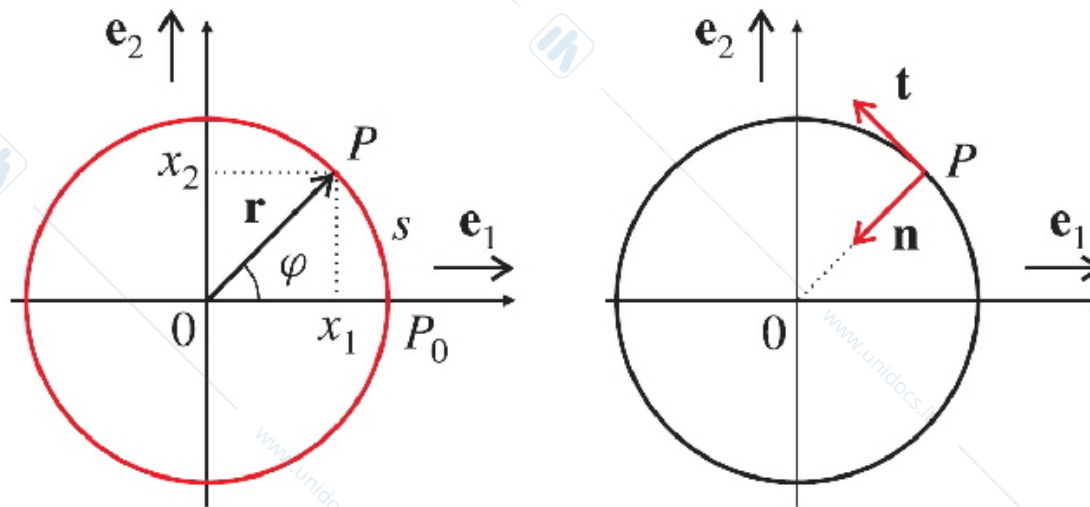
$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{t} \iff \frac{v^2}{R}\mathbf{n} = \mathbf{0} \iff \frac{1}{R} = 0 \vee \underbrace{v = 0} \iff \frac{1}{R} = 0 \iff c(s) = 0$$

Non è imposta alcuna restrizione sulla legge oraria $s(t)$ ma la traiettoria dev'essere rettilinea.

1.3 Moto circolare

Moto circolare se il punto percorre una traiettoria circolare con legge oraria

$$s = s(t), \quad s(t) = R\varphi(t) \quad (R = \text{cost}).$$



$$\mathbf{r}(t) = R \cos \varphi(t) \mathbf{e}_1 + R \sin \varphi(t) \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = -R\dot{\varphi} \sin \varphi(t) \mathbf{e}_1 + R\dot{\varphi} \cos \varphi(t) \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{t} = R\dot{\varphi}(t) \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_3, \quad P - O = -R\mathbf{n} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v} = R\dot{\varphi}(t) \mathbf{n} \times \mathbf{e}_3 = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_3 \times (-R\mathbf{n}) = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_3 \times (P - O) = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r},$$

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n} = R\ddot{\varphi}(t) \mathbf{t} + \frac{(R\dot{\varphi}(t))^2}{R}\mathbf{n} = R\ddot{\varphi}(t) \mathbf{t} + R\dot{\varphi}^2(t) \mathbf{n}$$

velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_3,$ $\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r},$ $\mathbf{a} = R\ddot{\varphi}(t) \mathbf{t} + R\omega^2 \mathbf{n}$

In un **moto circolare uniforme** ($\ddot{s}(t) = 0 \quad \forall t$) si ha

$$\ddot{\varphi}(t) = 0 \quad \forall t \iff \varphi(t) = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0 \quad \forall t \quad [\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(t_0), \varphi_0 = \varphi(t_0)]$$

$$x_1(t) = R \cos(\dot{\varphi}_0 t + \varphi_0), \quad x_2(t) = R \sin(\dot{\varphi}_0 t + \varphi_0),$$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0, \quad \omega = |\dot{\varphi}_0| \quad (\text{frequenza})$$

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{a} = R\omega^2 \mathbf{n} = \omega^2 (O - P).$$

Il moto circolare uniforme è periodico¹ di periodo $T = 2\pi/\omega$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} : \varphi(t+T) = \underbrace{\dot{\varphi}_0 t}_{\varphi(t)} + \underbrace{\dot{\varphi}_0 T + \varphi_0}_{\varphi_0} = \varphi(t) + \dot{\varphi}_0 T \implies |\varphi(t+T) - \varphi(t)| = |\dot{\varphi}_0| T = 2\pi$$

¹ Il moto di un punto è periodico di periodo T se $\mathbf{r}(t+T) = \mathbf{r}(t) \quad \forall t$.

1.4 Moto elicoidale uniforme

Il **moto elicoidale (uniforme)** è il *moto composto*² di un moto circolare uniforme di centro O su di un piano π e di un moto rettilineo uniforme lungo una retta per O e ortogonale a π .

La traiettoria di P sulla superficie del cilindro di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

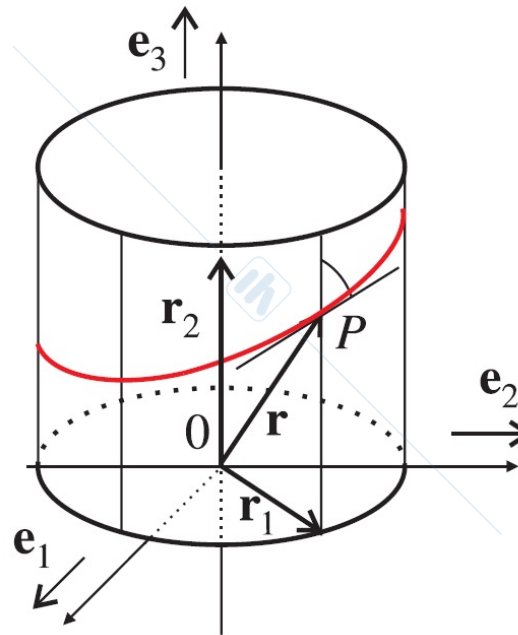
è un'**elica cilindrica**, cioè una curva che forma un angolo costante γ con le generatrici del cilindro.

² Si definisce **moto composto** dei moti cui sono soggetti n punti $P_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ il moto del punto P di coordinate

$$x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i, \quad z = \sum_{i=1}^n z_i \quad \left(OP = \sum_{i=1}^n OP_i \right).$$

Da cui segue che la velocità e l'accelerazione del moto composto sono uguali alle somme vettoriali delle velocità e accelerazione dei moti componenti.

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i.$$



Anche la velocità di P , tangente alla traiettoria in ogni istante, forma ad ogni istante un angolo costante γ con l'asse Ox_3 .

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t),$$

$$\mathbf{r}_1(t) = R \cos(\dot{\varphi}_0 t + \varphi_0) \mathbf{e}_1 + R \sin(\dot{\varphi}_0 t + \varphi_0) \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_2(t) = (\dot{x}_{3,0} t + x_{3,0}) \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v}(t) = -R\dot{\varphi}_0 \sin \varphi(t) \mathbf{e}_1 + R\dot{\varphi}_0 \cos \varphi(t) \mathbf{e}_2 + \dot{x}_{3,0} \mathbf{e}_3 \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{R^2 \dot{\varphi}_0^2 + \dot{x}_{3,0}^2} = \text{cost}$$

Il moto di P_1 è circolare uniforme e quindi periodico di periodo $T = 2\pi/\omega$, definito il *passo p dell'elica*, cioè la distanza tra due intersezioni consecutive dell'elica con una stessa generatrice, si ha

$$p = |x_3(t+T) - x_3(t)| = \frac{2\pi}{\omega} |\dot{x}_3(t)|.$$

Allora, nell'intervallo $[t, t+T]$

P_1 percorre una intera traiettoria (circonferenza)

P_2 percorre lo spazio $p = \frac{2\pi}{\omega} |\dot{x}_3(t)|$

e quindi P percorre un'intera spira dell'elica.

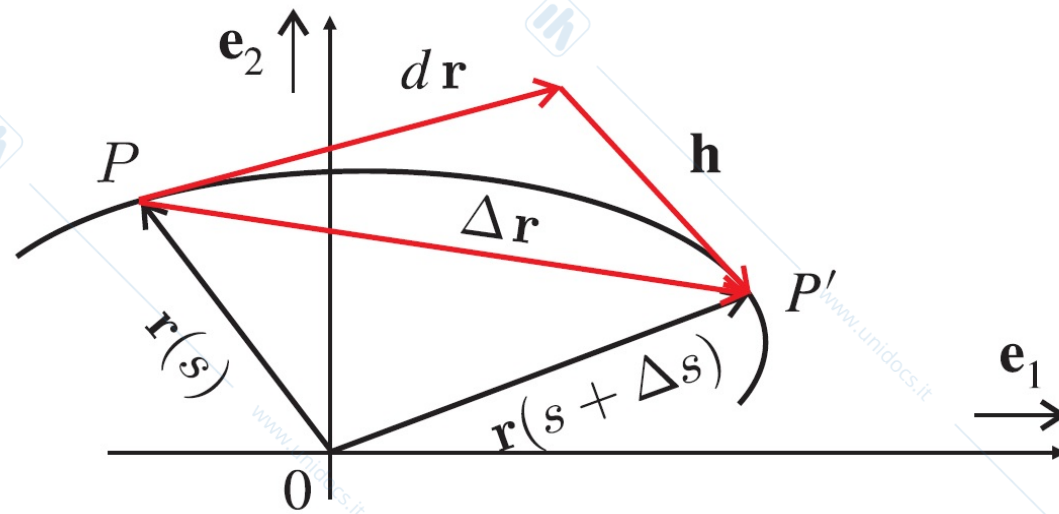
Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 06 del 08 Ottobre 2020

1 Cinematica del punto

1.1 Spostamento finito ed infinitesimo o elementare



$$\mathbf{r}_P(s) = x_1(s) \mathbf{e}_1 + x_2(s) \mathbf{e}_2 + x_3(s) \mathbf{e}_3, \quad s = s(t)$$

spostamento finito $\Delta P(s) = P' - P = \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s) = \Delta \mathbf{r}$

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{r}'(s) \Delta s + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{r}''(s) (\Delta s)^2 + \dots}_{\mathbf{h}(s)} = \mathbf{r}(s) + \mathbf{r}'(s) \Delta s + \mathbf{h}(s)$$

Per il teorema sul differenziale

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s) = \underbrace{\mathbf{r}'(s) \Delta s}_{d\mathbf{r}(s)} + \mathbf{h}(s) = d\mathbf{r}(s) + \mathbf{h}(s)$$

spostamento infinitesimo (o elementare) $dP(s) = d\mathbf{r}(s) = \mathbf{t}(s) ds$.

In definitiva si ha

$$\Delta \mathbf{r}(s) = d\mathbf{r}(s) + \mathbf{h}(s),$$

dove $\Delta \mathbf{r}(s)$ ha la direzione della corda $P(s)P'(s + \Delta s)$ e il vettore $dP(s)$ ha invece la direzione della tangente alla traiettoria in $P(s)$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(s), \quad s = s(t) \\ \mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{r}}(s(t)) = \mathbf{r}'(s(t)) \dot{s}(t) \implies \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{r}'(s(t)) ds(t) = d\mathbf{r}(s(t)) \\ &\iff dP(s(t)) = \mathbf{v}(t) dt \end{aligned}$$

Esempio 6.1. Per il *moto circolare* nel piano Ox_1x_2 si ha

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_3, \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_3, \mathbf{s} = R\varphi, \mathbf{r} = -R\mathbf{n}$$

da cui si ottiene

$$d\mathbf{r} = \mathbf{t}ds = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_3 R d\varphi = d\varphi \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r} \quad \varphi = \varphi \mathbf{e}_3 \text{ (vettore rotazione).}$$

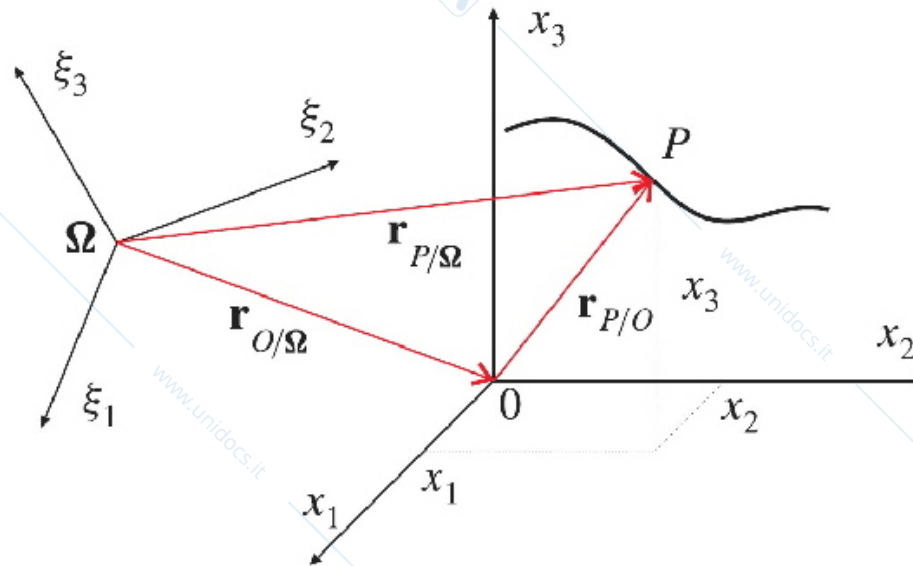
Nel *moto elicoidale* si ha

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = d\varphi \times \mathbf{r}_1 + dx_3 \mathbf{e}_3 = d\varphi \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\tau} \quad \boldsymbol{\tau} = dx_3 \mathbf{e}_3 \text{ (vettore traslazione).}$$

1.2 Moti relativi

Si vogliono stabilire le relazioni esistenti tra le velocità di un punto mobile P in due terne di riferimento $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$ e $Ox_1x_2x_3$ in moto l'una rispetto all'altra.

terna fissa $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$, terna mobile $Ox_1x_2x_3$



moto assoluto

moto di P nella terna fissa $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$

moto relativo

moto di P nella terna mobile $Ox_1x_2x_3$

moto di trascinamento

moto rigido della terna mobile $Ox_1x_2x_3$ rispetto alla terna

fissa $\Omega \xi_1 \xi_2 \xi_3$

$$\mathbf{r}_{P/\Omega}(t) = \mathbf{r}_{O/\Omega}(t) + \mathbf{r}_{P/O}(t), \quad \mathbf{r}_{P/O} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a &\equiv \dot{\mathbf{r}}_{P/\Omega}(t) = \dot{\mathbf{r}}_{O/\Omega}(t) + \underbrace{\dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{x}_3 \mathbf{e}_3}_{\mathbf{v}_r} + x_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + x_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + x_3 \dot{\mathbf{e}}_3 \\ &= \dot{\mathbf{r}}_{O/\Omega}(t) + \underbrace{\mathbf{v}_r}_{\mathbf{v}_r} + x_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + x_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + x_3 \dot{\mathbf{e}}_3 \\ &= \mathbf{v}_r + \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_{O/\Omega}(t) + x_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + x_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + x_3 \dot{\mathbf{e}}_3}_{\mathbf{v}_\tau} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\tau \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\tau$$

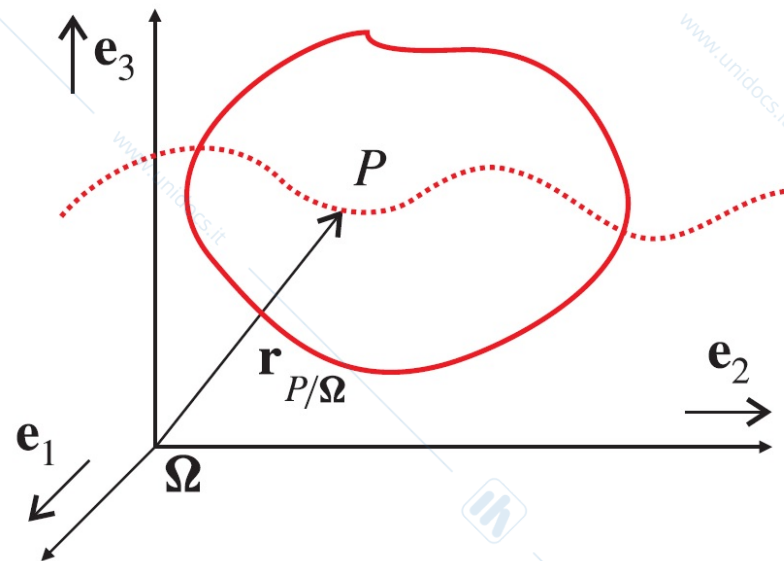
dove \mathbf{v}_a e \mathbf{v}_r sono la **velocità assoluta** e **relativa** di P e \mathbf{v}_τ è la **velocità di trascinamento** cioè la velocità di un punto dello spazio solidale $Ox_1x_2x_3$ a cui è sovrapposto nell'istante considerato il punto mobile P .

2 Moti rigidi

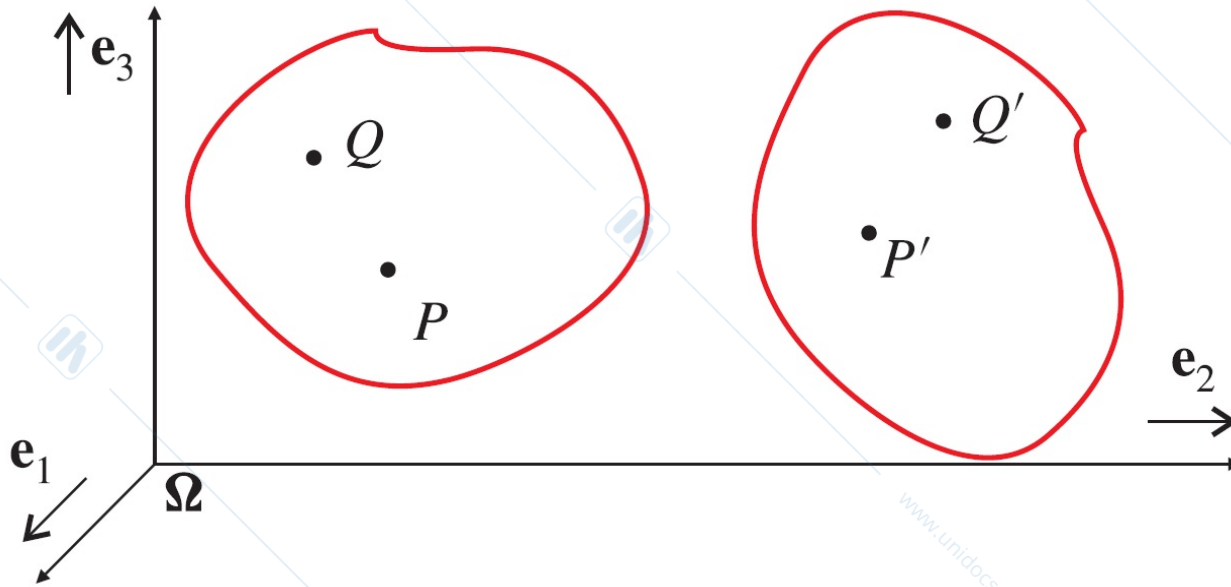
2.1 Equazioni dei moti rigidi

Sia S un *sistema meccanico discreto o continuo*, per individuare la *configurazione del sistema* ad ogni istante t occorre determinare ad ogni istante la posizione di ogni suo punto

$$\mathbf{r}_{P/\Omega} = \mathbf{r}_{P/\Omega}(t), \quad \forall P \in S.$$



S rigido $|PQ| = \text{cost} \quad \forall P, Q \in S \quad \forall t$

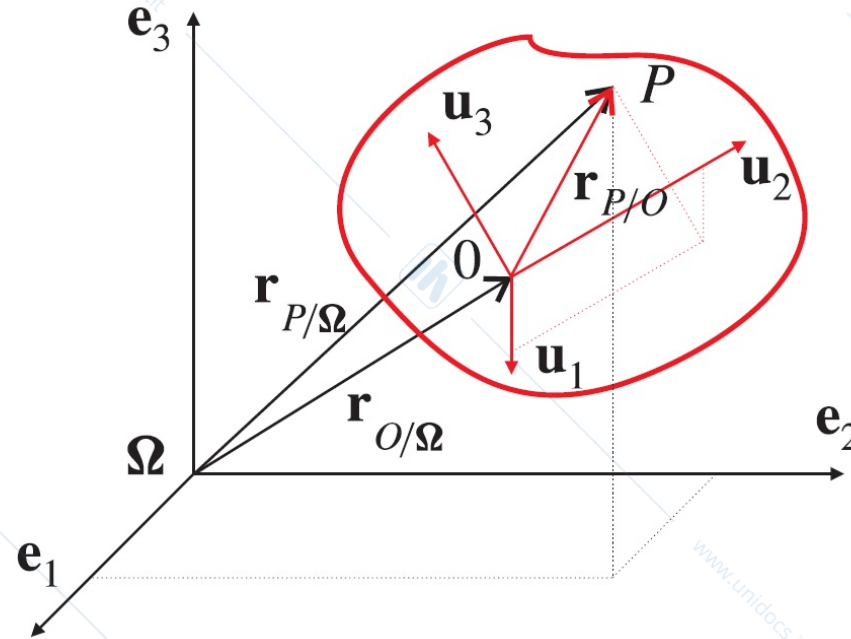


spostamento rigido $|PQ| = |P'Q'| \quad \forall P, Q \in S$ (rigido o non rigido)

moto rigido $\forall t : |PQ| = \text{cost} \quad \forall P, Q \in S$ (rigido o non rigido)

$\Omega x_1 x_2 x_3$ terna fissa o di laboratorio di versori (e_i) $[P \equiv (x_1, x_2, x_3)]$

$O y_1 y_2 y_3$ terna mobile **solidale** ad S di versori $(u_i) : O \in S$ $[P \equiv (y_1, y_2, y_3)]$



eq. dei moti rigidi $O \in S \quad \mathbf{r}_{P/\Omega}(t) = \mathbf{r}_{O/\Omega}(t) + \mathbf{r}_{P/O}(t) \quad \forall P \in S$

$$\mathbf{r}_{O/\Omega}(t) = x_{O1}(t) \mathbf{e}_1 + x_{O2}(t) \mathbf{e}_2 + x_{O3}(t) \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{r}_{P/O}(t) = y_1 \mathbf{u}_1(t) + y_2 \mathbf{u}_2(t) + y_3 \mathbf{u}_3(t),$$

$$\mathbf{u}_i(t) = A_{i1}(t) \mathbf{e}_1 + A_{i2}(t) \mathbf{e}_2 + A_{i3}(t) \mathbf{e}_3, \quad i = 1, 2, 3 \quad (A_{ij} \text{ coseni direttori})$$

$$\mathbf{r}_{P/\Omega}(t) = x_{O1}(t) \mathbf{e}_1 + x_{O2}(t) \mathbf{e}_2 + x_{O3}(t) \mathbf{e}_3 + y_1 (A_{11}(t) \mathbf{e}_1 + A_{12}(t) \mathbf{e}_2 + A_{13}(t) \mathbf{e}_3) + y_2 (A_{21}(t) \mathbf{e}_1 + A_{22}(t) \mathbf{e}_2 + A_{23}(t) \mathbf{e}_3) + y_3 (A_{31}(t) \mathbf{e}_1 + A_{32}(t) \mathbf{e}_2 + A_{33}(t) \mathbf{e}_3)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{O1}(t) + y_1 A_{11}(t) + y_2 A_{21}(t) + y_3 A_{31}(t), \\ x_2(t) = x_{O2}(t) + y_1 A_{12}(t) + y_2 A_{22}(t) + y_3 A_{32}(t), \\ x_3(t) = x_{O3}(t) + y_1 A_{13}(t) + y_2 A_{23}(t) + y_3 A_{33}(t), \end{cases} \quad [3 + 9 \text{ funzioni di } t]$$

[6 relazioni indipendenti]

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i(t) \cdot \mathbf{u}_i(t) = 1, & \forall i \\ \mathbf{u}_i(t) \cdot \mathbf{u}_j(t) = 0, & \forall i \neq j, \end{cases} \iff \begin{cases} A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + A_{i3}^2 = 1, & \forall i \\ A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} + A_{i3}A_{j3} = 0, & \forall i \neq j, \end{cases}$$

Le configurazioni di un sistema rigido S dipendono da 6 funzioni del tempo

- $x_{O1}(t), x_{O2}(t), x_{O3}(t)$ che definiscono la posizione del punto O nel riferimento fisso;
- 3 coseni direttori indipendenti A_{ij} che definiscono l'orientazione della terna solidale rispetto a quella fissa

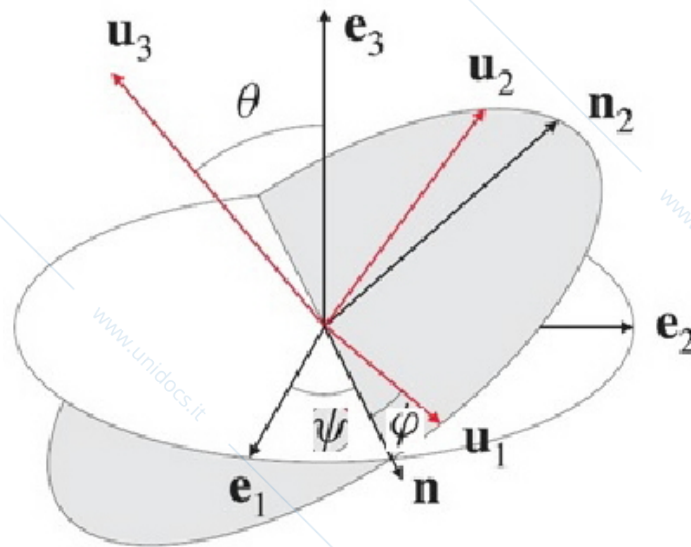
$\Omega x_1 x_2 x_3$ terna fissa o di laboratorio di versori (e_i)

$Ox_1 x_2 x_3$ terna con centro in $O \in S$ e assi di versori (e_i)

$Oy_1 y_2 y_3$ terna mobile con centro in $O \in S$ **solidale** ad S di versori (u_i)

linea dei nodi $n = Ox_1 x_2 \cap Oy_1 y_2$ $\mathbf{n} = \text{vers } n$

angoli di Eulero: ψ **precessione** φ **rotazione propria** ϑ **nutazione**



Gli angoli di Eulero costituiscono una *terna di funzioni indipendenti* atti ad individuare ad ogni istante l'orientamento della terna solidale rispetto a quella fissa.

La terna solidale $Oy_1y_2y_3$ si sovrappone alla terna $Ox_1x_2x_3$ con le tre seguenti rotazioni indipendenti

- rotazione di angolo ψ attorno all'asse Ox_3 che porta l'asse Ox_1 a sovrapporsi alla linea dei nodi n ;
- rotazione di angolo φ attorno all'asse Oy_3 che porta l'asse Ox_1 a sovrapporsi all'asse Oy_1
- rotazione di angolo θ attorno alla linea dei nodi n che porta l'asse Ox_3 a sovrapporsi all'asse Oy_3 .

Negli istanti in cui i piani Ox_1x_2 e Oy_1y_2 sono sovrapposti la linea dei nodi è indeterminata così come gli angoli φ e ψ laddove $\theta = 0, \pi$. Tuttavia è possibile definire l'angolo $\varphi + \psi$ tra gli assi Oy_1 e Ox_1 che assieme a θ è sufficiente ad individuare l'orientazione della terna $Oy_1y_2y_3$ rispetto alla terna $Ox_1x_2x_3$.

Le configurazioni di un sistema rigido S dipendono da 6 funzioni del tempo

- $x_{O1}(t), x_{O2}(t), x_{O3}(t)$ che definiscono la posizione del punto O nel riferimento fisso;
- 3 angoli di Eulero che definiscono l'orientazione della terna solidale rispetto a quella fissa

Teorema di Poisson.

Se S è un corpo rigido in moto nel riferimento $\Omega x_1 x_2 x_3$ e $\mathbf{u}(t)$ è un vettore costante in S , allora si ha

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{u}(t),$$

con $\boldsymbol{\omega}(t)$ (**velocità angolare**) vettore indipendente da $\mathbf{u}(t)$.

In particolare, se (\mathbf{u}_i) sono i versori degli assi di un riferimento $Oy_1y_2y_3$ solidale ad S

$$\frac{d\mathbf{u}_i(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{u}_i(t), \quad \forall i.$$

Derivando rispetto al tempo l'equazione dei moti rigidi

$$\mathbf{r}_{P/\Omega}(t) = \mathbf{r}_{O/\Omega}(t) + \mathbf{r}_{P/O}(t),$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P(t) &= \dot{\mathbf{r}}_{P/\Omega}(t) = \dot{\mathbf{r}}_{O/\Omega}(t) + y_1 \dot{\mathbf{u}}_1(t) + y_2 \dot{\mathbf{u}}_2(t) + y_3 \dot{\mathbf{u}}_3(t) \\ &= \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times y_1 \mathbf{u}_1(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times y_2 \mathbf{u}_2(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times y_3 \mathbf{u}_3(t) \\ &= \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [y_1 \mathbf{u}_1(t) + y_2 \mathbf{u}_2(t) + y_3 \mathbf{u}_3(t)] = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_{P/O}(t). \end{aligned}$$

$$\forall P \in S \quad \mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O) \quad \forall t$$

atto di moto rigido $\{(P, \mathbf{v}_P(t)) : P \in S, \mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O)\}$

spostamento elementare
vettore di rotazione elementare

$$dP = dO + d\varphi \times (P - O), \quad d\varphi = \boldsymbol{\omega} dt$$

$$d\varphi = \boldsymbol{\omega} dt$$

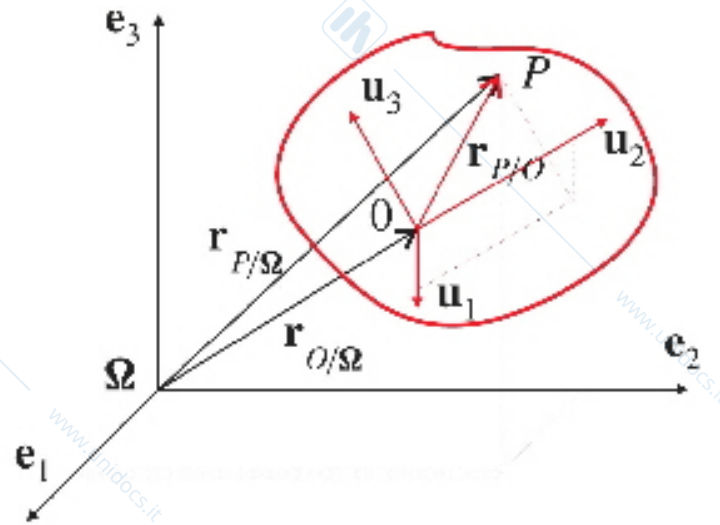
Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 07 del 13 Ottobre 2020

1 Moti rigidi

$\Omega x_1 x_2 x_3$ (e_i) (fissa) $Oy_1 y_2 y_3$ (u_i) (solidale)



	u_1	u_2	u_3
e_1	A_{11}	A_{21}	A_{31}
e_2	A_{12}	A_{22}	A_{32}
e_3	A_{13}	A_{23}	A_{33}

$$\begin{cases} A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + A_{i3}^2 = 1, & \forall i \\ A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} + A_{i3}A_{j3} = 0, & \forall i \neq j, \end{cases}$$

equazione cartesiana dei moti rigidi $x_i(t) = x_{O_i}(t) + y_1 A_{1i}(t) + y_2 A_{2i}(t) + y_3 A_{3i}(t)$,

atto di moto rigido $\{(P, \mathbf{v}_P(t)) : P \in S, \mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O)\}$

spostamento elementare $dP = dO + d\boldsymbol{\varphi} \times (P - O), \quad d\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} dt \quad \forall P$

vettore di rotazione elementare $d\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} dt$

Fissata una posizione di S gli spostamenti elementari rigidi che il sistema può compiere sono ∞^6 (3 componenti dello spostamento di O e 3 componenti di $d\boldsymbol{\varphi}$).

1.1 Moto traslatorio

In un **moto traslatorio** tutti i punti di S hanno, istante per istante, la stessa velocità.

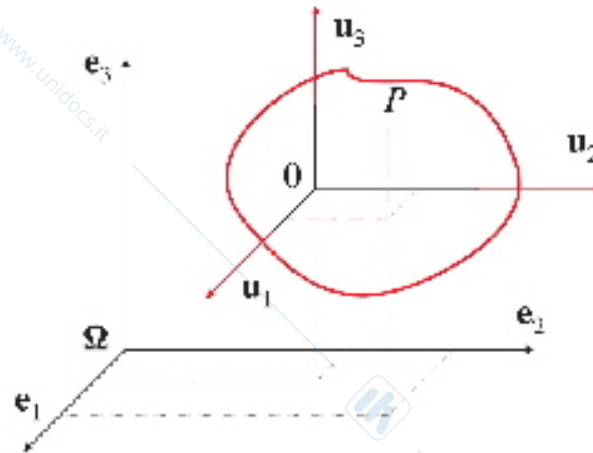
moto rigido traslatorio $\forall P_1, P_2 \in S \quad P_2 - P_1 = \mathbf{c} = \text{vettore costante}$

atto di moto traslatorio $\forall P_1, P_2 \in S \quad \mathbf{v}_{P_1}(t) = \mathbf{v}_{P_2}(t) = \boldsymbol{\tau}(t)$

moto traslatorio $\iff \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t$

$\forall P_1, P_2 \quad \mathbf{v}_{P_1}(t) = \mathbf{v}_{P_2}(t) \iff \forall P_1, P_2 \quad \boldsymbol{\omega}(t) \times (P_2 - P_1) = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0}$

In un moto traslatorio i versori di una terna solidale restano costanti nel tempo.



$\Omega x_1 x_2 x_3$ (e_i) (fissa) $O y_1 y_2 y_3$ (u_i) (solidale) : $u_i \parallel e_i$

$$u_i = e_i \quad \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \left[\begin{matrix} A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1 \\ A_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \end{matrix} \right]$$

equazioni cartesiane dei moti traslatori $x_i(t) = x_{0i}(t) + y_i, \quad i = 1, 2, 3$
spostamento elementare $dP = dO \quad \forall P$

Se $\tau(t)$ ha direzione costante allora si ha un **moto traslatorio rettilineo** e le traiettorie dei singoli punti sono rette parallele e $\tau(t)$ ha direzione costante.

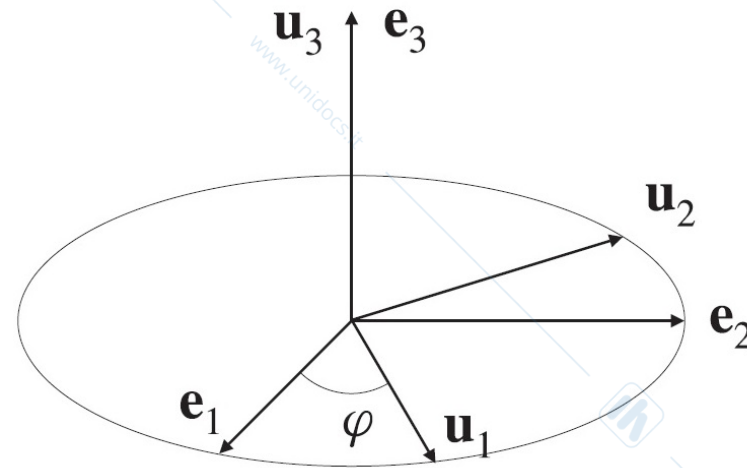
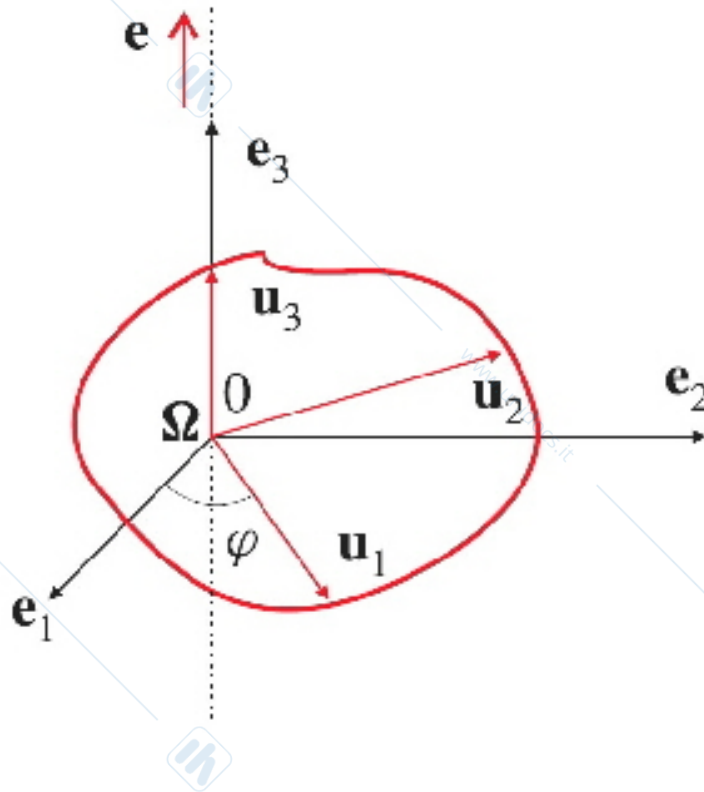
Se $\tau(t) = \text{cost}$ le rette parallele sono percorse con moto uniforme e si ha un **moto traslatorio uniforme**.

In generale, fissata una posizione di S gli spostamenti elementari rigidi traslatori che il sistema può compiere sono ∞^3 (3 componenti dello spostamento di O).

1.2 Moto rotatorio attorno ad un asse fisso a

Un **moto rotatorio attorno ad un asse fisso a** è un moto rigido in cui restano fissi tutti i punti di una retta a di S detta **asse di rotazione**.

$$\Omega x_1 x_2 x_3 \text{ (fissa)} \quad O y_1 y_2 y_3 \text{ (solidale)} : \Omega \equiv O, \quad x_3 = y_3 = a$$



$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\
 \mathbf{e}_1 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\
 \mathbf{e}_2 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\
 \mathbf{e}_3 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} A_{11} = A_{22} = \cos \varphi, A_{21} = -A_{12} = \sin \varphi, A_{33} = 1 \\ A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = 0 \end{array} \right]$$

equazioni cartesiane dei moti rotatori

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1 \cos \varphi(t) - y_2 \sin \varphi(t), \\ x_2(t) = y_1 \sin \varphi(t) + y_2 \cos \varphi(t), \\ x_3(t) = y_3. \end{cases}$$

Il moto di un qualsiasi punto di S è circolare

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = \text{cost}, \quad x_3 = y_3 = \text{cost}$$

atto di moto rotatorio

$$\mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O) \quad O \in a \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v}_O(t) = \mathbf{0}$$

$$\forall P \in a \quad \mathbf{v}_P(t) = \mathbf{0}$$

$$\implies \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O) = \mathbf{0} \quad \forall P, O \in a \implies \boldsymbol{\omega}(t) \parallel a$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = p\mathbf{u}_1 + q\mathbf{u}_2 + r\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3$$

$$\iff \boldsymbol{\omega}(t) = r\mathbf{e}_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 & \dot{\mathbf{u}}_1 &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{u}_1 \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= r \mathbf{e}_3 & \implies & -\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_2 = r \mathbf{e}_3 \times (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) \implies \dot{\varphi} = r \\ \dot{\mathbf{u}}_1 &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{u}_1 & & = r \cos \varphi \mathbf{e}_2 - r \sin \varphi \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

atto di moto rotatorio $\mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - A) \quad A \in a \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3$

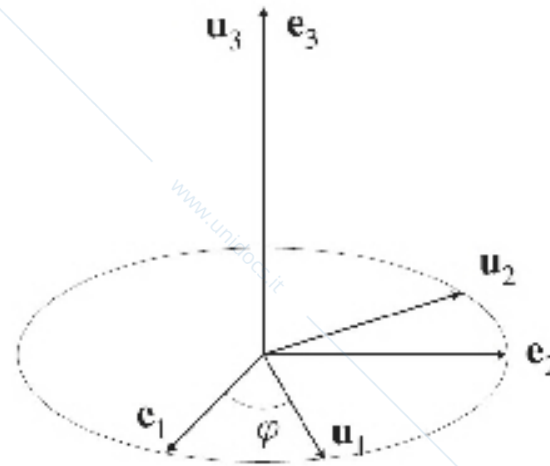
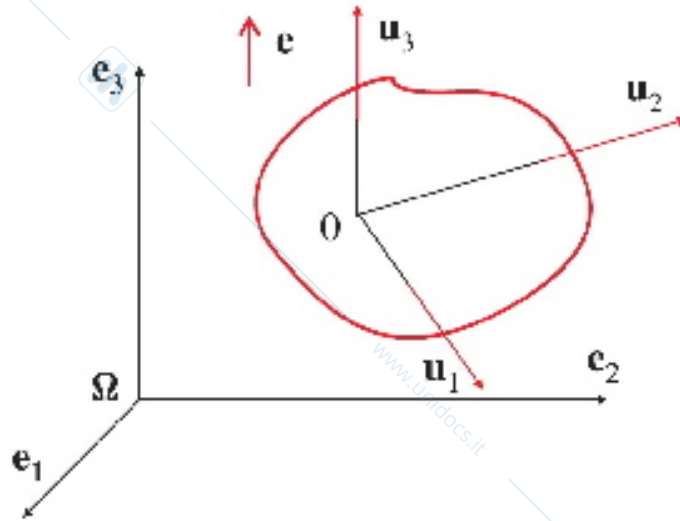
spostamento elementare $dP = d\varphi \times (P - A) \quad A \in a \quad \forall P$
 $dP = d\varphi \times (P - P^*) \quad \varphi = \varphi \mathbf{e}_3 \quad \forall P$

In generale, fissata una posizione di S gli spostamenti elementari rigidi rotatori che il sistema può compiere sono ∞^1 (1 componente di $d\varphi$).

1.3 Moto rototraslatorio

Un **moto rototraslatorio** è un moto rigido in cui il sistema S ruota attorno ad un asse a^* , ad esso solidale, il quale si muove di moto traslatorio.

$$\Omega x_1 x_2 x_3 \text{ (fissa)} \quad O x_1 x_2 x_3 \quad O y_1 y_2 y_3 \text{ (solidale)} : O \in a^*, \quad y_3 = a^* \quad x_3 \parallel a^*$$



	\mathbf{u}_1	\mathbf{u}_2	\mathbf{u}_3
\mathbf{e}_1	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
\mathbf{e}_2	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
\mathbf{e}_3	0	0	1

$$\left[\begin{array}{l} A_{11} = A_{22} = \cos \varphi, A_{21} = -A_{12} = \sin \varphi, A_{33} = 1 \\ A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = 0 \end{array} \right]$$

eq. cartesiane dei moti rototraslatori

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{O1}(t) + y_1 \cos \varphi(t) - y_2 \sin \varphi(t), \\ x_2(t) = x_{O2}(t) + y_1 \sin \varphi(t) + y_2 \cos \varphi(t), \\ x_3(t) = x_{O3}(t) + y_3. \end{cases}$$

Applicando il *principio dei moti relativi* si ha

- moto rototraslatorio \Leftrightarrow moto assoluto
- moto rotatorio di S nella terna $Ox_1x_2x_3 \Leftrightarrow$ moto relativo
- moto traslatorio della terna $Ox_1x_2x_3$ rispetto alla terna $\Omega x_1x_2x_3 \Leftrightarrow$ moto di trascinamento

atto di moto rototraslatorio

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O) \quad O \in a^* \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\tau}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O) \quad O \in a^* \quad \boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{v}_O(t), \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3$$

$$\text{spostamento elementare} \quad dP = dO + d\boldsymbol{\varphi} \times (P - O) \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}_3 \quad \forall P$$

Fissata una posizione di S gli spostamenti elementari rototraslatori che il sistema può compiere sono ∞^4 (3 comp. dello spostamento di O e 1 componente di $d\boldsymbol{\varphi}$ lungo \mathbf{e}_3).

1.4 Moto rigido sferico

Un **moto rigido sferico** è un moto rigido in cui rimane fisso un punto $O \in S$.

$$\Omega x_1 x_2 x_3 \quad (\text{fissa}) \quad O y_1 y_2 y_3 \quad (\text{solidale}) : \Omega \equiv O \text{ fisso}$$

$$\text{atto di moto rigido sferico} \quad v_P(t) = \omega(t) \times (P - O) \quad \forall P \quad (1)$$

La (1) differisce dall'analoga formula dei moti rotatori attorno ad un asse fisso per il fatto che $\omega(t)$ ha direzione variabile istante per istante.

equazioni cartesiane dei moti rigidi sferici

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1 A_{11}(t) + y_2 A_{21}(t) + y_3 A_{31}(t), \\ x_2(t) = y_1 A_{12}(t) + y_2 A_{22}(t) + y_3 A_{32}(t), \\ x_3(t) = y_1 A_{13}(t) + y_2 A_{23}(t) + y_3 A_{33}(t), \end{cases} \quad \begin{cases} A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + A_{i3}^2 = 1, \quad \forall i \\ A_{i1} A_{j1} + A_{i2} A_{j2} + A_{i3} A_{j3} = 0, \quad \forall i \neq j, \end{cases}$$

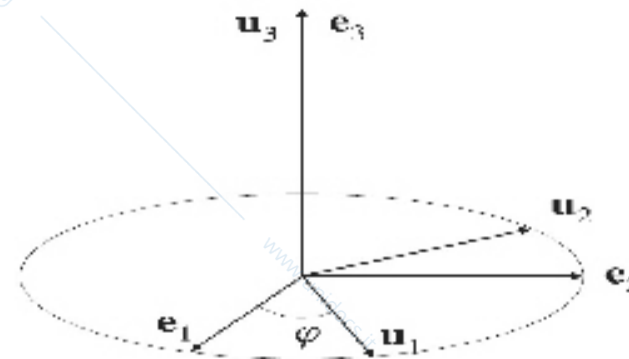
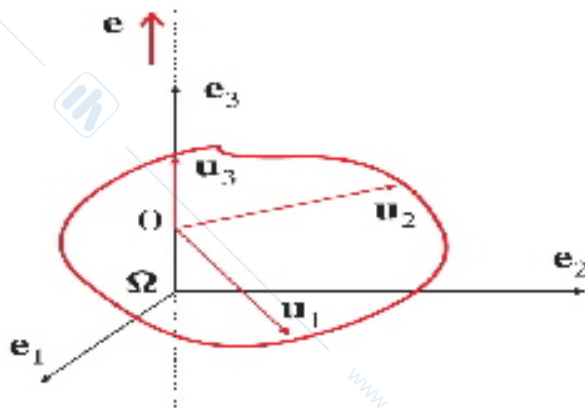
$$\text{spostamento elementare} \quad dP = d\omega \times (P - O) \quad (O \text{ fisso}) \quad \forall P$$

Fissata una posizione di S gli spostamenti elementari rigido sferici che il sistema può compiere sono ∞^3 (3 componenti di $d\omega$).

1.5 Moto con asse scorrevole su se stesso e moto elicoidale

Un **moto con asse scorrevole su se stesso** è un moto rigido in cui S ruota attorno ad un asse a^* ad esso solidale che a sua volta scorre su di un asse fisso a .

$$\Omega x_1 x_2 x_3 \text{ (fissa)} \quad O y_1 y_2 y_3 \text{ (solidale)} : \Omega, O \in a^* \equiv a \equiv y_3 \equiv x_3$$



E' un particolare moto rototraslatorio in cui il moto componente traslatorio è rettilineo e parallelo all'asse di quello rotatorio

eq. dei moti con asse scorrevole su se stesso

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1 \cos \varphi(t) - y_2 \sin \varphi(t), \\ x_2(t) = y_1 \sin \varphi(t) + y_2 \cos \varphi(t), \\ x_3(t) = x_{O3}(t) + y_3. \end{cases}$$

Ogni punto $P \in S$ si muove su di una *superficie cilindrica* di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = R^2$$

atto di moto $\mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\tau}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O)$ $O \in a^*$ $\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{v}_O(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\tau}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - A) \quad A \in a^* \quad \boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{v}_A(t), \boldsymbol{\omega}(t) \parallel a^*$$

spostamento elementare $dP = d\boldsymbol{\tau} + d\boldsymbol{\varphi} \times (P - A)$ $A \in a^*$ $\boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}_3 \quad \forall P$

Fissata una posizione di S gli spostamenti elementari dei moti con asse scorrevole su se stesso che il sistema può compiere sono ∞^2 (1 componente di $d\boldsymbol{\tau}$ e $d\boldsymbol{\varphi}$ lungo \mathbf{e}_3).

Un **moto elicoidale** è moto con asse scorrevole su se stesso per cui

$$\frac{|\boldsymbol{\tau}(t)|}{|\boldsymbol{\varphi}(t)|} = \text{cost}$$

se $\boldsymbol{\tau}(t)$ e $\boldsymbol{\varphi}(t)$ sono vettori costanti allora il moto è detto **elicoidale uniforme**, cioè sono uniformi i due moti componenti traslatorio e rotatorio.

1.6 Teorema di Mozzi

In ogni istante in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0}$, tutti i punti per cui la velocità è nulla o parallela ad $\boldsymbol{\omega}(t)$ appartengono ad una retta $a(t)$ parallela ad $\boldsymbol{\omega}(t)$, detta asse di Mozzi o asse di moto o di istantanea rotazione. Inoltre tutti i punti di $a(t)$ hanno la stessa velocità $\boldsymbol{\tau}(t)$, velocità istantanea di rotazione, nulla o parallela a $\boldsymbol{\omega}(t)$

$$\boldsymbol{v}_P(t) = \boldsymbol{\tau}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - A) \quad A \in a(t) \quad \boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\omega}(t) \parallel a(t)$$

Si osservi che in ogni moto rigido

$$\boldsymbol{v}_P(t) = \boldsymbol{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O)$$

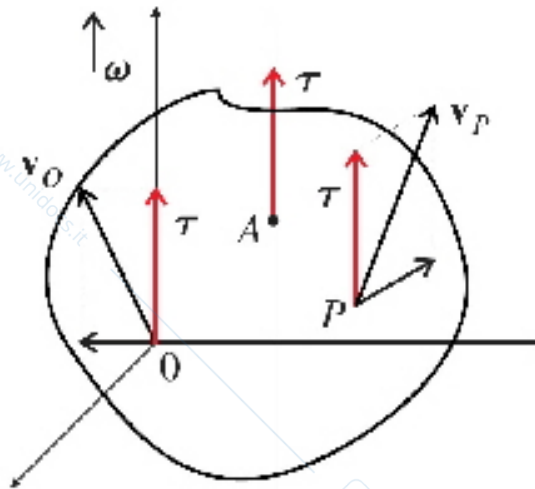
si ha

$$\text{invariante cinematico} \quad I_c = \mathbf{v}_P(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{v}_O(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \quad \forall P, O$$

Negli istanti t in cui $\boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0}$ si ha

$$\mathbf{v}_P(t) \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|} = \mathbf{v}_O(t) \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|} \quad \forall P, O$$

cioè è costante la componente normale della velocità di ogni punto nella direzione di $\boldsymbol{\omega}(t)$



$$t : \boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\tau}(t) + \boldsymbol{\eta}_P(t) \quad \boldsymbol{\tau}(t) \parallel \boldsymbol{\omega}(t) \quad \forall P$$

$$\mathbf{v}_P(t) \nearrow \boldsymbol{\eta}_P(t)$$

asse di Mozzi

$$a(t) = \left\{ P \in S : |\mathbf{v}_P| = \min_{T \in S} |\mathbf{v}_T| \right\} = \{ P \in S : \boldsymbol{\eta}_P(t) = \mathbf{0} \} = \{ P : \mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \}$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\tau}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - A) \quad A \in a(t) \quad \boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\omega}(t) \parallel a(t) \quad (2)$$

Nella (2) le leggi di variazione nel tempo dell'asse di Mozzi $a(t)$ e dei due vettori $\boldsymbol{\tau}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ variano da moto a moto.

- Moti traslatori $\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t$
- Moti rotatori attorno ad un asse fisso $a \Leftrightarrow a(t) \equiv a, \boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t$
- Moti rigidi sferici di centro $O \Leftrightarrow O \in a(t), \boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t$

$$\mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O) \quad O \in a(t)$$

con $\boldsymbol{\omega}$ variabile anche in direzione oltre che grandezza.

Meccanica Razionale

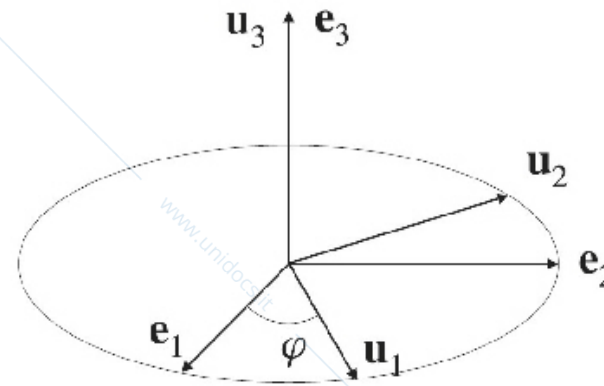
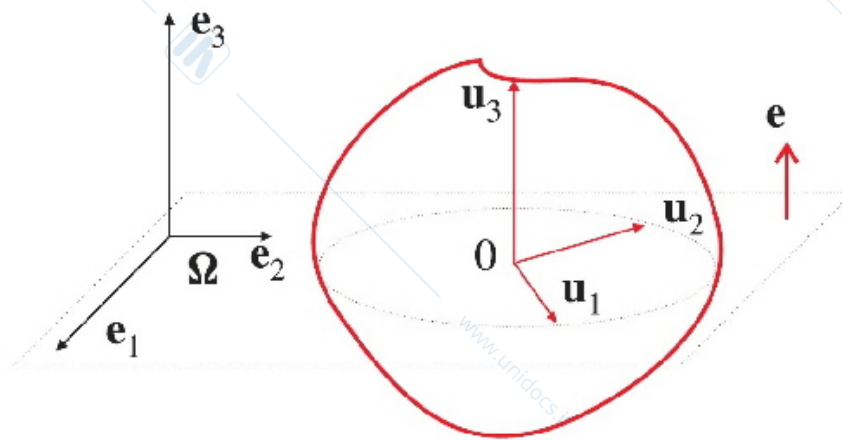
A. Marasco

Lezione N. 08 del 15 Ottobre 2020

1 Moti rigidi piani

Un **moto rigido piano** è un moto rigido in cui ogni piano π_S solidale ad S e parallelo ad un piano π fisso (*piano direttore*) si muove restando sovrapposto a se stesso.

$\Omega x_1 x_2 x_3$ (e_i) (fisso) $Oy_1 y_2 y_3$ (u_i) (solidale)



$Ox_1 x_2 x_3$ (e_i) (fisso) : $\pi \equiv Ox_1 x_2$

$Oy_1 y_2 y_3$ (u_i) (solidale) : $\pi_S \equiv Oy_1 y_2$

$\pi \parallel \pi_S, \quad Ox_3 \parallel Oy_3 \quad (e_3 = u_3)$

$\varphi \in (-\pi, \pi) = \widehat{x_1 y_1}, \quad x_{O,3}(t) = 0$

$$\begin{matrix} & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_1 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \mathbf{e}_2 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \mathbf{e}_3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{moti\ piani} \quad \begin{cases} x_1(t) = x_{O,1}(t) + y_1 \cos \varphi(t) - y_2 \sin \varphi(t), \\ x_2(t) = x_{O,2}(t) + y_1 \sin \varphi(t) + y_2 \cos \varphi(t), \\ x_3(t) = y_3, \end{cases} \quad \forall P \in S$$

Ogni punto $P \in S$ descrive su di un piano $\parallel \pi$ una traiettoria congruente e parallela a quella descritta dalla sua proiezione ortogonale su π e con la medesima legge oraria. Allora ci si può limitare allo studio del moto del piano π_S sul piano fisso π a cui resta sovrapposto.

$$\mathbf{moti\ piani} \quad \begin{cases} x_1(t) = x_{O,1}(t) + y_1 \cos \varphi(t) - y_2 \sin \varphi(t), \\ x_2(t) = x_{O,2}(t) + y_1 \sin \varphi(t) + y_2 \cos \varphi(t), \\ x_3(t) = 0, \end{cases} \quad \forall P \in S \cap \pi_S$$

$$\mathbf{atto\ di\ moto} \quad (v_P(t) \parallel \pi) \quad v_P(t) = v_O(t) + \omega(t) \times (P - O) \quad v_O(t) \parallel \pi, \omega(t) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{spostamento\ elementare\ piano} \quad dP = dO + d\varphi \times (P - O) \quad dO \parallel \pi, \varphi = \varphi \mathbf{e}_3 \quad \forall P$$

Fissata una posizione di S gli spostamenti elementari rigidi piani che il sistema può compiere sono ∞^3 (2 componenti dello spostamento di O e 1 componente di $d\varphi$).

Ogni atto di moto rigido piano σ è traslatorio parallelamente al piano π oppure è rotatorio attorno ad un asse ortogonale a π .

- Se $d\varphi \neq 0$ si hanno spostamenti elementari rotatori attorno ad un asse $a \perp \pi$

$$\exists C \in \pi_S : dC = \mathbf{0} \iff \exists C \in \pi_S : \begin{cases} dx_{C1} = dx_{O1} - d\varphi (x_{C2} - x_{O2}) = 0, \\ dx_{C2} = dx_{O2} + d\varphi (x_{C1} - x_{O1}) = 0, \end{cases}$$

$$\iff \exists C \in \pi_S : \begin{cases} x_{C1} = x_{O1} - \frac{dx_{O2}}{d\varphi}, \\ x_{C2} = x_{O2} + \frac{dx_{O1}}{d\varphi}, \\ x_{C3} = 0. \end{cases}$$

centro istantaneo di rotazione $C \equiv \left(x_{O1} - \frac{dx_{O2}}{d\varphi}, x_{O2} + \frac{dx_{O1}}{d\varphi}, 0 \right)$

$$d\varphi \neq 0 \implies dP = d\varphi \times (P - C) \quad dC = \mathbf{0}, \varphi = \varphi \mathbf{e}_3 \quad \forall P$$

Se a è una retta dello spazio solidale passante per C e ortogonale a π_S si ha

$$\forall A \in a \quad dA = d\varphi \times (A - C) \implies \forall A \in a \quad dA = \mathbf{0} \quad a \quad \text{asse istantaneo di rotazione}$$

$$dP = d\varphi \times (P - A) \quad A \in a, \varphi = \varphi \mathbf{e}_3 \quad \forall P$$

- Se $d\varphi = \mathbf{0}$ si hanno spostamenti elementari traslatori (paralleli a π)

$$d\varphi = \mathbf{0} \implies dP = dO \quad \forall P$$

Al medesimo risultato si arriva considerando l'annullarsi dell'invariante cinematico ($\mathbf{v}_P(t) \parallel \pi, \boldsymbol{\omega}(t) \perp \pi$)

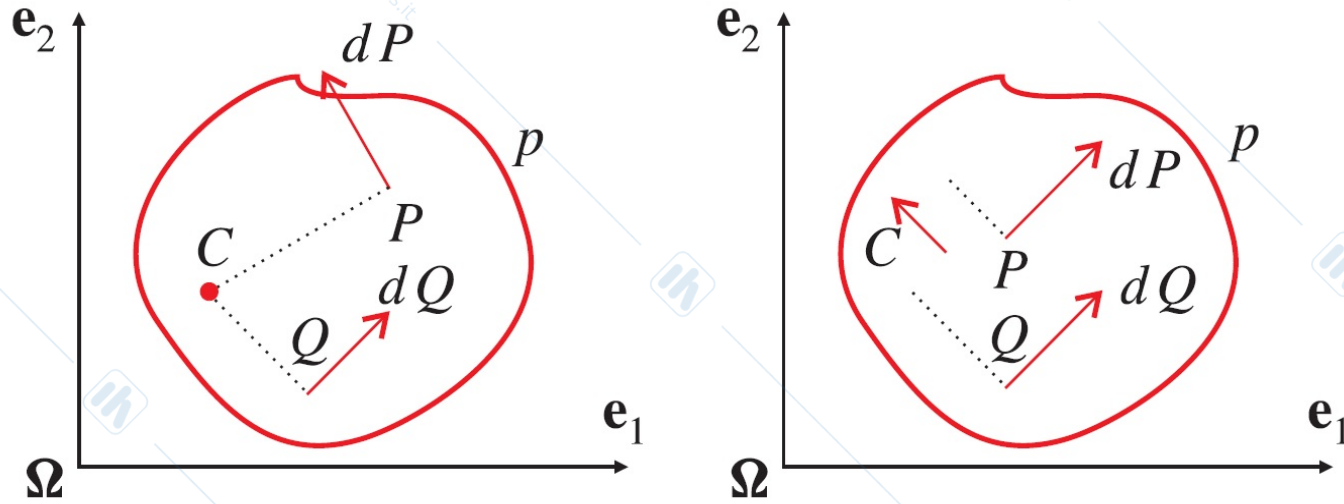
$$I_c = \mathbf{v}_P(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = 0 \quad \forall P \implies \begin{cases} \text{se } \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0} & \mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \\ \text{se } \boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0} & \mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\omega} \times (P - A) \end{cases} \quad A \in a \quad \forall P$$

da cui si evince

$$dP \cdot d\varphi = 0 \quad \forall P \implies \begin{cases} \text{se } d\varphi = \mathbf{0} & dP = dO \\ \text{se } d\varphi \neq \mathbf{0} & dP = d\varphi \times (P - A) \end{cases} \quad A \in a \quad \forall P$$

Teorema di Chasles

In un moto rigido piano le perpendicolari agli spostamenti elementari passano per il centro istantaneo di rotazione C che è un punto proprio se $d\varphi \neq \mathbf{0}$ e improprio nel caso in cui $d\varphi = \mathbf{0}$.



se $d\varphi \neq 0$ $dP = d\varphi \times (P - C) \implies dP \cdot (P - C) = 0 \iff dP \perp (P - C)$

se $d\varphi = 0$ $dP = dO \quad \forall P \implies$ le rette \perp alle traiettorie formano un fascio di rette \parallel

Proprietà dei centri istantanei di rotazione

1. Se $\exists O : dO = 0 \implies O \equiv C$

$$0 = dO = d\varphi \times (O - C)$$

$$d\varphi \neq 0 \quad (O - C) \parallel \pi, \quad (O - C) \parallel d\varphi \perp \pi \implies (O - C) = 0 \iff O \equiv C$$

2. Se $\exists P_1, P_2 : dP_1 = dP_2 = \mathbf{0} \implies dP = \mathbf{0} \quad \forall P$

$$1. \implies P_1 \equiv C \implies \mathbf{0} = dP_2 = d\varphi \times (P_2 - P_1) \implies d\varphi \parallel (P_2 - P_1) \implies d\varphi = \mathbf{0} \implies dP = \mathbf{0}$$

$$(P_2 - P_1) \parallel \pi, \quad d\varphi \perp \pi$$

3. Se $\forall P_1, P_2 : dP_1 = dP_2, \exists P_3 : dP_3 = \mathbf{0} \implies dP = \mathbf{0} \quad \forall P$

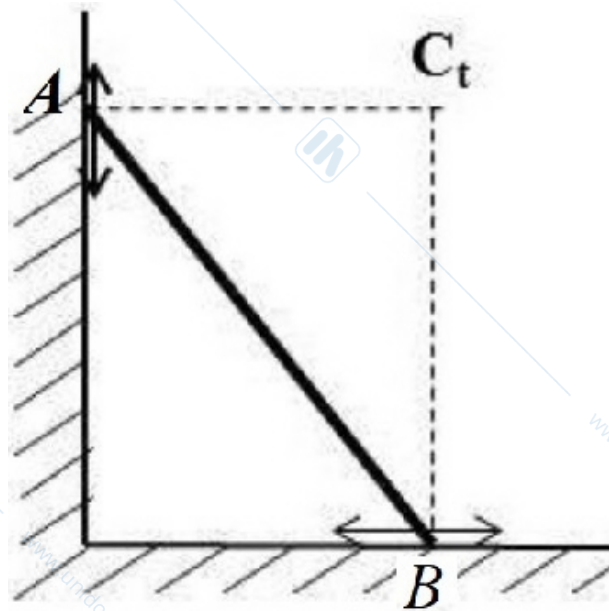
$$1. \implies P_3 \equiv C \implies dP_1 = d\varphi \times (P_1 - P_3) \quad dP_2 = d\varphi \times (P_2 - P_3)$$

$$dP_1 = dP_2 \implies \mathbf{0} = d\varphi \times [(P_1 - P_3) - (P_2 - P_3)] = d\varphi \times (P_1 - P_2) \implies d\varphi = \mathbf{0}$$

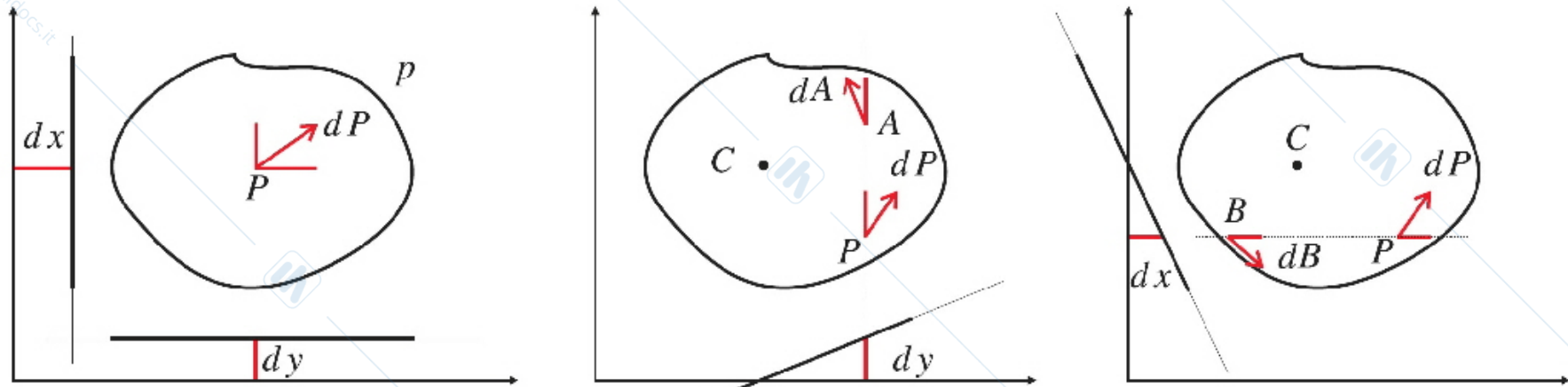
$$d\varphi \times (P_1 - P_2) = \mathbf{0} \implies d\varphi \parallel (P_1 - P_2), \quad (P_1 - P_2) \parallel \pi, \quad d\varphi \perp \pi$$

$$\implies dP = \mathbf{0} \quad \forall P$$

Esempio 8.1, Si consideri un'asta AB vincolata a muoversi lungo due guide Ox e Oy tra loro ortogonali. Ad ogni istante il centro istantaneo di rotazione C_t è dato dall'intersezione delle normali alle traiettorie nei punti A e B .



1.1 Diagrammi di spostamento



In un moto piano traslatorio i diagrammi delle componenti di dP sono rappresentate da rette parallele agli assi

$$dP = \mathbf{c} \quad \forall P \iff \begin{cases} dx = c_x \\ dy = c_y \end{cases} \quad \forall P$$

In un moto piano rotatorio i diagrammi delle componenti di dP sono rappresentate da rette fra loro perpendicolari

$$dP = d\varphi \times (P - C) \quad \forall P$$

C centro, $\varphi = \varphi \mathbf{k}$

$$d\varphi \times (P - C) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & d\varphi \\ x - x_C & y - y_C & 0 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} dx = -d\varphi (y - y_C) \\ dy = d\varphi (x - x_C) \end{cases} \quad \forall P$$

Le componenti dx dipendono solo da y e quindi tutti i punti che hanno la stessa ordinata y (cioè che appartengono alla stessa retta $y = \text{cost}$) hanno lo stesso spostamento dx

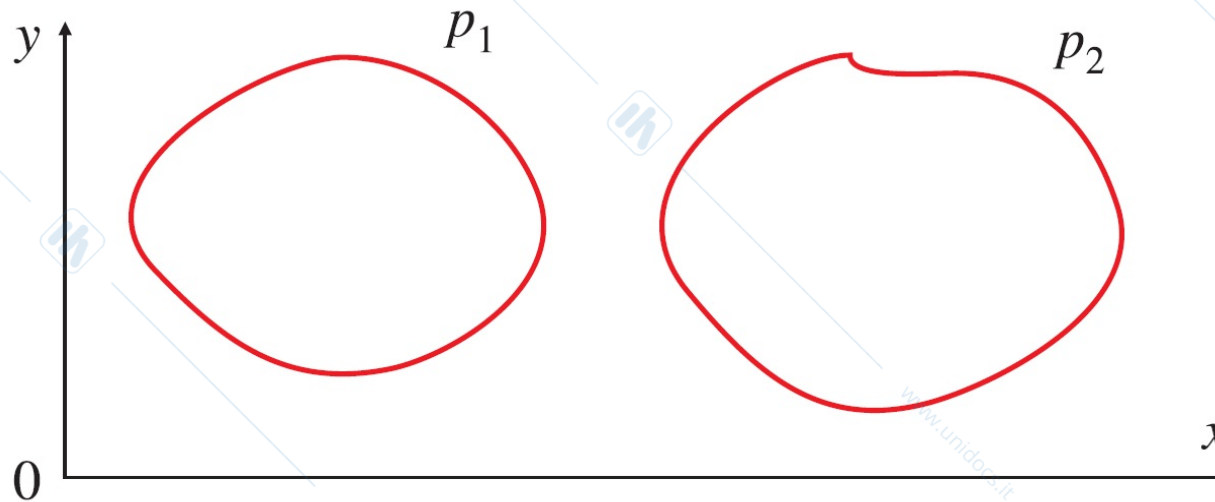
$$dx_P = dx_Q \quad \forall P, Q \in r : y = \text{cost}$$

Analogo discorso vale per le componenti dy

$$dy_P = dy_Q \quad \forall P, Q \in s : x = \text{cost}$$

1.2 Centri assoluti e centri relativi

Si consideri un sistema di due corpi rigidi $S = \{S_1, S_2\}$ in moto piano rispetto al piano fisso π .



M_1 ed M_2 moto rigido piano di S_1 ed S_2 rispetto al piano π

π_{S_1} piano solidale ad S_1 sovrapposto a π

π_{S_2} piano solidale ad S_2 sovrapposto a π

C_1 centro assoluto di rotazione

C_2 centro assoluto di rotazione

$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 \mathbf{k}$ velocità di rotazione di S_1

$\omega_2 = \dot{\varphi}_2 \mathbf{k}$ velocità di rotazione di S_2

M_{12} moto relativo di S_1 rispetto ad S_2 , cioè moto rigido piano di π_{S_1} rispetto al piano (fisso) π_{S_2}

C_{12} centro relativo del moto M_{12} (proprio o improprio)

$\omega_{12} = \dot{\varphi}_{12} \mathbf{k}$ velocità di rotazione di S_1 rispetto ad S_2

Analogamente per M_{21} .

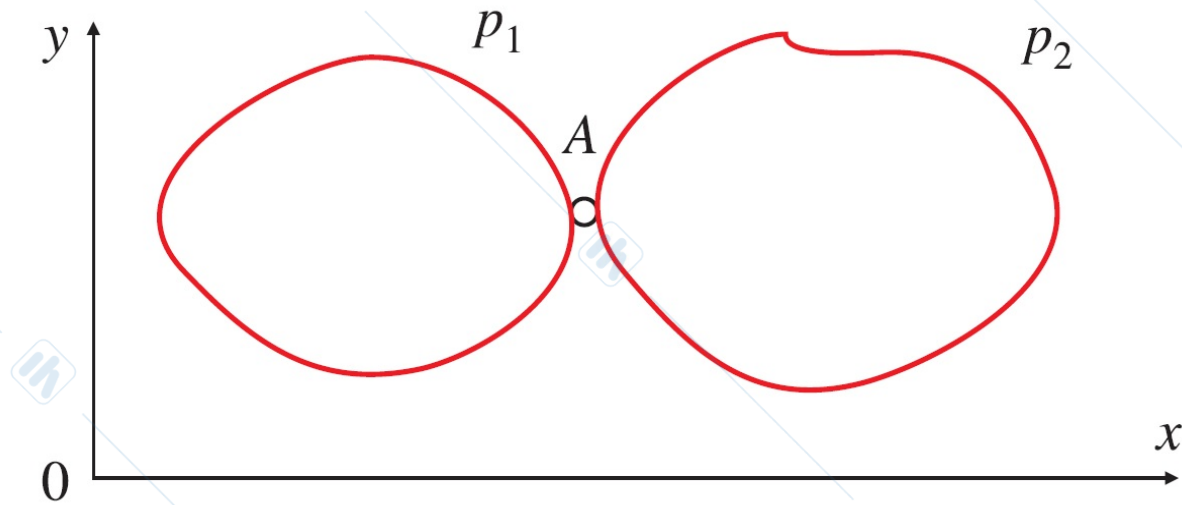
Il centro relativo C_{ij} del moto M_{ij} può essere

- proprio punto del piano solidale π_{S_i} che ha spostamento nullo rispetto a π_{S_j} ,
- improprio direzione del fascio di rette parallele di direzione normale a quella di dP

Proprietà dei centri assoluti e relativi

- $C_{12} = C_{21}$ $\omega_{12} = -\omega_{21}$
- *Teorema di allineamento dei centri*: i centri C_1 e C_2 (propri o impropri) sono sempre allineati con il centro relativo C_{12}

Esempio 8.2. Se due corpi sono vincolati in un punto A , allora si ha $C_{12} = A = C_{21}$



Meccanica Razionale

A. Marasco

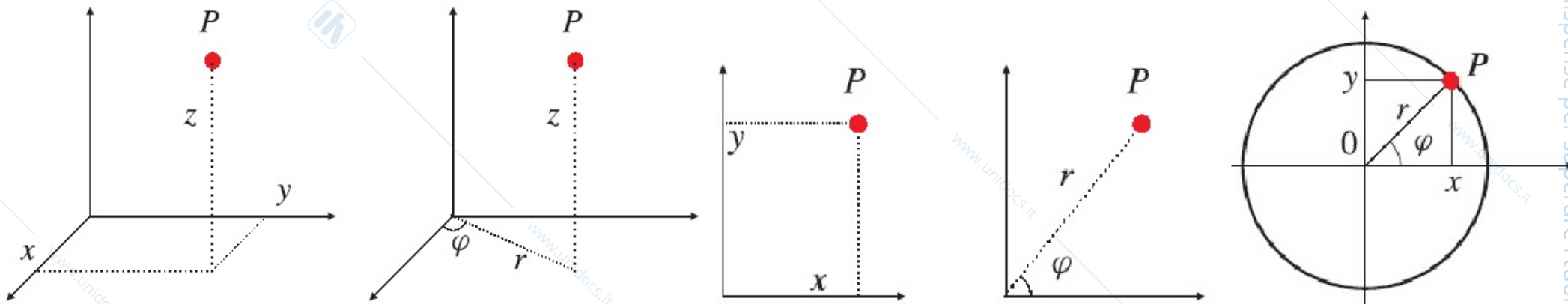
Lezione N. 09 del 20 Ottobre 2020

1 Grado di libertà e coordinate lagrangiane

Un **vincolo** è una qualunque limitazione imposta a priori alle posizioni (**vincolo olonomo**) e velocità (**vincolo anolonomo**) di un sistema meccanico S .

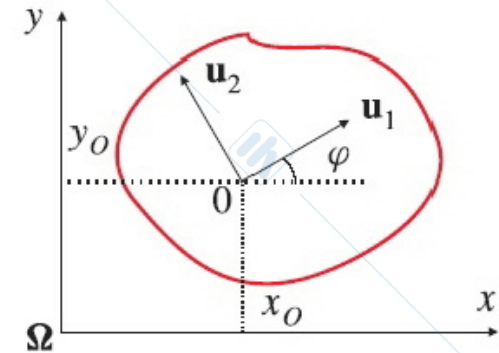
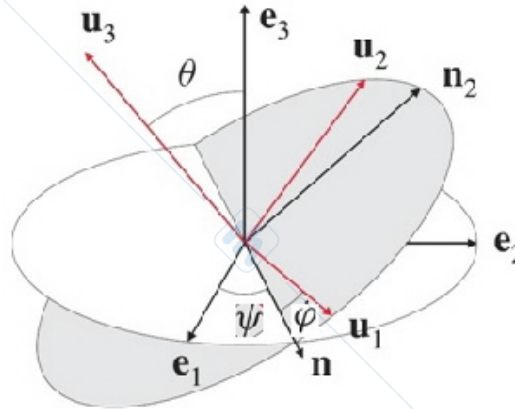
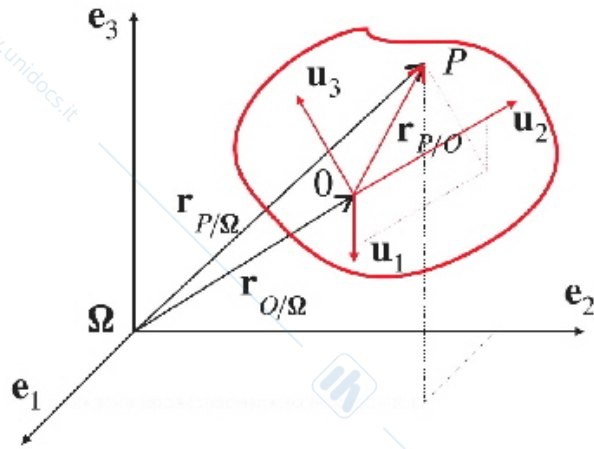
In presenza di vincoli si riduce il numero (**grado di libertà**) di funzioni (**coordinate lagrangiane**) atte ad individuare ad ogni istante la configurazione del sistema.

Punto materiale



$n = 3$	$(x(t), y(t), z(t))$	$(r(t), \varphi(t), z(t))$
$n = 2$	$(x(t), y(t))$	$(r(t), \varphi(t))$
$n = 1$	$\varphi(t)$	$[x(t) = r \cos \varphi(t), y(t) = r \sin \varphi(t)]$

Corpo rigido



- libero $n = 6$ $(x_{O1}(t), x_{O2}(t), x_{O3}(t), A_{h_1k_1}(t), A_{h_2k_2}(t), A_{h_3k_3}(t))$
- libero $n = 6$ $(x_{O1}(t), x_{O2}(t), x_{O3}(t), \varphi(t), \psi(t), \theta(t))$
- punto fisso $n = 3$ $(A_{h_1k_1}(t), A_{h_2k_2}(t), A_{h_3k_3}(t))$ $(\varphi(t), \psi(t), \theta(t))$
- piano $n = 3$ $(x_O(t), y_O(t), \varphi(t))$

Sistema meccanico libero di M corpi rigidi e N punti materiali $S = \{S_1, \dots, S_M, P_1, \dots, P_N\}$

$$n = 6M + 3N, \quad \{(x_{O_ih}, \varphi_i, \psi_i, \theta_i), i = 1, \dots, M, h = 1, 2, 3\} \cup \{x_{P_jh}, j = 1, \dots, N, h = 1, 2, 3\}$$

Analiticamente la presenza di vincoli è tradotta da un sistema di equazioni (**vincolo bilaterale**) e disequazioni (**vincolo unilaterale**)

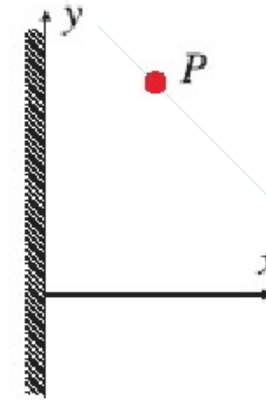
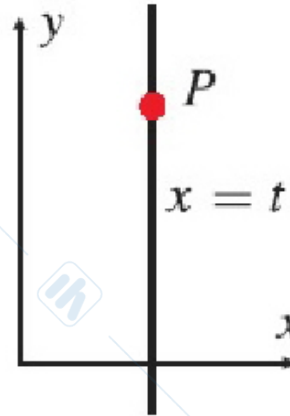
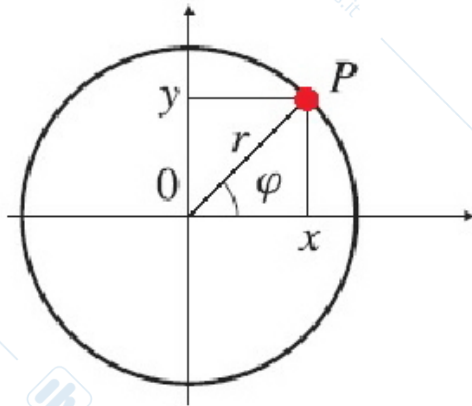
S libero : n grado di libertà $x_1(t), \dots, x_n(t)$ coordinate lagrangiane

$$\begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) = 0, & i = 1, \dots, s \\ f_j(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) \leq 0, & j = 1, \dots, r \end{cases}$$

vincoli fissi $\begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, & i = 1, \dots, s \\ f_j(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \leq 0, & j = 1, \dots, r \end{cases}$

vincoli olonomi $\begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n, t) = 0, & i = 1, \dots, s \\ f_j(x_1, \dots, x_n, t) \leq 0, & j = 1, \dots, r \end{cases}$

posizioni di confine $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) : f_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, t) = 0, \quad j = 1, \dots, r$



Punto vincolato a muoversi su di una circonferenza di raggio r nel piano Oxy

eq. di vincolo $\begin{cases} x^2(t) + y^2(t) = r, \\ z(t) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = r \cos \varphi(t), \\ y(t) = r \sin \varphi(t), \end{cases} \quad n = 1 \quad \varphi(t)$

Punto vincolato a muoversi su di una barra mobile di equazione $x = t$ nel piano Oxy

eq. di vincolo $\begin{cases} x(t) - t = 0, \\ z(t) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = t, \\ z(t) = 0, \end{cases} \quad n = 1 \quad y(t)$

Punto vincolato a muoversi nel semipiano di Oxy di equazione $x \geq 0$

eq. e diseq. di vincolo $\begin{cases} x(t) \geq 0, \\ z(t) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) \geq 0, \\ z(t) = 0, \end{cases} \quad n = 2 \quad (x(t), y(t))$

posiz. di confine $x(t) = 0$ posiz. ordinaria $x(t) > 0$

Un vincolo unilaterale comporta solo una restrizione alla regione che il sistema può occupare e non ha influenza sul grado di libertà del sistema.

$$S = \{S_1, \dots, S_M, P_1, \dots, P_N\} \quad \text{libero}$$

grado di libertà $m = 6M + 3N$

coordinate lagrangiane $x_1(t), \dots, x_m(t)$

$$S = \{S_1, \dots, S_M, P_1, \dots, P_N\} \quad \text{vincolato con } s \text{ vincoli olonomi, fissi e bilaterali } g_i(x_1, \dots, x_m)$$

• Equazioni di vincolo lineari ($s \leq m$)

$$g_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, s,$$

$\infty^{m-s'}$ soluzioni grado di libertà $n = m - s'$

\implies coordinate lagrangiane $x_1(t), \dots, x_n(t)$

$$s' = \text{rank}(a_{ij}),$$

$x_h(t) = x_h(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad h = 1, \dots, s'$

• Equazioni di vincolo lineari o non lineari ($s \leq m$)

$$g_i(x_1, \dots, x_m) = 0, \quad i = 1, \dots, s$$

$\infty^{m-s'}$ soluzioni grado di libertà $n = m - s'$

$$s' = \text{rank} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \quad \forall t$$

\implies coordinate lagrangiane $x_1(t), \dots, x_n(t)$

$x_h(t) = x_h(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad h = 1, \dots, s'$

Teorema di Jacobi

Le funzioni g_i siano continue con le loro derivate parziali prime in un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia J la matrice jacobiana

$$J = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \quad i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, m$$

tale che

$$\forall t \quad s' = \text{rank} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x_0} \quad \forall x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in D$$

allora s' equazioni tra le s sono indipendenti e $\forall (x_1^0, \dots, x_m^0) \in D$ esiste un intorno I_0 nel quale il sistema può ricondursi alla forma

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_{n+1}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \dots \\ x_m = x_m(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad n = m - s' \quad [x_h(t) = x_h(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad h = 1, \dots, s']$$

Si osservi che, in luogo delle variabili x_1, \dots, x_n , è possibile impiegare una qualsiasi

altra n -pla di variabili q_1, \dots, q_n legate alle prime da relazioni invertibili

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, n$$

questi nuovi ed *arbitrari* parametri prendono il nome di **coordinate lagrangiane** del sistema S .

Ad ogni scelta delle q_1, \dots, q_n corrisponde una *configurazione possibile* per il sistema, cioè compatibile con i vincoli. Tuttavia, le configurazioni effettivamente assunte dal sistema dipenderanno dalle forze agenti su di esso e dalle condizioni iniziali.

2 Spostamenti elementari e spostamenti virtuali

Sia $S = \{S_1, \dots, S_M, P_1, \dots, P_N\}$ un sistema libero, $m = 6M + 3N$ e $q_1(t), \dots, q_m(t)$ una m -pla di coordinate lagrangiane

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(q_1(t), \dots, q_m(t)) \quad \forall P \in S. \quad (1)$$

Sia S_0 una posizione del sistema individuata dalla m -pla di coord. lagrangiane q_i

spostamento elementare
$$dP = d\mathbf{r}(q_1(t), \dots, q_m(t)) = \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right|_{S_0} dq_j \quad \forall P \in S \quad (2)$$

In particolare si ha

$$\begin{cases} dP = dO_i + d\boldsymbol{\varphi}_i \times (P - O_i) & \forall P \in S_i \quad i = 1, \dots, M \\ dP_j = dx_{j1}\mathbf{e}_1 + dx_{j2}\mathbf{e}_2 + dx_{j3}\mathbf{e}_3 & j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3)$$

e gli spostamenti elementari di S a partire dalla configurazione S_0 sono ∞^{6M+3N} .

Esempio 8.2.1. Per un punto P libero di muoversi nello spazio si ha

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \implies dP = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}.$$

Se al sistema S sono imposti s vincoli bilaterali

$$g_i(x_1, \dots, x_m) = 0, \quad i = 1, \dots, s \quad [g_i(x_1, \dots, x_m, t) = 0]$$

gli spostamenti elementari di S a partire da una configurazione S_0 devono essere com-

patibili con i vincoli (**spostamenti possibili**)

$$dg_i = \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{S_0} dx_j \quad \left[dg_i = \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{S_0} dx_j + \left. \frac{\partial g_i}{\partial t} \right|_{S_0} dt \right] \quad (4)$$

Esempio 8.2.2. Per un punto P vincolato a muoversi sul piano $z = 0$ gli spostamenti elementari possibili sono

$$dP = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}.$$

Esempio 8.2.3. Per un punto P vincolato a muoversi sulla barra mobile di equazione $x = t$ nel piano Oxy si ha

$$\begin{cases} g_1 \equiv x - t = 0, \\ g_2 \equiv z = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} dg_1 \equiv dx - dt = 0, \\ dg_2 \equiv dz = 0, \end{cases} \implies dP = dt\mathbf{i} + dy\mathbf{j}.$$

La velocità di ogni punto P del sistema S ad n gradi di libertà è data dalla relazione

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}. \quad (5)$$

dove le $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ sono le **velocità lagrangiane** e quindi si ha

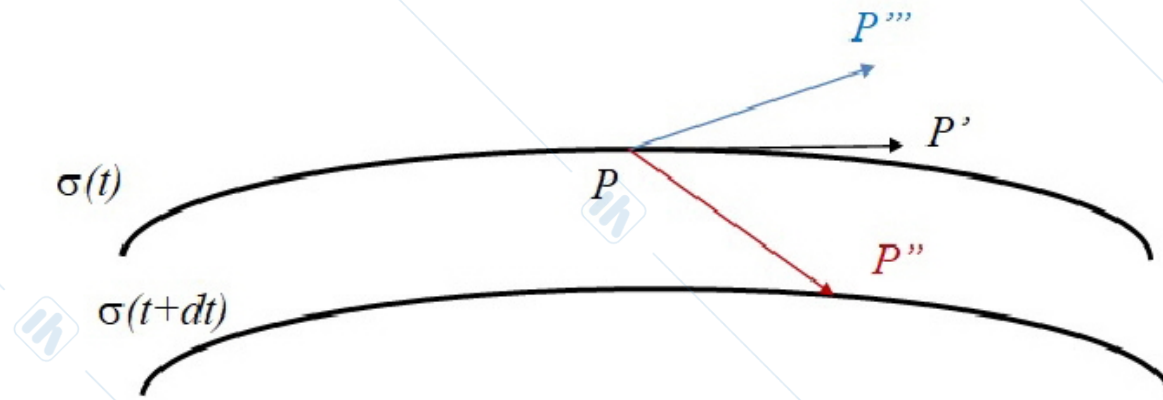
$$dP = \dot{\mathbf{r}} dt = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right|_{S_0} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad \forall P \in S. \quad (6)$$

Sia S un sistema vincolato ad n gradi di libertà, si definisce **spostamento virtuale** ogni spostamento dS di S a partire da una configurazione S_0 che sia compatibile con i vincoli quali essi sono a quell'istante ($t = t^*$ fissato)

$$\delta P = \delta \mathbf{r} = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right|_{S_0, t=t^*} \delta q_j, \quad \forall P \in S \quad [\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, \dots, q_n, t)].$$

In presenza di vincoli fissi gli spostamenti virtuali e quelli possibili coincidono.

Esempio 8.2.4. Si consideri un punto P vincolato a muoversi su di una superficie $\sigma(t)$ in moto

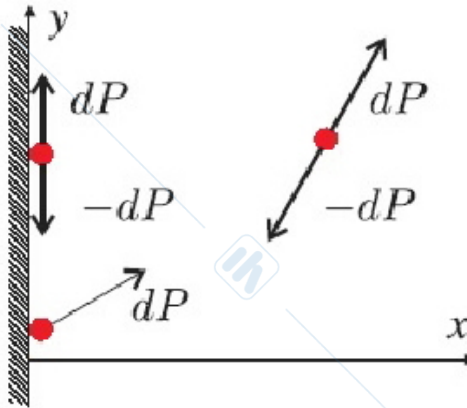


- PP' spostamento virtuale ma non possibile
- PP'' spostamento possibile ma non virtuale
- PP''' spostamento né possibile e né virtuale

Uno spostamento virtuale δS è **reversibile** se è virtuale anche lo spostamento opposto $-\delta S$.

In presenza di vincoli bilaterali tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili

Esempio 8.2.5. Un punto P è vincolato a muoversi nel semipiano $x \geq 0$ del piano Oxy



Il punto è soggetto ai seguenti vincoli

$$z = 0 \quad \text{vincolo bilaterale} \quad x \geq 0 \quad \text{vincolo unilaterale}$$

poichè i vincoli sono fissi gli spostamenti virtuali coincidono con quelli possibili

$$dP = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} \quad dx \geq 0$$

Se il punto P occupa una posizione di confine ($x = 0$) allora esistono spostamenti reversibili e non reversibili, al contrario se il punto occupa una posizione ordinaria ($x > 0$) tutti gli spostamenti sono reversibili.

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 10 del 22 Ottobre 2020

1 Lavoro elementare

Il **lavoro elementare** della forza \mathbf{F} applicata in un punto P corrispondente allo spostamento infinitesimo dP del suo punto di applicazione è

$$\text{lavoro elementare} \quad dL = \mathbf{F} \cdot dP$$

ed è positivo, nullo o negativo a seconda che \mathbf{F} e dP formino un angolo acuto, retto o ottuso.

Per un sistema (discreto) di forze applicate $S = \{(P_i, \mathbf{F}_i), i = 1, \dots, r\}$ nei punti P_i di un sistema meccanico S il lavoro elementare è

$$dL = \sum_{i=1}^r \mathbf{F}_i \cdot dP_i.$$

Se il sistema meccanico S è sottoposto ad uno spostamento rigido $dP = dO + d\varphi \times (P - O)$ si ha

$$dL = \mathbf{R} \cdot dO + M_O \cdot d\varphi \quad \mathbf{R} = \sum_{i=1}^r \mathbf{F}_i, \quad M_O = \sum_{i=1}^r (P_i - O) \times \mathbf{F}_i \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 dL &= \sum_{i=1}^r \mathbf{F}_i \cdot dP_i = \sum_{i=1}^r \mathbf{F}_i \cdot [dO + d\boldsymbol{\varphi} \times (P_i - O)] = \sum_{i=1}^r [\mathbf{F}_i \cdot dO + \mathbf{F}_i \cdot d\boldsymbol{\varphi} \times (P_i - O)] \\
 &= \left[\sum_{i=1}^r \mathbf{F}_i \right] \cdot dO + \sum_{i=1}^r [d\boldsymbol{\varphi} \cdot (P_i - O) \times \mathbf{F}_i] \\
 &= \left[\sum_{i=1}^r \mathbf{F}_i \right] \cdot dO + \left[\sum_{i=1}^r (P_i - O) \times \mathbf{F}_i \right] \cdot d\boldsymbol{\varphi}.
 \end{aligned}$$

Se il sistema di forze è equivalente a zero allora il lavoro elementare dL si annulla. La relazione (1) sussiste anche quando al sistema meccanico \mathcal{S} , opposto ad uno spostamento rigido, è applicato un sistema continuo di forze

$$\begin{aligned}
 S = \{(P, \mathbf{F}(P)), P \in \Omega\} &\implies dL = \int_{\Omega} (\mathbf{F}(P) \cdot dP) d\Omega = \mathbf{R} \cdot dO + \mathbf{M}_O \cdot d\boldsymbol{\varphi} \\
 \mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{F}(P) d\Omega, \quad \mathbf{M}_O &= \int_{\Omega} (P - O) \times \mathbf{F}(P) d\Omega.
 \end{aligned}$$

Il lavoro elementare per un *sistema di forze parallele* $S = \{(P_i, \mathbf{F}_i) : \mathbf{F}_i = f_i \mathbf{u}, i = 1, \dots, r\}$ a risultante $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^r f_i \mathbf{u} = f \mathbf{u}$ non nullo coincide, qualunque sia lo spostamento infinitesimo dP_i dell'insieme dei punti di applicazione, con il lavoro del risultante del sistema applicato nel centro C

$$dL = \mathbf{R} \cdot dC.$$

Se $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ allora il sistema S ammette il centro $C : C - O = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^r f_i (P_i - O)$ con O punto fisso

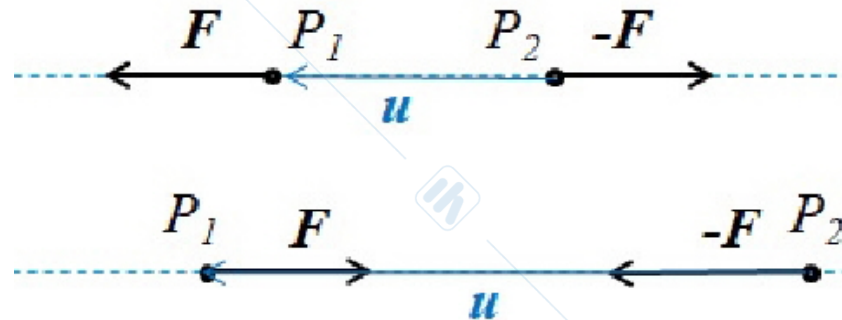
$$dC = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^r f_i dP_i \quad dL = \sum_{i=1}^r \mathbf{F}_i \cdot dP_i = \mathbf{u} \cdot \sum_{i=1}^r f_i dP_i = \mathbf{u} \cdot f dC = f \mathbf{u} \cdot dC.$$

Si consideri un sistema di due forze direttamente opposte

$$S = \{(P_1, \mathbf{F}), (P_2, -\mathbf{F})\} : \mathbf{F} = f \mathbf{u} \quad \mathbf{u} = \text{vers}(P_1 - P_2)$$

La grandezza f , comune alle due forze, va presa con il segno $+$ o $-$ a seconda che

esse siano rivolte entrambe verso l'esterno (repulsive) o l'interno del segmento P_1P_2 (attrattive)



Il lavoro di due forze direttamente opposte, corrispondente ad uno spostamento infinitesimo qualsiasi dei due punti di applicazione P_1 e P_2 , è uguale al prodotto della variazione di distanza dr tra questi per la grandezza f comune alle due forze (presa con il segno $+$ o $-$ a seconda che esse abbiano carattere repulsivo o attrattivo)

$$dL = f dr, \quad r = |P_1 P_2|$$

$$r^2 = (P_1 - P_2)^2 \implies 2r dr = 2(P_1 - P_2) \cdot d(P_1 - P_2) \implies dr = \mathbf{u} \cdot (dP_1 - dP_2)$$

$$dL = \mathbf{F} \cdot dP_1 - \mathbf{F} \cdot dP_2 = f \mathbf{u} \cdot (dP_1 - dP_2) = f \mathbf{u} \cdot dr.$$

2 Sistemi isostatici, iperstatici e labili

Sia $S = \{S_1, \dots, S_M, P_1, \dots, P_N\}$ un sistema libero, $m = 6M + 3N$ il *grado di libertà* e $x_1(t), \dots, x_m(t)$ una m -pla di *coordinate lagrangiane*

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(x_1(t), \dots, x_m(t)) \quad \forall P \in S.$$

Sia S_0 una configurazione del sistema, gli *spostamenti virtuali* del sistema a partire da S_0 si scrivono

$$\delta P = \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} \right|_{S_0} \delta x_j \quad \forall P \in S$$

che al variare delle δx_j forniscono gli ∞^m spostamenti che il sistema S può compiere a partire da S_0 .

Se al sistema S sono imposti s vincoli bilaterali

$$g_i(x_1, \dots, x_m, t) = 0, \quad i = 1, \dots, s \quad (2)$$

gli spostamenti possibili (compatibili con i vincoli) sono tutti e soli quelli per cui i dif-

ferenziali δx_j verificano le equazioni che si ottengono differenziando a t costante le (2)

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \Big|_{S_0} \delta x_j = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \Big|_{S_0} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \Big|_{S_0} \delta x_m = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1} \Big|_{S_0} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial g_s}{\partial x_m} \Big|_{S_0} \delta x_m = 0 \end{cases} \iff M_c \delta x = \mathbf{0} \quad (3)$$

dove la matrice $s \times m$ M_c è la **matrice cinematica**

$$M_c = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_s}{\partial x_m} \end{array} \right) \Big|_{S_0}, \quad \delta x = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \dots \\ \delta x_m \end{pmatrix}.$$

Le (3) costituiscono un sistema lineare, a coefficienti costanti e omogeneo nelle incognite δx_j .

Osservazione 1. La matrice cinematica caratterizza, attraverso il suo rango $s' = \text{rank} M_c$ e in relazione ai gradi di libertà m ($m \geq s$) del sistema libero S , la statica

e quindi l'equilibrio del sistema a partire dalla configurazione S_0

$$\text{grado di labilità} \quad l = m - s' \geq 0 \quad \text{grado di iperstaticità} \quad i = s - s' \geq 0$$

$$\text{grado di labilità} \quad l = m - s' \Leftrightarrow \text{equilibrio di } S \text{ in } S_0$$

$$\text{grado di iperstaticità} \quad i = s - s' \Leftrightarrow \text{equazioni di vincolo indipendenti}$$

Poichè il rango s' di M_c rappresenta il numero di equazioni indipendenti tra le s equazioni di vincolo nelle m incognite δx_j si ha che

$$\text{se } l = 0 \quad (m = s') \implies \delta x = \mathbf{0} \iff \delta P = \mathbf{0} \quad \forall P \in S$$

$$\text{se } l > 0 \quad (m > s') \implies \exists \infty^l \text{ soluzioni } \delta x = \mathbf{0} \quad \text{oppure } \delta x \neq \mathbf{0}$$

$$\text{se } l = 0 \quad i = 0 \quad \text{ sistema isostatico}$$

$$\text{se } l = 0 \quad i > 0 \quad \text{ sistema } i\text{-volte iperstatico}$$

$$\text{se } l > 0 \quad i \geq 0 \quad \text{ sistema } l\text{-volte labile con } i \text{ vincoli dipendenti}$$

$l = 0$ **isostatico o i -volte iperstatico** $\Leftrightarrow S$ è in equilibrio in $S_0 \quad \forall \Sigma_a$ sollecit. attiva

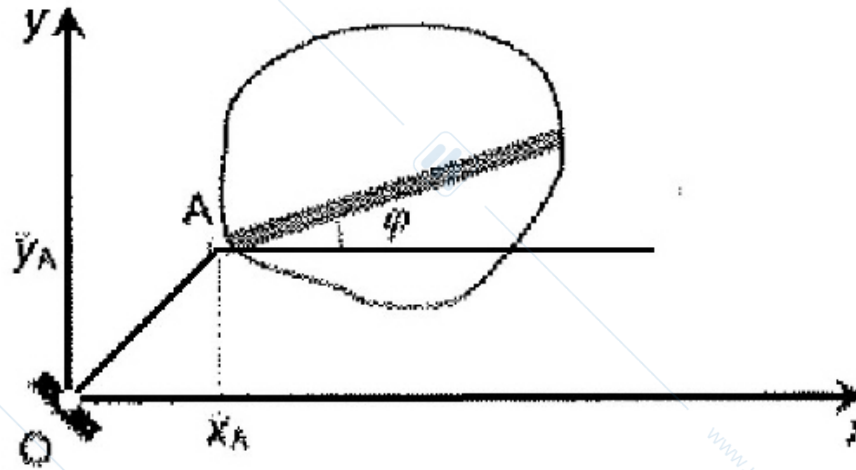
$l > 0$ **l -volte labile** \Rightarrow assegnata S_0 determinare le Σ_a per cui S_0 è di equilibrio
 assegnata Σ_a determinare se esistono config. di equilibrio

$l = 0$ **isostatico o i -volte iperstatico** \Leftrightarrow assegnata Σ_a determinare le reazioni vincolari
 (∞^i soluzioni)

$l > 0$ **l -volte labile** \Rightarrow se S_0 è di equilibrio determinare le reazioni vincolari
 (∞^i soluzioni)

3 Vincoli nel piano

Pendolo esterno



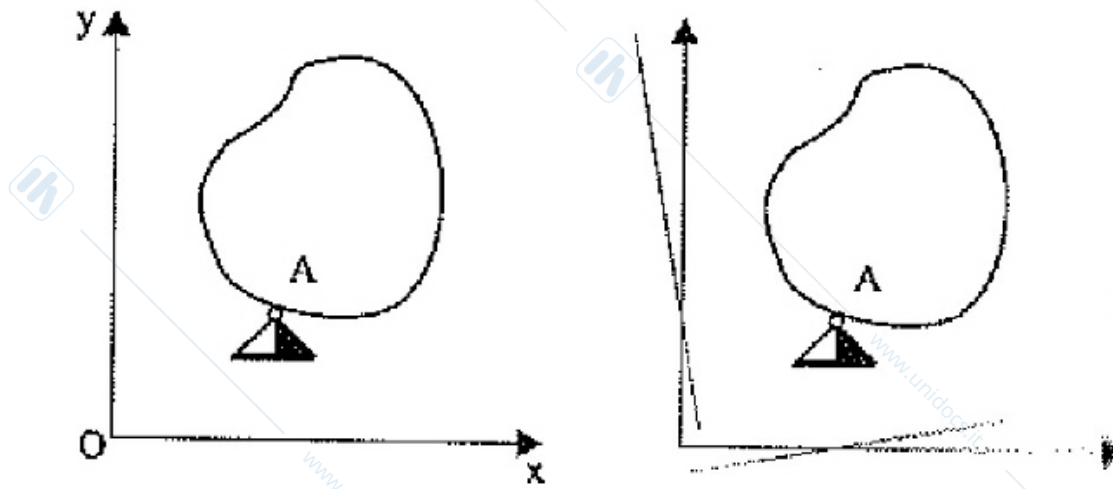
coord. lagrangiane del sistema libero x_A, y_A, φ $m = 3$ $S_0 \Leftrightarrow (\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{\varphi})$
 eq. di vincolo $g(x_A, y_A, \varphi) = x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0$ $s = 1$

$$\frac{\partial g}{\partial x_A} \Big|_{S_0} \delta x_A + \frac{\partial g}{\partial y_A} \Big|_{S_0} \delta y_A + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \Big|_{S_0} \delta \varphi = 0 \iff \bar{x}_A \delta x_A + \bar{y}_A \delta y_A = 0 \implies \begin{cases} l = m - s' = 2 \\ i = s - s' = 0 \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} \bar{x}_A & \bar{y}_A & 0 \end{pmatrix} \quad s' = \text{rank} M_C = 1$$

S è 2 volte labile $\bar{x}_A \delta x_A + \bar{y}_A \delta y_A = 0 \iff \delta A \cdot e = 0 \quad e = \text{vers}(A - O)$

Cerniera esterna. Impone che sia nullo lo spostamento del punto su cui agisce: $dA = 0$



coord. lagrangiane del sistema libero $x_A, y_A, \varphi \quad m = 3 \quad S_0 \iff (\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{\varphi})$

eq. di vincolo $dA = \mathbf{0} \iff \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \end{cases} \left(\begin{cases} g_1(x_A, y_A, \varphi) = x_A - \bar{x}_A = 0 \\ g_2(x_A, y_A, \varphi) = y_A - \bar{y}_A = 0 \end{cases} \right) \quad s = 2$

$$\begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \end{cases} \iff M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s' = 2 \implies \begin{matrix} l = 1 \\ i = 0 \end{matrix} \quad S \text{ è 1 volta labile}$$

$$\begin{aligned} dP &= dA + d\varphi \times (P - A) \\ dA &= 0 \end{aligned} \implies dP = d\varphi \times (P - A) \iff A \text{ centro istant. di rotazione}$$

$$\begin{cases} dx_P = -d\varphi (y_P - \bar{y}_A) \\ dy_P = d\varphi (x_P - \bar{x}_A) \end{cases} \quad \forall P \in S.$$

Meccanica Razionale

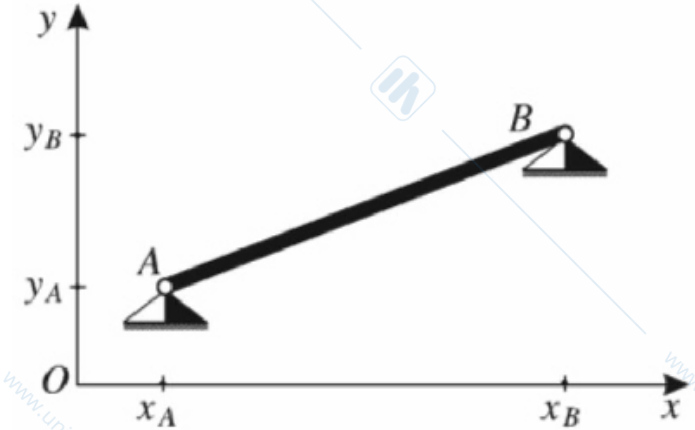
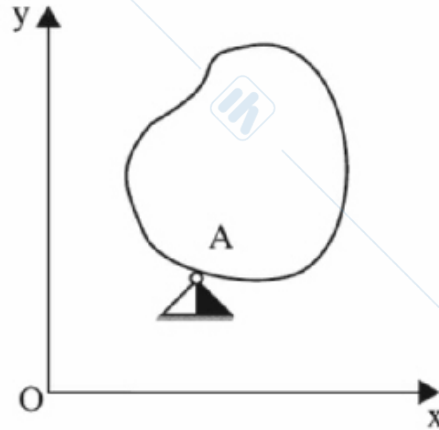
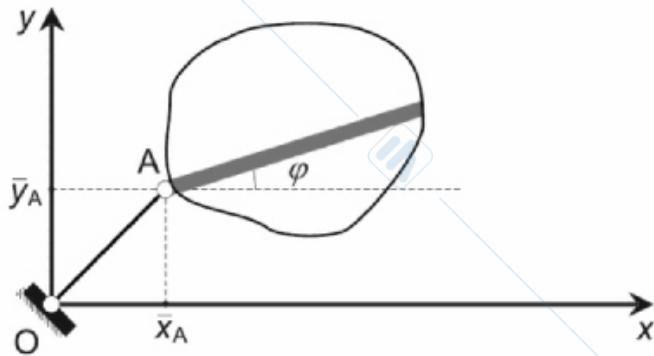
A. Marasco

Lezione N. 11 del 26 Ottobre 2020

1 Vincoli nel piano

Pendolo esterno. $\delta A \cdot e = 0$ $e = vers(A - O)$ S è 2 volte labile

Cerniera esterna. $dA = 0$ S è 1 volta labile



Esempio 11.1. Si consideri un'asta AB di lunghezza L e sia φ l'angolo che $B - A$ forma con l'asse delle x

coord. lagrangiane del sistema libero x_A, y_A, φ $m = 3$ $S_0 \iff (\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{\varphi})$,

$A \equiv (x_A, y_A), B \equiv (x_A + L \cos \varphi, y_A + L \sin \varphi)$

eq. di vincolo $\begin{cases} dA = \mathbf{0}, \\ dB = \mathbf{0}, \end{cases} \iff \begin{cases} dx_A = 0, & dy_A = 0, \\ dx_B = 0, & dy_B = 0. \end{cases} \quad s = 4$

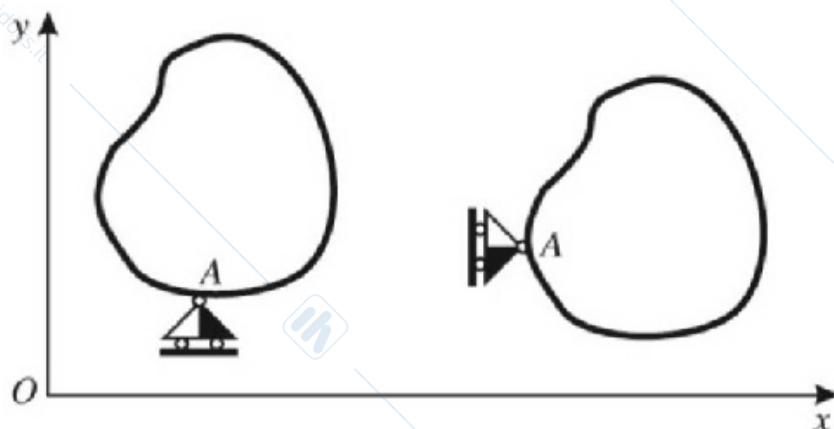
eq.di vincolo $\begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ dx_B = 0, \\ dy_B = 0. \end{cases} \left(\begin{cases} g_1 = x_A - \bar{x}_A = 0, \\ g_2 = y_A - \bar{y}_A = 0, \\ g_3 = x_A + L \cos \varphi - \bar{x}_B = 0, \\ g_4 = y_A + L \sin \varphi - \bar{y}_B = 0. \end{cases} \right)$

$$dB = dA + d\varphi \times (B - A) \implies \begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0 \\ dx_B = 0 \\ dy_B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0 \\ dx_A - d\varphi (y_B - y_A) = 0 \\ dy_A + d\varphi (x_B - x_A) = 0 \end{cases}$$

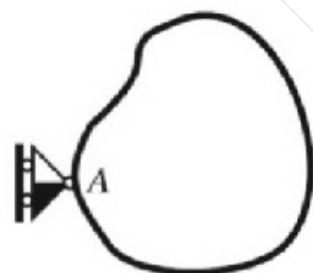
$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -(y_B - y_A) \\ 0 & 1 & (x_B - x_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -L \sin \varphi \\ 0 & 1 & L \cos \varphi \end{pmatrix} \quad s' = 3$$

$l = 0, i = 1$ il sistema S è 1 volta iperstatico.

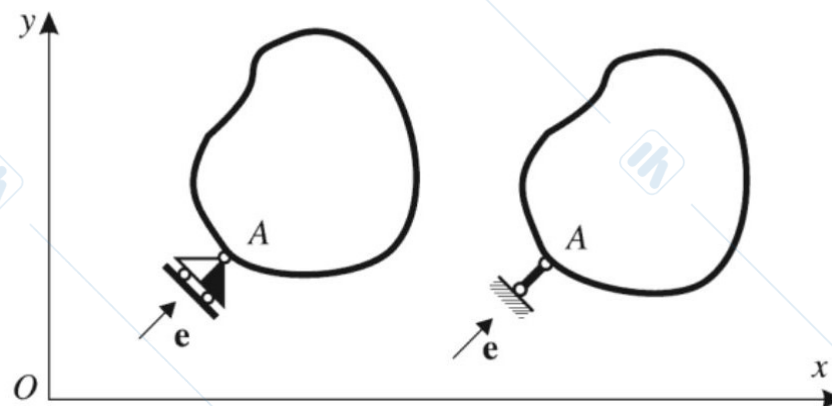
Carrello bilaterale. Impone al punto su cui agisce uno spostamento parallelo alla retta di scorrimento



$$dA \cdot \mathbf{j} = 0$$



$$dA \cdot \mathbf{i} = 0$$



$$dA \cdot \mathbf{e} = 0$$

$$dA \cdot \mathbf{j} = 0 \equiv dy_A = 0$$

$$dA \cdot \mathbf{i} = 0 \equiv dx_A = 0$$

$$dA \cdot \mathbf{e} = 0 \equiv dx_A \cos \alpha + dy_A \sin \alpha = 0$$

$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

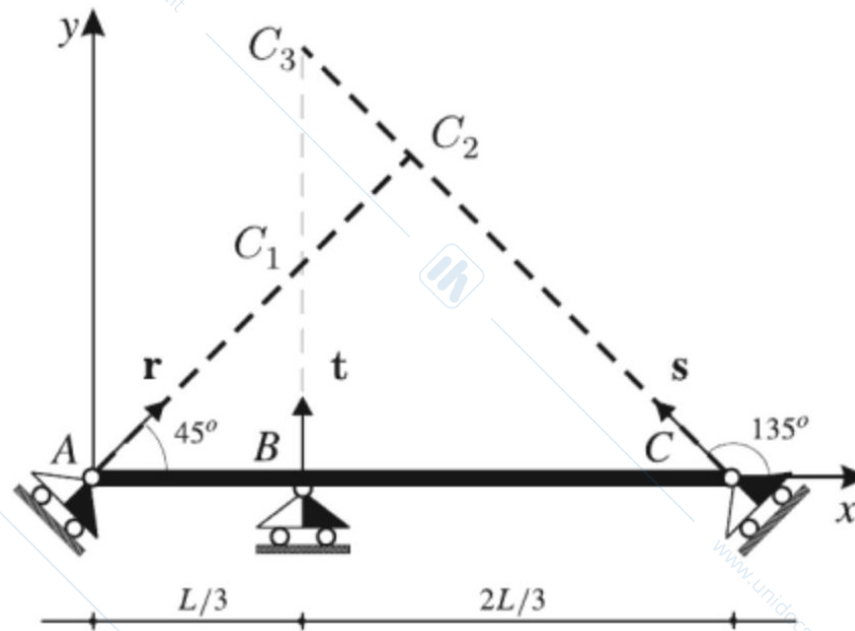
$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione $dx_A \cos \alpha + dy_A \sin \alpha = 0$ che traduce il vincolo carrello è la stessa di quella del vincolo pendolo. In tutti i casi, si ha

$$m = 3, s = s' = 1 \implies (l = 2, \quad i = 0) \quad S \text{ è 2 volte labile.}$$

Esempio 11.2. Si consideri la trave AB vincolata con carrelli bilaterali in A, B e C



$$\hat{A} = 45^\circ \Rightarrow \mathbf{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}, \quad \hat{C} = 135^\circ \Rightarrow \mathbf{s} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$$

$$\begin{cases} dA \cdot \mathbf{r} = 0, \\ dB \cdot \mathbf{j} = 0, \\ dC \cdot \mathbf{s} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{2}/2 dx_A + \sqrt{2}/2 dy_A = 0, \\ dy_B = 0 \\ -\sqrt{2}/2 dx_C + \sqrt{2}/2 dy_C = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} dx_A + dy_A = 0, \\ dy_B = 0 \\ -dx_C + dy_C = 0. \end{cases} \quad s = 3$$

$$dP = dA + d\varphi \times (P - A) \Rightarrow \begin{cases} dx_A + dy_A = 0, \\ dy_A + d\varphi (x_B - x_A) = 0 \\ [dx_A - d\varphi (y_C - y_A)] - [dy_A + d\varphi (x_C - x_A)] = 0. \end{cases}$$

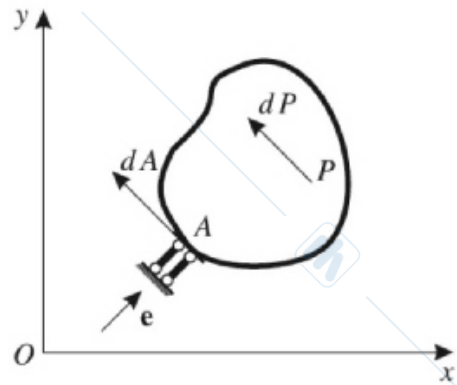
$$\Leftrightarrow \begin{cases} dx_A + dy_A = 0, \\ dy_A + L/3 d\varphi = 0 \\ dx_A - dy_A - Ld\varphi = 0. \end{cases} \Rightarrow M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & L/3 \\ 1 & -1 & -L \end{pmatrix} \quad s' = 3$$

$$l = m - s' = 0, \quad i = s - s' = 0 \quad \text{trave isostatica}$$

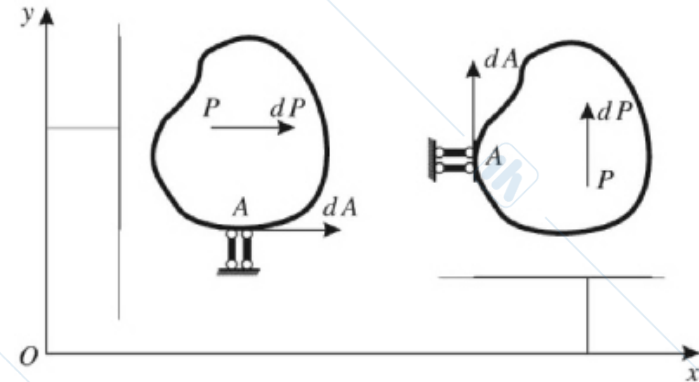
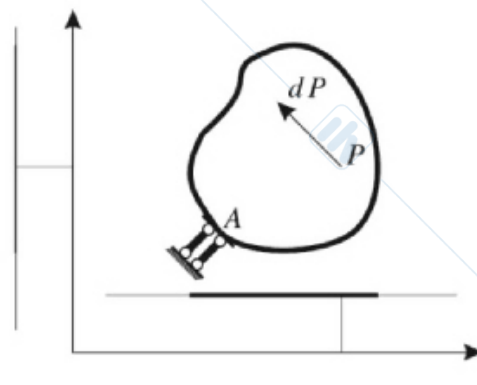
La trave è in equilibrio come poteva verificarsi con la teoria dei centri

$$\exists C_1, C_2 : dC_1 = dC_2 = \mathbf{0} \Rightarrow dP = \mathbf{0} \quad \forall P.$$

Doppio pendolo. Vincola il punto su cui agisce ad avere spostamenti traslatori nella direzione ortogonale a quella dei pendoli



$$dA \cdot e = 0, \quad d\varphi = 0$$



$$\begin{cases} dA \cdot j = 0, \\ d\varphi = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} dA \cdot i = 0, \\ d\varphi = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} dA \cdot e = 0, \\ d\varphi = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} dx_A \cos \alpha + dy_A \sin \alpha = 0, \\ d\varphi = 0, \end{cases} \quad s = 2$$

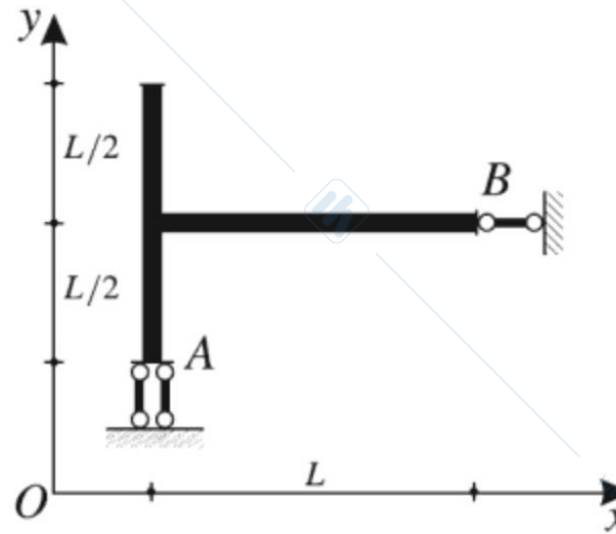
$$\Rightarrow M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s' = 2 \Rightarrow l = 1, \quad i = 0 \quad \text{1 volta labile}$$

Il vincolo doppio pendolo equivale al vincolo pendolo agente su due punti distinti A_1 e

$$\begin{aligned}
 & A_2 \\
 & \begin{cases} dA_1 \cdot \mathbf{e} = 0, \\ dA_2 \cdot \mathbf{e} = 0, \end{cases} \\
 & dP = dA + d\boldsymbol{\varphi} \times (P - A) \Rightarrow \begin{aligned} & dA_2 = dA_1 + d\boldsymbol{\varphi} \times (A_2 - A_1) \\ & dA_2 \cdot \mathbf{e} = dA_1 \cdot \mathbf{e} + d\boldsymbol{\varphi} \times (A_2 - A_1) \cdot \mathbf{e} \\ & \Rightarrow d\boldsymbol{\varphi} \times (A_2 - A_1) \cdot \mathbf{e} = 0 \\ & \Leftrightarrow [(A_2 - A_1) \times \mathbf{e}] \cdot d\boldsymbol{\varphi} = 0 \Rightarrow d\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \\ & \Rightarrow dP = dA_1, \quad \forall P \Rightarrow dP \cdot \mathbf{e} = 0 \quad \forall P \\ & \quad \quad \quad dA_1 \cdot \mathbf{e} = 0 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Poichè il vincolo doppio pendolo induce un atto di moto traslatorio il centro istantaneo di rotazione C è improprio e coincide con la direzione \mathbf{e} del doppio pendolo.

Esempio 11.3. Si consideri la trave a T in figura vincolata con un pendolo in B e con un doppio pendolo in A

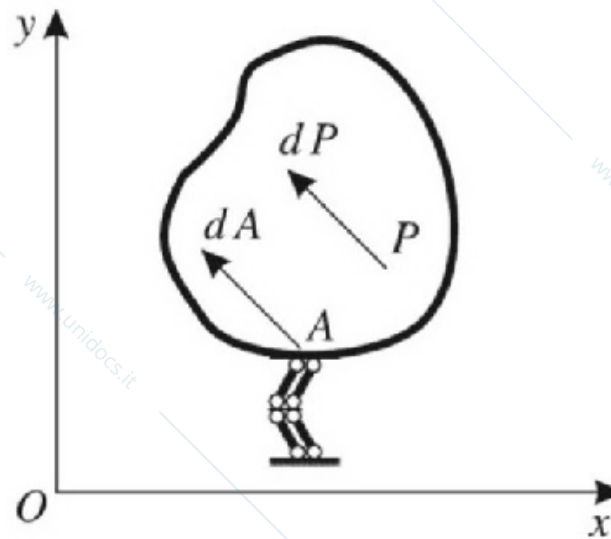


coord. lagrangiane x_A, y_A, φ_z $m = 3$
 equaz. di vincolo

$$\begin{cases} dA \cdot \mathbf{j} = 0, \\ d\varphi = \mathbf{0}, \\ dB \cdot \mathbf{i} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy_A = 0, \\ d\varphi_z = 0, \\ dx_B = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy_A = 0, \\ d\varphi_z = 0, \\ dx_A - d\varphi_z (y_B - y_A) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy_A = 0, \\ d\varphi_z = 0, \\ dx_A = 0, \end{cases} \quad s = 3$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s' = s = 3 \implies \begin{matrix} l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad S \text{ è isostatico}$$

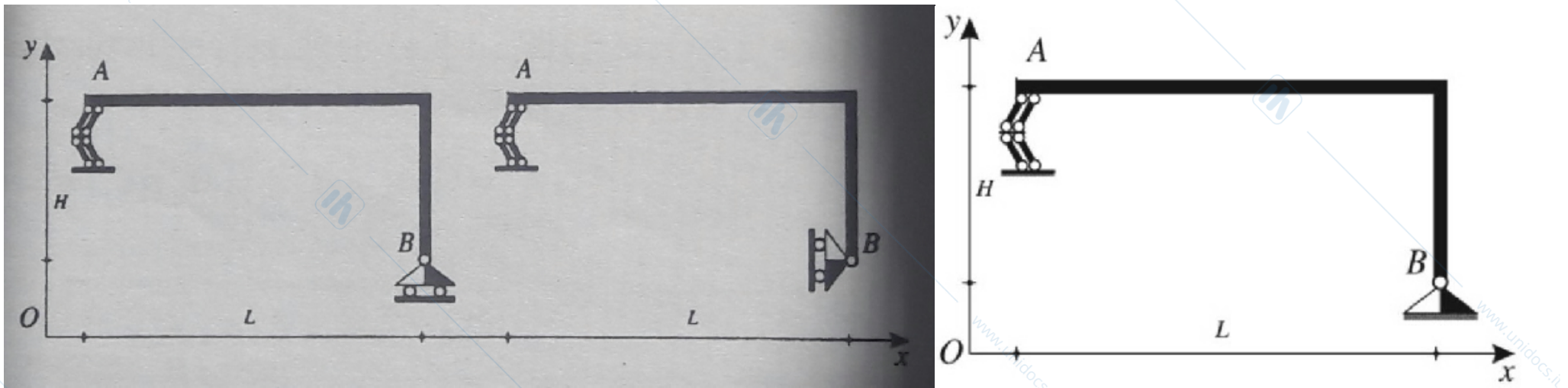
Doppio-doppio pendolo. Vincola il corpo rigido ad avere solo spostamenti traslatori



$$dP = dA, \forall P \quad (d\varphi = \mathbf{0})$$

$$m = 3, s = 1, \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s' = 1 \implies \begin{matrix} l = 2 \\ i = 0 \end{matrix} \quad S \text{ è 2 volte labile.}$$

Esempio 11.4. Analisi cinematica delle travi in figura



coord. lagrangiane x_A, y_A, φ_z $m = 3$
 equazioni di vincolo

$$\begin{cases} d\varphi_z = 0, \\ dy_B = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\varphi_z = 0, \\ dx_B = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\varphi_z = 0, \\ dx_B = 0, \\ dy_B = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\varphi_z = 0, \\ dy_B = 0, \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 2 \\ s' = 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} l = 1 \\ i = 0 \end{matrix} \quad S \text{ è 1 volta labile}$$

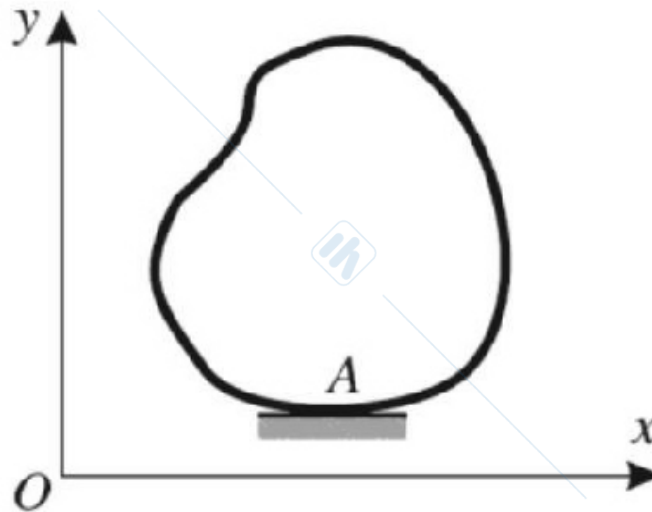
Poichè $dP = dA \quad \forall P$ e $dy_B = 0$ si ha che $dy_P = 0 \quad \forall P$ e gli spostamenti virtuali dipendono da dx_B e il centro è improprio nella direzione dell'asse y

$$\begin{cases} d\varphi_z = 0, \\ dx_B = 0, \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 2 \\ s' = 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} l = 1 \\ i = 0 \end{matrix} \quad S \text{ è 1 volta labile}$$

Analogamente in questo caso si ha che $dx_P = 0 \quad \forall P$ e gli spostamenti virtuali dipendono da dy_B e il centro è improprio nella direzione dell'asse x

$$\begin{cases} d\varphi_z = 0, \\ dx_B = 0, \\ dy_B = 0, \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 3 \\ s' = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad S \text{ è isostatica}$$

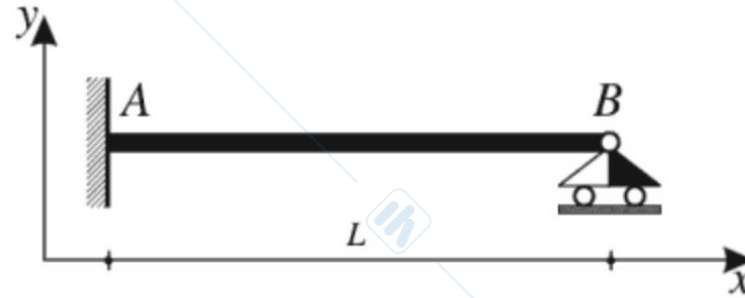
Incastro (esterno). Vincola il corpo rigido ad avere spostamento nullo



$$dP = \mathbf{0}, \quad \forall P$$

$$\begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ d\varphi_z = 0, \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} m = 3 \\ s = 3 \\ s' = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad S \text{ è isostatica}$$

Esempio 11.5. Analisi cinematica della trave vincolata con un incastro in A e un carrello in B

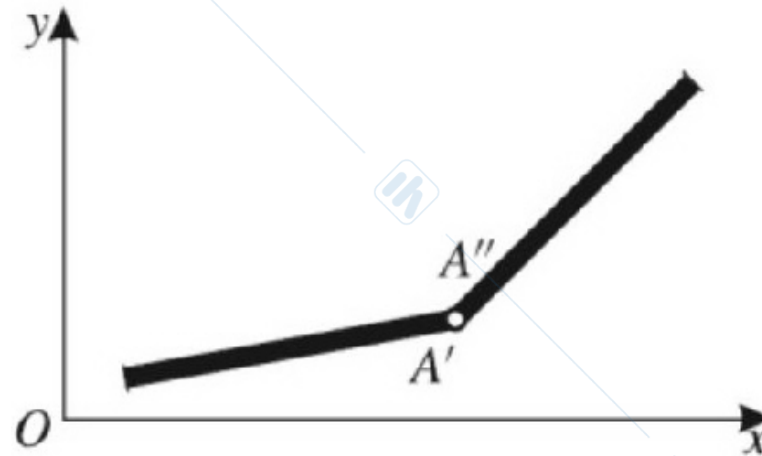


coord. lagrangiane x_A, y_A, φ_z $m = 3$
 equazioni di vincolo

$$\begin{cases} dA = \mathbf{0}, \\ d\varphi_z = 0, \\ dB \cdot \mathbf{j} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ d\varphi_z = 0, \\ dy_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ d\varphi_z = 0, \\ dy_A + d\varphi_z (x_B - x_A) = 0 \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & L \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s &= 4 & l &= m - s' = 0 \\ s' &= 3 & i &= s - s' = 1 \end{aligned} \quad S \text{ è 1 volta iperstatico}$$

Cerniera interna. Vincola i punti $A' \in S'$ e $A'' \in S''$ su cui agisce ad avere lo stesso spostamento



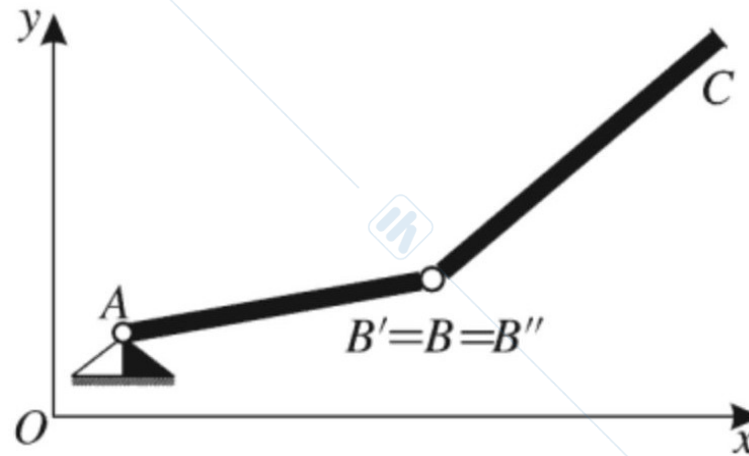
$$dA' - dA'' = \mathbf{0}$$

Si ha $S = S' \cup S''$ e quindi $m = 6$ $x_{A'}, y_{A'}, \varphi_{1z}, x_{A''}, y_{A''}, \varphi_{2z}$

$$dA' - dA'' = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_{A'} - dx_{A''} = 0, \\ dy_{A'} - dy_{A''} = 0, \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_{A'} & dy_{A'} & d\varphi_{1z} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{2z} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$s = 2, s' = 2 \quad l = m - s' = 4, i = s - s' = 0 \quad S$ è 4 volte labile

Esempio 11.6. Analisi cinematica della struttura vincolata con un'cerniera esterna in A e una cerniera interna in B



$$S = S' \cup S'' \quad m = 6 \quad x_A, y_A, \varphi_{1z}, \quad x_{B''}, y_{B''}, \varphi_{2z}$$

eq. di vincolo

$$\begin{cases} dA = \mathbf{0}, \\ dB' - dB'' = \mathbf{0}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ dx_A - d\varphi_{1z}(y_B - y_A) - dx_{B''} = 0, \\ dy_A + d\varphi_{1z}(x_B - x_A) - dy_{B''} = 0, \end{cases} \quad s = 4$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{1z} & dx_{B''} & dy_{B''} & d\varphi_{2z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_B - y_A & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_B - x_A & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 4 \\ s' = 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} l = 2 \\ i = 0 \end{matrix} \quad S \text{ è 2 volte labile}$$

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 12 del 27 Ottobre 2020

1 Vincoli nel piano

1.1 Teoria dei centri e analisi cinematica in moti piani

Si vuole utilizzare la teoria dei centri per determinare il grado di labilità l e quello di isostaticità i di una struttura.

In ogni spostamento rigido piano rotatorio ($d\varphi \neq 0$) si ha

$\forall P \in S \quad dP = d\varphi \times (P - C) \quad C \text{ centro} \implies (x_C, y_C, d\varphi_z) \iff$ spostamenti elementari

- $\exists C_1, C_2 : C_1 \neq C_2, dC_1 = dC_2 = \mathbf{0} \implies dP = \mathbf{0} \quad \forall P \quad l = 0$
- $\exists! C_1 : dC_1 = \mathbf{0} \quad l = 1 \quad (d\varphi_z)$
- Se è nota la retta $r : C \in r \implies l = 2 \quad (x_C, d\varphi_z)$ oppure $(y_C, d\varphi_z)$
- In tutti gli altri casi in cui non si hanno informazioni sul centro $C \quad l = 3 \quad (x_C, y_C, d\varphi_z)$

Noto l dalla teoria dei centri, $m = 3$ ed s noto dalle equazioni di vincolo, si ha¹

$$m - s = l - i \implies i = l - (m - s)$$

¹ $l = m - s' \quad i = s - s'$

Se $S = S_1 \cup S_2$ $m = 6$ e se i centri assoluti C_1, C_2 e quello relativo C_{12} sono allineati, allora S è labile e si ha²

- $\exists C_1, C_2, C_{12} \quad l = 1$

$$\forall P \in S_1 \quad dP = d\varphi_1 \times (P - C_1) \implies dS_1 \iff d\varphi_{1z}$$

$$\forall P \in S_2 \implies dP \iff \text{noto dal moto di } S_1 \text{ e da } C_2 \text{ e } C_{12}$$

- $\exists C_2, C_{12} \quad l = 2 \quad (x_{C_1}, d\varphi_{1z})$ oppure $(y_{C_1}, d\varphi_{1z}) : C_1$ appartenga alla retta per C_2 e C_{12}

- $\exists C_2 \quad l = 4$ poichè rispetto al caso precedente devono assegnarsi anche le coordinate di C_{12}

- $\exists C_2$ ed è nota la retta $r : C_{12} \in r \implies l = 3$

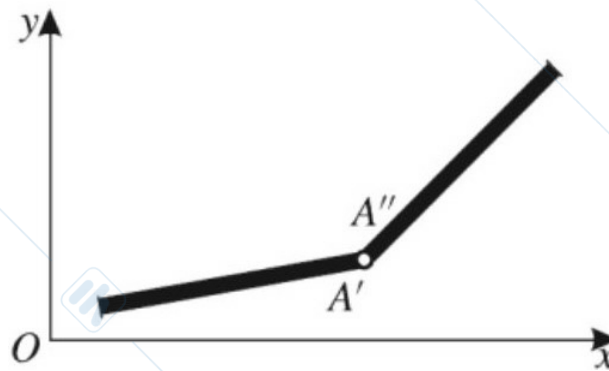
Nota l dalla teoria dei centri, si ha

$$m - s = l - i \implies i = l - (m - s)$$

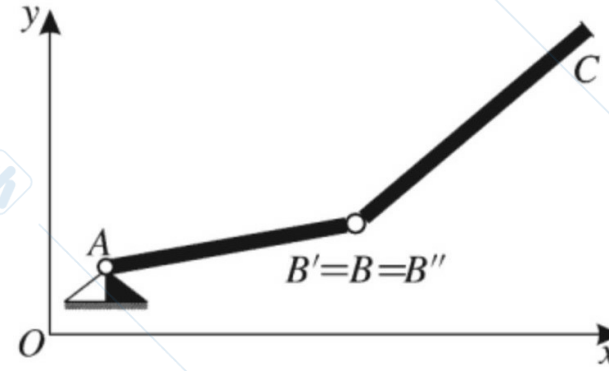
² $C_{12} : dC_{12} = d\varphi_1 \times (C_{12} - C_1) - d\varphi_2 \times (C_{12} - C_2) = \mathbf{0} \implies d\varphi_1 \times (C_{12} - C_1) = d\varphi_2 \times (C_{12} - C_2)$

1.2 Vincoli interni

Cerniera interna. $dA' - dA'' = 0$

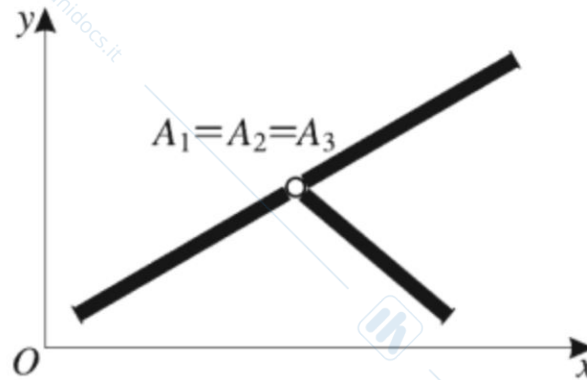


$C_{12} \equiv A \quad l = 4$



$C_1 \equiv A, C_{12} \equiv B \quad l = 2$

Esempio 12.1. Si consideri il sistema di tre aste con una cerniera interna nel punto A



$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \quad m = 9 \quad x_{A_1}, y_{A_1}, \varphi_{1z}, x_{A_2}, y_{A_2}, \varphi_{2z}, x_{A_3}, y_{A_3}, \varphi_{3z}$$

$$\begin{cases} dA_1 = dA_2, \\ dA_1 = dA_3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_{A_1} - dx_{A_2} = 0, \\ dy_{A_1} - dy_{A_2} = 0, \\ dx_{A_1} - dx_{A_3} = 0, \\ dy_{A_1} - dy_{A_3} = 0, \end{cases} \quad s = 4$$

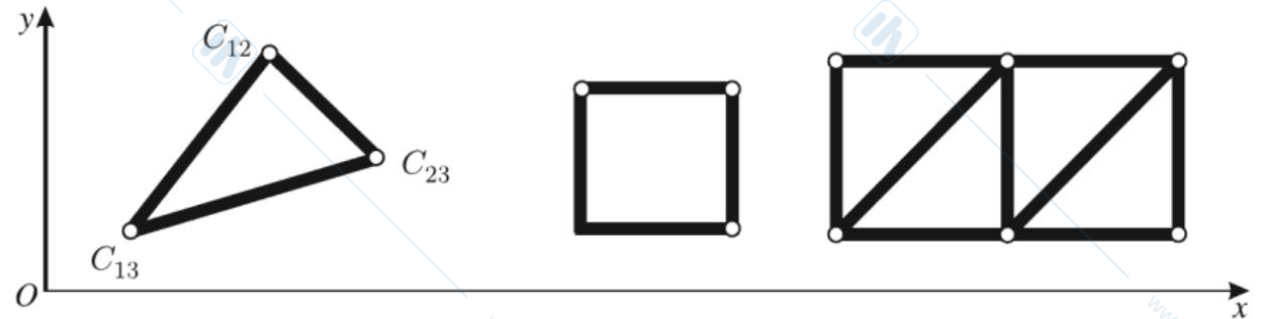
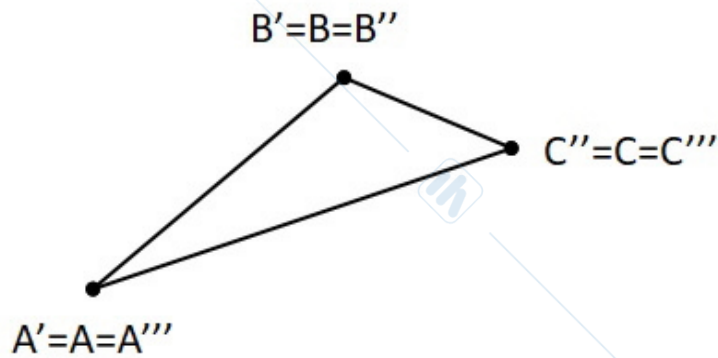
$$M_C = \begin{pmatrix} dx_{A_1} & dy_{A_1} & d\varphi_{1z} & dx_{A_2} & dy_{A_2} & d\varphi_{2z} & dx_{A_3} & dy_{A_3} & d\varphi_{3z} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad s' = 4 \quad \begin{matrix} l = 5 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{5 volte labile}$$

In generale per una cerniera interna in cui convergano N aste risulta

$$s = s' = 2(N - 1) \implies \begin{cases} l = m - s' = 3N - 2(N - 1) \\ i = s - s' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = N + 2 \\ i = 0 \end{cases}$$

Una **maglia triangolare** è un sistema costituito da tre tratti di trave collegati, in generale, da cerniere interne.

Una **maglia triangolare** è un sistema rigido in quanto i tre centri relativi (C_{13}, C_{12}, C_{23}), coincidendo con le tre cerniere, sono non allineati.



Analisi cinematica

Coordinate normali: $x_A, y_A, \varphi_1, x_B, y_B, \varphi_2, x_C, y_C, \varphi_3$ e quindi $m = 9$.

Equazioni di vincolo: $s = 6$

cerniera interna in A : $dA' - dA''' = \mathbf{0}$ ($dx_{A'} - dx_{A'''} = 0, dy_{A'} - dy_{A'''} = 0$)

cerniera interna in B : $dB' - dB'' = \mathbf{0}$ ($dx_{B'} - dx_{B''} = 0, dy_{B'} - dy_{B''} = 0$)

cerniera interna in C : $dC'' - dC''' = \mathbf{0}$ ($dx_{C''} - dx_{C'''} = 0, dy_{C''} - dy_{C'''} = 0$)

$$\begin{cases} dx_A - [dx_C - d\varphi_3 (y_A - y_C)] = 0, & dy_A - [dy_C + d\varphi_3 (x_A - x_C)] = 0, \\ [dx_A - d\varphi_1 (y_B - y_A)] - dx_B = 0, & [dy_A + d\varphi_1 (x_B - x_A)] - dy_B = 0, \\ [dx_B - d\varphi_2 (y_C - y_B)] - dx_C = 0, & [dy_B + d\varphi_2 (x_C - x_B)] - dy_C = 0, \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{1Z} & dx_B & dy_B & d\varphi_{2Z} & dx_C & dy_C & d\varphi_{3z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & y_A - y_C \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -(x_A - x_C) \\ 1 & 0 & -(y_B - y_A) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_B - x_A & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(y_C - y_B) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_C - x_B & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad s' = 6$$

Pertanto $l = m - s' = 3$ e $i = s - s' = 0$ e la struttura è **3 volte labile**.

Nel caso in esame, essendo i centri relativi non allineati *non sono possibili spostamenti relativi tra le aste*.

Per questi tipi di struttura si può introdurre il concetto di **labilità interna** l^{int} come *indice dei possibili spostamenti relativi tra i corpi costituenti il sistema*, indipendentemente dalla presenza di vincoli esterni.

Per un sistema meccanico piano costituito da N travi collegate mediante vincoli interni si ha

$$l^{int} = l - 3 \quad (1)$$

m, l

osservatore in un sistema di riferimento fisso

m^{int}, l^{int}

osservatore in un sistema di riferimento solidale ad una delle travi

$$m^{int} = 3(N - 1), \quad l^{int} = 3(N - 1) - s' = (3N - s') - 3 = l - 3.$$

Pertanto da (1) ne consegue che

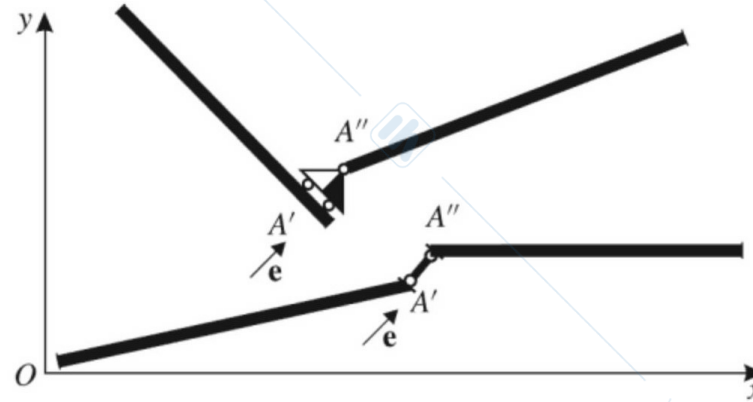
$$l^{int} = 0 \equiv \text{ sistema rigido } \iff l = 3.$$

Quindi se $l^{int} = 0$ la struttura è detta **internamente isostatica**, analogamente $l^{int} > 0$ definisce una struttura **internamente iperstatica**.

Se si considerano strutture ottenute a partire dall'unione di maglie triangolari si ottengono ancora sistemi internamente isostatici.

Inoltre, per la (1) si ha che l'aggiunta di tre vincoli esterni semplici rendono il sistema **globalmente isostatico**.

Carrelli e pendoli interni. Un carrello interno vincola il punto di contatto A dei due corpi rigidi ad avere spostamento relativo parallelo alla direzione della retta di scorrimento



$$(dA' - dA'') \cdot e = 0$$

$$S = S' \cup S'' \quad m = 6 \quad x_{A'}, y_{A'}, \varphi_{1z}, x_{A''}, y_{A''}, \varphi_{2z} \quad e = \cos \alpha i + \sin \alpha j$$

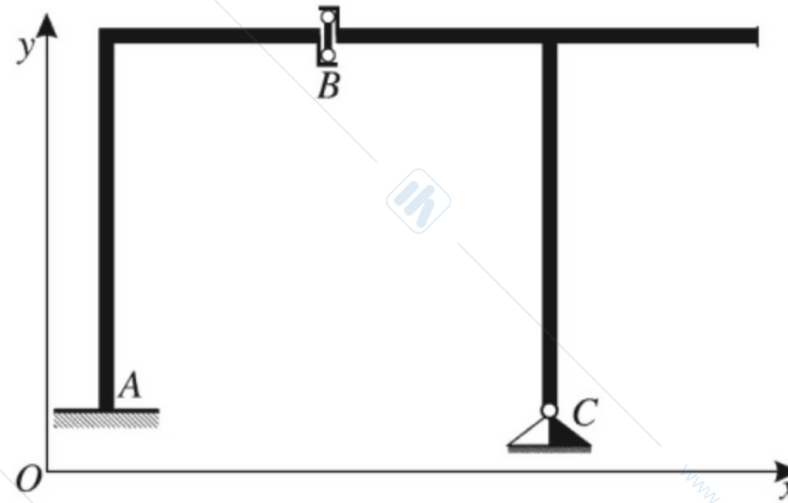
$$(dx_{A'} - dx_{A''}) \cos \alpha + (dy_{A'} - dy_{A''}) \sin \alpha = 0 \quad s = 1$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_{A'} & dy_{A'} & d\varphi_{1z} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{2z} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$s' = 1 \quad l = 5 \quad i = 0$$

5 volte labile.

Esempio 12.2. Analisi cinematica delle due travi in figura con un incastro in A un pendolo interno in B e una cerniera in C



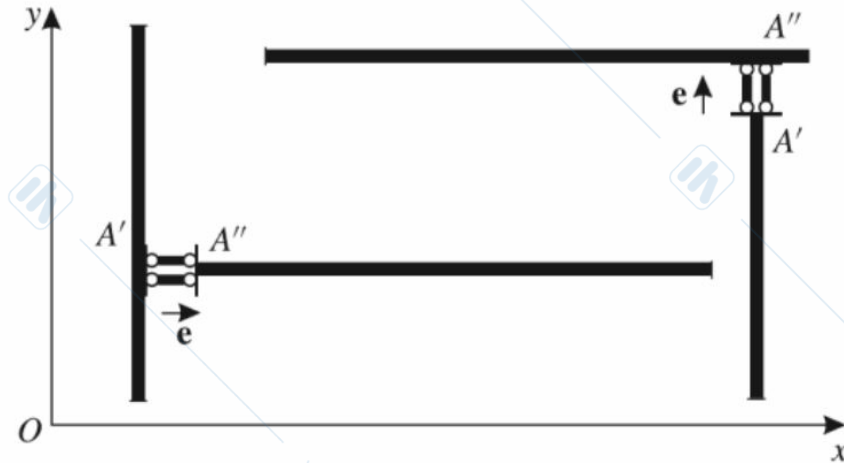
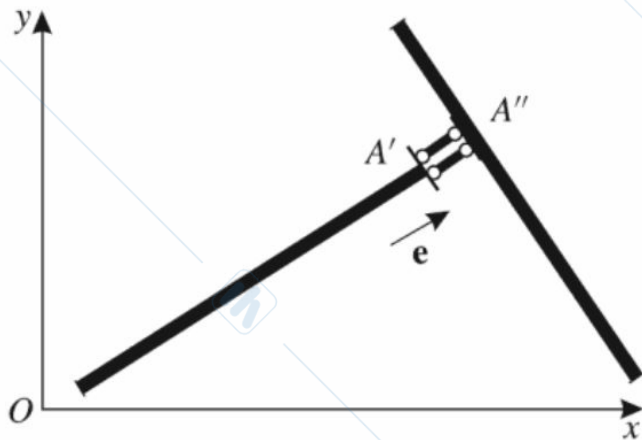
$$S = S_1 \cup S_2 \quad m = 6 \quad x_A, y_A, \varphi_{1z}, x_C, y_C, \varphi_{2z}$$

$$\begin{cases} dA = \mathbf{0}, d\varphi_1 = \mathbf{0} \\ (dB' - dB'') \cdot \mathbf{j} = 0 \\ dC = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, \\ d\varphi_{1z} = 0 \\ dy_{B'} - dy_{B''} = 0 \\ dx_C = 0, dy_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, \\ d\varphi_{1z} = 0 \\ [dy_A + d\varphi_{1z}(x_B - x_A)] \\ - [dy_C + d\varphi_{2z}(x_B - x_C)] = 0 \\ dx_C = 0, dy_C = 0 \end{cases} \quad s = 6$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{1z} & dx_C & dy_C & d\varphi_{2z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_B - x_A & 0 & -1 & -(x_B - x_C) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s' = 6 \quad \begin{matrix} l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{isostatica}$$

Doppio pendolo interno. Un doppio pendolo interno vincola i corpi rigidi su cui agisce ad avere spostamenti relativi traslatori perpendicolari alla direzione dei pendoli



$$S = S' \cup S'' \quad m = 6 \quad x_{A'}, y_{A'}, \varphi_{1z}, x_{A''}, y_{A''}, \varphi_{2z} \quad e = \cos \alpha i + \sin \alpha j$$

$$\begin{cases} (dA' - dA'') \cdot e = 0 \\ d\varphi_1 - d\varphi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (dx_{A'} - dx_{A''}) \cos \alpha + (dy_{A'} - dy_{A''}) \sin \alpha = 0, \\ d\varphi_{1z} - d\varphi_{2z} = 0, \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_{A'} & dy_{A'} & d\varphi_{1z} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{2z} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 2 \\ s' = 2 \end{matrix}$$

$l = 4$
 $i = 0$
4 volte labile.

$$\begin{cases} (dA' - dA'') \cdot \mathbf{i} = 0 \\ d\varphi_1 - d\varphi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_{A'} - dx_{A''} = 0, \\ d\varphi_{1z} - d\varphi_{2z} = 0, \end{cases} \quad s = 2$$

$$\begin{aligned} l &= 4 \\ i &= 0 \end{aligned} \quad \text{4 volte labile.}$$

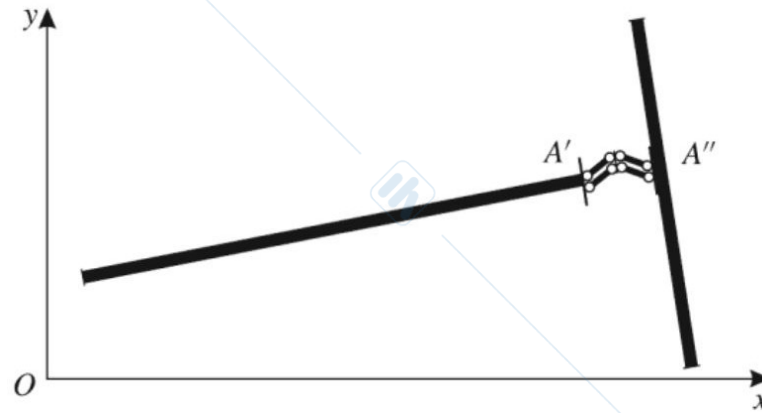
$$M_C = \begin{pmatrix} dx_{A'} & dy_{A'} & d\varphi_{1z} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{2z} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s' = 2$$

$$\begin{cases} (dA' - dA'') \cdot \mathbf{j} = 0 \\ d\varphi_1 - d\varphi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy_{A'} - dy_{A''} = 0, \\ d\varphi_{1z} - d\varphi_{2z} = 0, \end{cases} \quad s = 2$$

$$\begin{aligned} l &= 4 \\ i &= 0 \end{aligned} \quad \text{4 volte labile.}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_{A'} & dy_{A'} & d\varphi_{1z} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{2z} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s' = 2$$

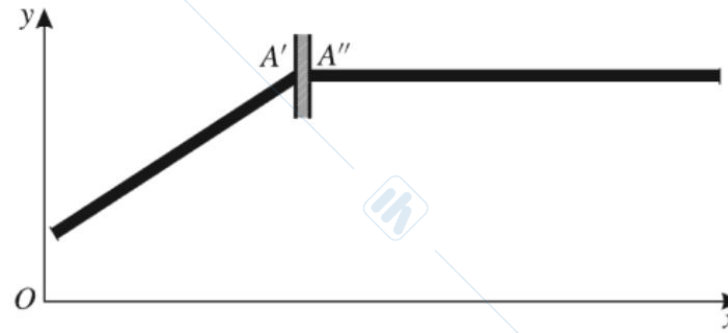
Doppio-doppio pendolo interno. Un doppio-doppio pendolo interno vincola i corpi rigidi su cui agisce ad avere spostamenti relativi traslatori



$$d\varphi_{1z} - d\varphi_{2z} = 0$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_{A'} & dy_{A'} & d\varphi_{1z} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{2z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s = s' = 1 \quad \begin{matrix} l = 5 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{5 volte labile.}$$

Incastro interno. Un incastro interno comporta l'irrigidimento dei due sistemi componenti S

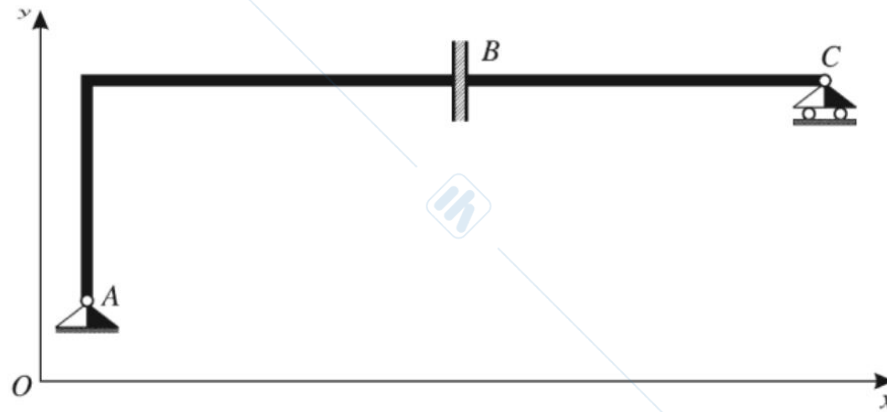


$$\begin{cases} dx_{A'} - dx_{A''} = 0, \\ dy_{A'} - dy_{A''} = 0, \\ d\varphi_{1z} - d\varphi_{2z} = 0, \end{cases} \quad s = 3$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_{A'} & dy_{A'} & d\varphi_{1z} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{2z} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s' = 3$$

$$l = 3 \quad i = 0 \quad \text{3 volte labile.}$$

Esempio 12.3. Analisi cinematica delle due travi in figura con una cerniera in A un incastro interno in B e un carrello C



$$S = S_1 \cup S_2 \quad m = 6 \quad x_A, y_A, \varphi_{1z}, x_C, y_C, \varphi_{2z}$$

$$\begin{cases} dA = \mathbf{0} \\ dB' = dB'', d\varphi_1 = d\varphi_2 \\ dC \cdot \mathbf{j} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, \\ dx_{B'} - dx_{B''} = 0 \\ dy_{B'} - dy_{B''} = 0 \\ d\varphi_{1z} - d\varphi_{2z} = 0 \\ dy_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, \\ [dx_A - d\varphi_{1z}(y_B - y_A)] - [dx_C - d\varphi_{2z}(y_B - y_C)] = 0 \\ [dy_A + d\varphi_{1z}(x_B - x_A)] - [dy_C + d\varphi_{2z}(x_B - x_C)] = 0 \\ d\varphi_{1z} - d\varphi_{2z} = 0 \\ dy_C = 0 \end{cases} \quad s = 6$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{1z} & dx_C & dy_C & d\varphi_{2z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -(y_B - y_A) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_B - x_A & 0 & -1 & -(x_B - x_C) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s' = 6 \\ l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{isostatica}$$

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 13 del 03 Novembre 2020

1 Equazioni cardinali della statica e principio dei lavori virtuali

1.1 Statica di un punto e di un sistema discreto di punti liberi

Assegnata la legge di forza $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, l'equazione fondamentale della dinamica del punto libero è

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad \left(\begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \\ m\ddot{y} = F_y(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \\ m\ddot{z} = F_z(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t). \end{array} \right) \quad (1)$$

e il **problema fondamentale della dinamica** è determinare il moto assegnata la legge di forza \mathbf{F} .

Ognuno degli ∞^6 moti possibili è individuato univocamente assegnando le condizioni iniziali per la posizione e velocità di P all'istante iniziale t_0

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0 \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0. \quad (2)$$

La **statica** del punto libero ha per oggetto la ricerca di condizioni necessarie e suffi-

enti per la quiete del punto P .

Un punto P , soggetto alla forza $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ e **in quiete** nella posizione P^* se e solo se

$$\begin{cases} \forall t \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}^*, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}^*, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3)$$

Si supponga che il **punto vincolato** P sia in quiete nella posizione P^* (consentita dai vincoli) sotto l'azione della **forza attiva** $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, si postula che è sempre possibile sostituire ogni vincolo al quale P è soggetta con una forza Φ , detta **reazione vincolare**, senza che ciò alteri lo stato di quiete o di moto del punto P .

Un punto P vincolato si comporta come un punto libero soggetto alle reazioni vincolari oltre che alle forze attive

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \Phi \quad \left(\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \Phi_x, \\ m\ddot{y} = F_y(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \Phi_y, \\ m\ddot{z} = F_z(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \Phi_z. \end{cases} \right) \quad (4)$$

Il sistema (4) non è sufficiente da solo a determinare il moto di P in quanto contiene le sei funzioni incognite $x(t), y(t), z(t), \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché il punto P soggetto a *vincoli fissi* si trovi **in equilibrio** nella posizione P^* , consentita dai vincoli, sotto l'azione della sollecitazione

attiva $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ è che i vincoli siano capaci di esplicitare una reazione vincolare Φ tale che

$$\begin{cases} \forall t & \mathbf{F}(\mathbf{r}^*, \mathbf{0}, t) + \Phi = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}^*, & \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (5)$$

Per determinare **condizione pure di equilibrio** è necessario stabilire quali reazioni vincolari Φ possano esplicitare i particolari vincoli imposti a P (**leggi dell'attrito**).

Ad esempio se P è vincolato a muoversi su di una superficie σ **liscia o priva di attrito** si ha che essa può esplicitare su P in equilibrio su σ tutte e sole le reazioni vincolari (P, Φ) normali a σ .

Sia $S = \{P_1, \dots, P_N\}$ un sistema di N punti materiali P_i liberi di massa m_i ciascuno dei quali è soggetto al risultante delle forze esterne \mathbf{F}_i e interne \mathbf{f}_i

$$\forall P_i \in S \quad m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \mathbf{f}_i. \quad (6)$$

Per il *principio di azione e reazione* le forze interne sono un sistema equivalente a zero

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i = \mathbf{0} \quad \sum_{i=1}^N (P_i - O) \times \mathbf{f}_i = \mathbf{0} \quad (7)$$

allora dalla (6) si hanno le **equazioni cardinali della meccanica**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \\ \sum_{i=1}^N (P_i - O) \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \times \mathbf{F}_i, \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^{(m)} + \mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_O^{(m)} + \mathbf{M}_O^{(e)} = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (8)$$

che non contengono le forze interne.

Se il sistema S è in quiete dalle (8) si ottengono le **equazioni cardinali della statica**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \\ \sum_{i=1}^N (P_i - O) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_O^{(e)} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Le equazioni cardinali della statica per un sistema S di punti materiali costituiscono solo una condizione necessaria per l'equilibrio di S in una configurazione S_0 .

Per un sistema S vincolato le (9) forniscono una *condizione necessaria* per l'equilibrio

a patto di considerare tra le forze esterne sia quelle attive che vincolari

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_O^{(a)} + \mathbf{M}_O^{(v)} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (10)$$

Più in generale, le equazioni cardinali della statica (9) sono una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio solo se riferite ad un solo punto materiale o ad un solo corpo rigido.

Il sistema libero o vincolato S è in equilibrio nella configurazione S_0 se e solo se¹

$$\mathbf{R}_i^{(e)} = \mathbf{0}, \quad \forall t, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (11)$$

dove se S è vincolato $\mathbf{R}_i^{(e)} = \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)}$.

1.2 Statica del corpo rigido e di un sistema di corpi rigidi

Sia S un corpo rigido libero o vincolato (a vincoli fissi) soggetto ad una sollecitazione esterna $\Sigma^{(e)}$ e sia S_0 una configurazione del sistema compatibile con i vincoli.

S_0 è una **configurazione di equilibrio** per S se, sotto l'azione di $\Sigma^{(e)}$, il sistema S

¹ Le (10) devono valere per ciascun punto P_i e quindi scegliendo $O_i \equiv P_i$ si ha che $\mathbf{M}_{O_i}^{(e)} = \mathbf{0}$.

permane in S_0 per ogni $t \geq t_0$ se vi è inizialmente posto con atto di moto nullo. S_0 è una configurazione di equilibrio per S se e solo se valgono le

$$\text{Equazioni cardinali della statica} \quad \begin{cases} \mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_O^{(e)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_O^{(a)} + \mathbf{M}_O^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (12)$$

con $\mathbf{R}^{(e)}$ e $\mathbf{M}_O^{(e)}$ corrispondenti alla configurazione S_0 , all'atto di moto nullo e al generico istante $t \geq t_0$ e $\Sigma^{(e)} = \Sigma^{(a)} + \Sigma^{(v)}$.

- *Determinazioni di condizioni "pure" di equilibrio per S*
- *Calcolo delle reazioni vincolari in condizioni di equilibrio (caratterizzazione completa della sollecitazione esterna cui è sottoposto S e determinazione dei cimenti a cui sono sottoposti i dispositivi che realizzano i vincoli)*

Condizioni di equilibrio per un solido S libero

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_O^{(a)} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (13)$$

da cui si evince che lo stato di quiete di S nella configurazione S_0 non è alterato se a $\Sigma^{(a)}$ si sostituisce una sollecitazione ad essa equivalente.

Condizioni di equilibrio per un solido S soggetto a vincoli fissi

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_O^{(a)} + \mathbf{M}_O^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (14)$$

cioè S è in equilibrio in S_0 se tra le reazioni vincolari esplicabili su S (in quiete in S_0) ve ne sia almeno una soddisfacente per ogni t e per $S = S_0$ la (14).

Analogamente al caso di un sistema di N punti materiali, se $S = \{S_1, \dots, S_M\}$ è un sistema di M corpi rigidi le equazioni cardinali della statica (12) forniscono solo una condizione necessaria per l'equilibrio di S in una configurazione S_0 .

Per $S = \{S_1, \dots, S_M\}$ libero o vincolato la configurazione S_0 è di equilibrio se e solo se valgono le ECS per ciascun solido

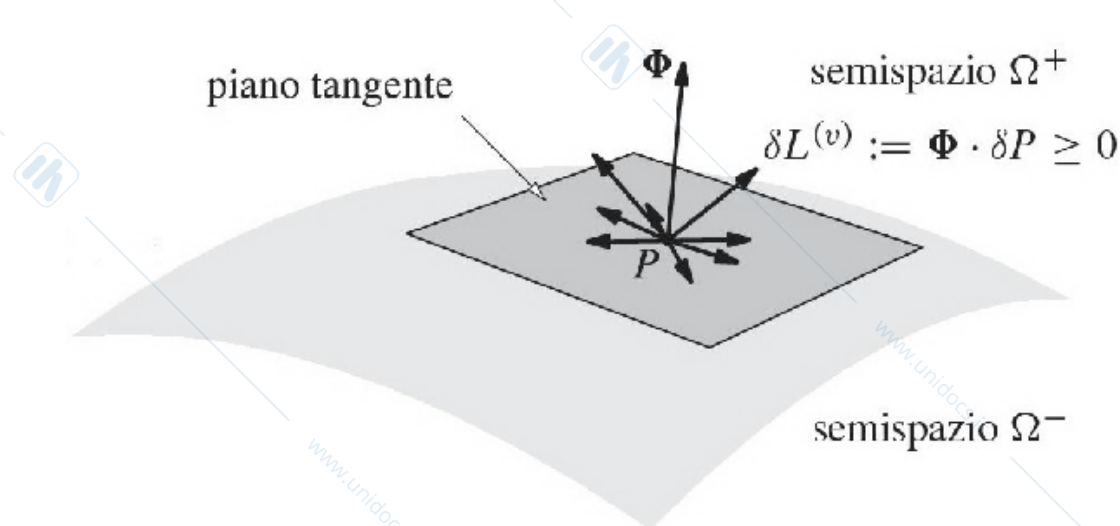
$$\begin{cases} \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, M \quad \forall t. \quad (15)$$

- Le ECS (15) valgono sia per vincoli lisci che scabri.
- Dalle ECS (15) si perviene a condizioni pure di equilibrio procedendo, caso per caso, alla eliminazione delle reazioni vincolari.

- Se i vincoli sono lisci è possibile pervenire facilmente a condizioni pure di equilibrio mediante il Principio dei lavori virtuali (PLV).

1.3 Sistemi a vincoli privi di attrito

Sia S un sistema meccanico vincolato a vincoli lisci.



- $S = \{(P, m)\}$ vincolato a muoversi su di una superficie liscia σ . Allora ad ogni istante t la reazione vincolare Φ è ortogonale allo spostamento virtuale δP e quindi si ha

$$\delta L^{(v)} = \Phi \cdot \delta P = 0. \tag{16}$$

- $S = \{(P, m)\}$ appoggiato ad una superficie liscia σ , cioè vincolato a muoversi su σ o

nel semispazio Ω^+ . Allora ad ogni istante t ogni spostamento virtuale δP forma con la reazione vincolare Φ un angolo acuto o retto e quindi si ha

$$\delta L^{(v)} = \Phi \cdot \delta P \geq 0. \quad (17)$$

In generale, *in ogni sistema di solidi vincolati S , a vincoli olonomi e lisci, il lavoro virtuale $\delta L^{(v)}$ della sollecitazione vincolare $\Sigma^{(v)}$, proveniente sia dal contatto di S con ostacoli esterni che dal mutuo contatto dei solidi costituenti S , verifica le relazioni*

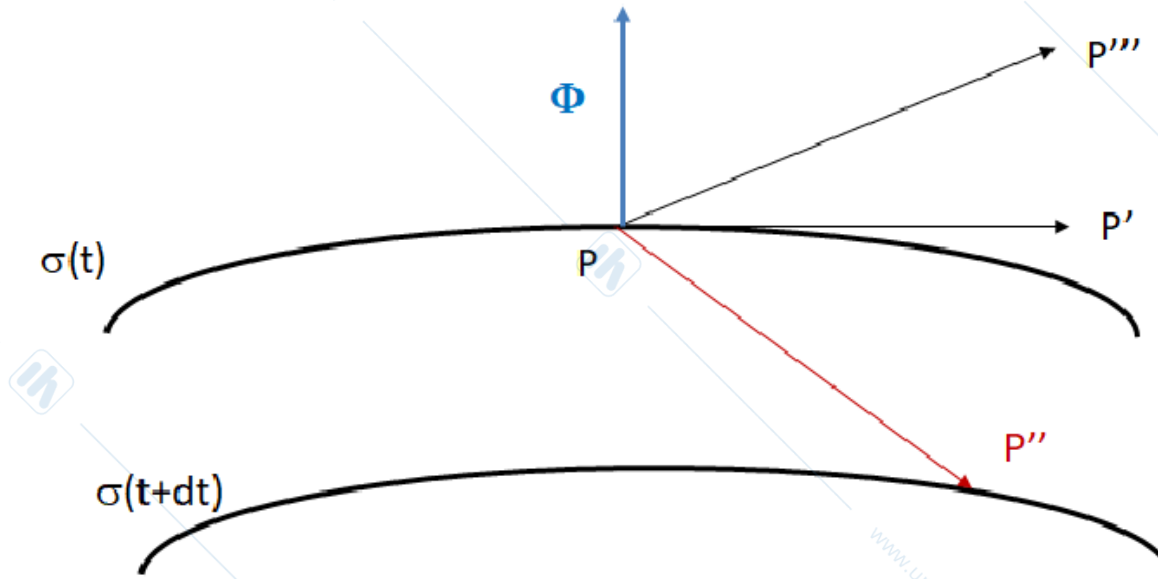
$$\begin{aligned} \delta L^{(v)} &\geq 0 \quad \forall \delta S \\ \delta L^{(v)} &= 0 \quad \forall \delta S \text{ reversibile} \end{aligned} \quad (18)$$

- La $(18)_2$ è una diretta conseguenza della $(18)_1$

$$\delta S \text{ reversibile} \implies \begin{aligned} \delta L^{(v)} &= \Phi \cdot \delta S \geq 0 \\ \delta L^{(v)} &= \Phi \cdot (-\delta S) \geq 0 \end{aligned} \implies \delta L^{(v)} = 0$$

- Se S non ha vincoli unilaterali, ogni spostamento virtuale è reversibile e quindi $\Sigma^{(v)}$ verifica in ogni caso la relazione $(18)_2$.
- La $(18)_1$ nel caso di *vincoli dipendenti dal tempo* non è verificata per ogni *spostamento possibile*.

Si consideri, ad esempio, un punto P appoggiato ad una superficie liscia $\sigma(t)$



$$\left. \begin{array}{l} PP' \\ PP''' \end{array} \right\} \text{ spostamenti possibili e virtuali, } \implies \begin{array}{l} \delta L^{(v)} = \Phi \cdot \delta P' = 0, \\ \delta L^{(v)} = \Phi \cdot \delta P''' \geq 0, \end{array}$$

$$PP'' \text{ spostamento possibile ma non virtuale } \implies \delta L^{(v)} = \Phi \cdot \delta P'' \leq 0.$$

1.4 Principio dei lavori virtuali

Si consideri un sistema meccanico $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ a vincoli olonomi e lisci

$$S_i : \begin{cases} \Sigma_i^{(a)} \longrightarrow \mathbf{R}_i^{(a)}, & \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} \\ \Sigma_i^{(v)} \longrightarrow \mathbf{R}_i^{(v)}, & \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

Una configurazione S_0 del sistema S , a vincoli olonomi, fissi, *lisci o scabri* è di *equilibrio* se e solo se i vincoli sono capaci di esplicitare una sollecitazione vincolare soddisfacente le ECS

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = 0, \\ \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad \forall t \text{ e per } S = S_0 \quad (19)$$

Lavoro virtuale della sollecitazione attiva $\Sigma_i^{(a)}$ e vincolare $\Sigma_i^{(v)}$ agente su S_i per ogni spostamento (rigido) virtuale $\delta P_i = \delta O_i + \delta \varphi_i \times (P_i - O_i)$

$$S_i : \begin{cases} \delta L_i^{(a)} = \mathbf{R}_i^{(a)} \cdot \delta O_i + \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} \cdot \delta \varphi_i, \\ \delta L_i^{(v)} = \mathbf{R}_i^{(v)} \cdot \delta O_i + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} \cdot \delta \varphi_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (20)$$

Lavoro virtuale della sollecitazione attiva $\Sigma^{(a)}$ e vincolare $\Sigma^{(v)}$ agente su S per ogni spostamento (rigido) virtuale $\delta P = \delta O + \delta \varphi \times (P - O)$

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(v)} = \sum_{i=1}^n \left(\delta L_i^{(a)} + \delta L_i^{(v)} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} \right) \cdot \delta O_i + \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{M}_{O_i}^{(a)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} \right) \cdot \delta \varphi_i \quad (21)$$

Pertanto, se S è a vincoli olonomi, lisci e fissi e S_0 è una configurazione di equilibrio per S

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(v)} = 0, \quad \text{per } S = S_0 \quad (22)$$

e dalle (18) si ottiene

$$\begin{aligned} \delta L^{(a)} &\leq 0, & \forall \delta S \\ \delta L^{(a)} &= 0, & \forall \delta S \text{ reversibile} \end{aligned} \quad (23)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema S di solidi vincolati a vincoli olonomi lisci e indipendenti dal tempo sia in equilibrio in una configurazione S_0 è che

per ogni spostamento virtuale δS eseguito a partire da S_0 sia

$$\begin{aligned}\delta L^{(a)} &\leq 0, \quad \forall \delta S \\ \delta L^{(a)} &= 0, \quad \forall \delta S \text{ reversibile}\end{aligned}\tag{24}$$

- La $(24)_2$ è una condizione di equilibrio pura.
- Se il sistema è a vincoli bilaterali ogni spostamento virtuale è reversibile e quindi vale la $(24)_2$.

Principio di Torricelli

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema pesante S di solidi vincolati a vincoli olonomi, lisci e indipendenti dal tempo sia in equilibrio in una configurazione S_0 è che il baricentro G di S non sia suscettibile di abbassamenti per effetto di alcuno spostamento virtuale di S eseguito a partire da S_0 .

$$\delta L^{(a)} = \mathbf{p} \cdot \delta G \leq 0 \iff \widehat{\mathbf{p} \delta G} \geq 90^\circ\tag{25}$$

1.5 Condizioni di equilibrio per un solido S

Siano $\Sigma^{(a)}$ la sollecitazione esterna attiva che agisce su S , corrispondente all'atto di moto nullo, e $\mathbf{R}^{(a)}$ e $\mathbf{M}_O^{(a)}$ il risultante e il momento risultante rispetto al polo O .

$$\delta P = \delta O + \delta \varphi \times (P - O), \quad \forall P \in S \quad (26)$$

$$\delta L^{(a)} = \mathbf{R}^{(a)} \cdot \delta O + \mathbf{M}_O^{(a)} \cdot \delta \varphi. \quad (27)$$

Per i sistemi a *vincoli olonomi, fissi, lisci e bilaterali*, S_0 è una configurazione d'equilibrio se e solo se

$$\delta L^{(a)} = 0 \iff \mathbf{R}^{(a)} \cdot \delta O + \mathbf{M}_O^{(a)} \cdot \delta \varphi = 0 \quad \forall \delta S. \quad (28)$$

1.5.1 Corpo rigido libero

Ogni spostamento virtuale δS di S a partire da S_0 si ottiene da

$$\delta P = \delta O + \delta \varphi \times (P - O), \quad (29)$$

con δO e $\delta \varphi$ del tutto arbitrari.

Allora, S_0 è una configurazione d'equilibrio se e solo se

$$\delta L^{(a)} = \mathbf{R}^{(a)} \cdot \delta O + \mathbf{M}_O^{(a)} \cdot \delta \varphi = 0 \quad \forall \delta O, \delta \varphi \quad \equiv \quad \begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} = \mathbf{0}. \\ \mathbf{M}_O^{(a)} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (30)$$

1.5.2 Corpo rigido con un punto fisso O

Ogni spostamento virtuale δS di S a partire da S_0 è uno spostamento rigido sferico di centro O

$$\delta P = \delta \varphi \times (P - O), \quad (31)$$

Allora, S_0 è una configurazione d'equilibrio se e solo se

$$\delta L^{(a)} = \mathbf{M}_O^{(a)} \cdot \delta \varphi = 0 \quad \forall \delta \varphi \quad \equiv \quad \mathbf{M}_O^{(a)} = \mathbf{0}. \quad (32)$$

1.5.3 Corpo rigido con un asse fisso r

Ogni spostamento virtuale δS di S a partire da S_0 è un'arbitraria rotazione infinitesima attorno all'asse r , scelto $O \in r$ si ha

$$\delta P = \delta \varphi \times (P - O), \quad \text{con } \delta \varphi \parallel \text{vers } r \quad (33)$$

Allora, S_0 è una configurazione d'equilibrio se e solo se

$$\delta L^{(a)} = \mathbf{M}_O^{(a)} \cdot \delta\varphi = 0 \quad \forall \delta\varphi \parallel \mathbf{vers} r \quad (34)$$

$$\delta L^{(a)} = |\delta\varphi| \mathbf{M}_O^{(a)} \cdot \mathbf{vers} r = |\delta\varphi| M_r^{(a)} = 0 \quad \forall |\delta\varphi| \quad \equiv \quad M_r^{(a)} = 0 \quad (35)$$

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 14 del 05 Novembre 2020

1 Analisi statica: equilibrio e reazioni vincolari

Sia S un sistema vincolato a vincoli *olonomi, bilaterali, lisci e semplici*

eq. di vincolo $g_i(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \quad i = 1, \dots, s$

contatto puntuale (A_i, Φ_i) regione di contatto $((A_i, \Phi_i), \Gamma_i)$,

reazione vincolare $\Phi_i = X_i \nabla g_i|_{A_i} \quad i = 1, \dots, s$

$$\delta L^{(v)} = \sum_{i=1}^s \Phi_i \cdot \delta A_i = \sum_{i=1}^s X_i \cdot \delta g_i = 0.$$

In presenza di vincoli *olonomi, unilaterali, lisci e semplici*

diseq. di vincolo $\gamma_i(x_i, y_i, z_i, t) \leq 0 \quad i = 1, \dots, r$

posizioni ordinarie $\gamma_i(x_i, y_i, z_i, t) < 0 \quad \Phi_i = \mathbf{0}$

posizioni di confine $\gamma_i(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \quad \Phi_i = Y_i \nabla \gamma_i|_{B_i} \quad i = 1, \dots, r$

$$\delta L^{(v)} = \sum_{i=1}^r \Phi_i \cdot \delta B_i = \sum_{i=1}^r Y_i \delta \gamma_i \geq 0.$$

$$\delta L^{(v)} = \sum_{i=1}^s X_i \cdot \delta g_i + \sum_{i=1}^r Y_i \delta \gamma_i \geq 0 \quad \forall \delta S$$

$$\delta L^{(v)} = \sum_{i=1}^s X_i \cdot \delta g_i + \sum_{i=1}^r Y_i \delta \gamma_i = 0 \quad \forall \delta S \text{ reversibile}$$

Sia $S = \{S_1, \dots, S_N\}$ un sistema di N corpi rigidi vincolati a vincoli *olonomi, lisci, fissi e bilaterali*

$$g_i(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad i = 1, \dots, s \quad \Phi_i = X_i \nabla g_i|_{A_i} \quad i = 1, \dots, s$$

La configurazione S_0 per S è di equilibrio se e solo se valgono le ECS per ciascun solido

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall t. \quad (1)$$

Le (1) sono un sistema di $m = 6N$ equazioni lineari nelle incognite reazioni vincolari

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_s)^T$$

e quindi può scriversi nella forma matriciale

$$M_S \mathbf{X} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

matrice statica M_S $[m, s]$

termini noti $\mathbf{f} = \left(R_{1x}^{(a)}, \dots, M_{Nz}^{(a)} \right)^T$

La matrice statica coincide con la trasposta della matrice cinematica $M_S = M_C^T$.

Allora, $M_S = M_C^T \Rightarrow \text{rank} M_S = \text{rank} M_C = s'$, posto $l = m - s'$, $i = s - s'$ si ha

- $l = 0, i = 0$ S è isostatico e quindi in equilibrio in S_0 , le ECS sono soddisfatte e ammettono una ed una sola soluzione;
- $l = 0, i > 0$ S è i volte iperstatico, è in equilibrio in S_0 , le ECS sono soddisfatte e ammettono ∞^i soluzioni;
- $l > 0, i = 0$ S è l volte labile.
Se S_0 è di equilibrio le ECS sono soddisfatte e ammettono una ed una sola soluzione.
Se S_0 non è di equilibrio le ECS non sono soddisfatte.
- $l > 0, i > 0$ S è l volte labile con i vincoli dipendenti.
Se S_0 è di equilibrio le ECS sono soddisfatte e ammettono ∞^i soluzioni.
Se S_0 non è di equilibrio le ECS non sono soddisfatte.

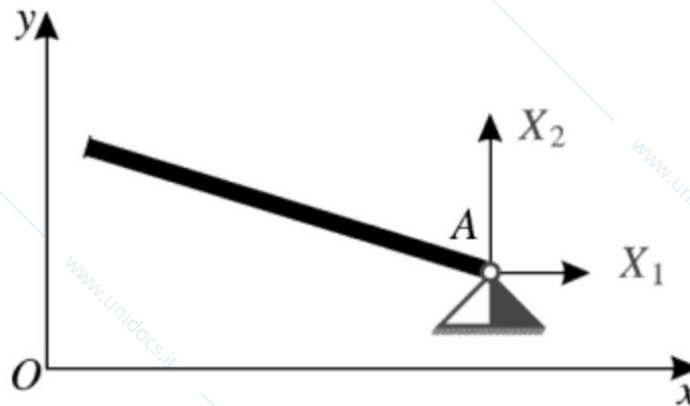
1.1 Reazioni dei vincoli nel piano

Considerando vincoli olonomi, lisci, fissi e bilaterali si ha

$$((A, \Phi_A), \Gamma_A) \quad dL^{(v)} = 0 \quad \forall dS$$

$$dP = dA + d\varphi \times (P - A) \implies dL^{(v)} = \Phi_A \cdot dA + \Gamma_A \cdot d\varphi = 0 \quad \forall dA, d\varphi$$

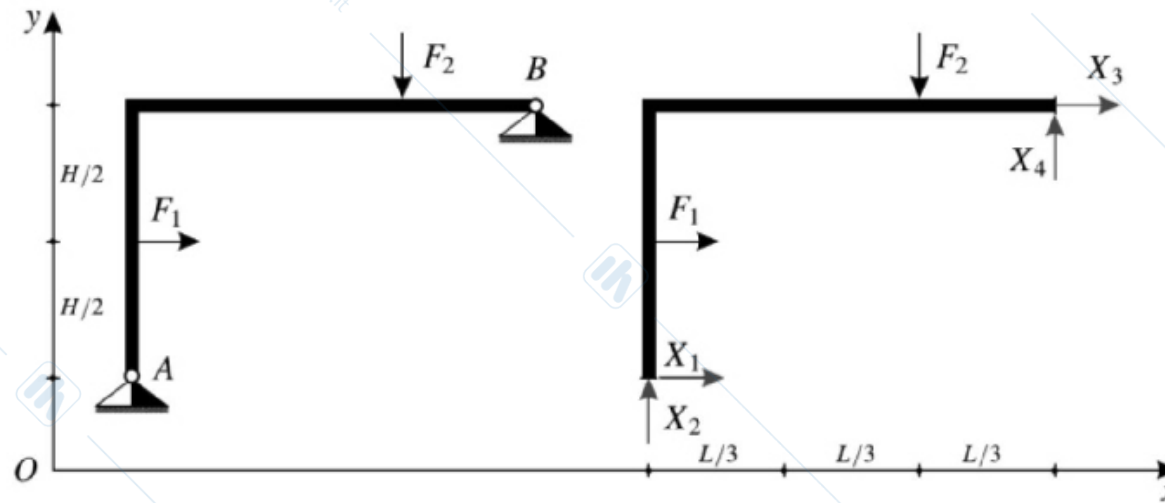
Cerniera esterna $dA = 0$



$$((A, \Phi_A), \Gamma_A) \quad dL^{(v)} = \Phi_A \cdot dA + \Gamma_A \cdot d\varphi = 0 \quad \forall dS \implies \Gamma_{Az} d\varphi_z = 0 \quad \forall d\varphi_z \implies \Gamma_{Az} = 0$$

$$\Phi_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i} + \Phi_{Ay} \mathbf{j} \quad \Gamma_A = \mathbf{0}$$

Esempio 1. Analisi cinematica e calcolo delle reazioni vincolari con le ECS



Analisi cinematica

$$m = 3, \quad x_A, y_A, \varphi, \quad A \equiv (x_A, y_A), B \equiv (x_A + L, y_A + H) \quad d\mathbf{A} = \mathbf{0}, d\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ dx_A - Hd\varphi_z = 0, \\ dy_A + Ld\varphi_z = 0, \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -H \\ 0 & 1 & L \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 4 \\ s' = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} l = 0 \\ i = 1 \end{matrix} \quad \text{1 volta iperstatico}$$

Analisi statica

$$(C, \mathbf{F}_1) : C \equiv (x_A, y_A + H/2), \quad \mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{i}$$

$$(D, \mathbf{F}_2) : D \equiv (x_A + 2/3L, y_A + H), \quad \mathbf{F}_2 = -F_2 \mathbf{j}$$

$$(A, \Phi_A) : A \equiv (x_A, y_A), \quad \Phi_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i} + \Phi_{Ay} \mathbf{j}$$

$$(B, \Phi_B) : B \equiv (x_A + H, y_A + L), \quad \Phi_B = \Phi_{Bx} \mathbf{i} + \Phi_{By} \mathbf{j}$$

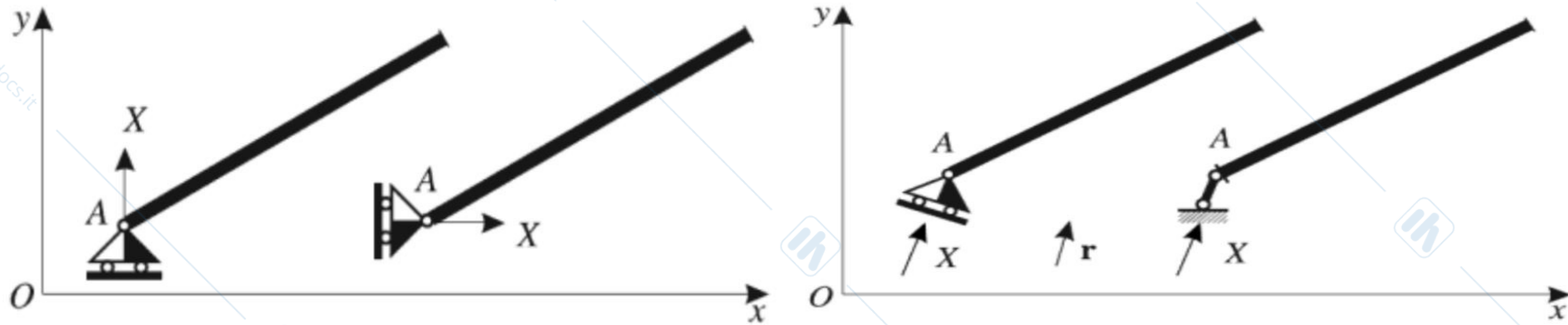
$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_A^{(a)} + \mathbf{M}_A^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} R_x^{(a)} + R_x^{(v)} = 0, \\ R_y^{(a)} + R_y^{(v)} = 0, \\ M_{Az}^{(a)} + M_{Az}^{(v)} = 0, \end{cases} \equiv \begin{cases} F_1 + \Phi_{Ax} + \Phi_{Bx} = 0, \\ -F_2 + \Phi_{Ay} + \Phi_{By} = 0, \\ -H/2F_1 - 2/3LF_2 + L\Phi_{By} - H\Phi_{Bx} = 0 \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -H \\ 0 & 1 & L \end{pmatrix} \quad M_S = M_C^T = \begin{pmatrix} \Phi_{Ax} & \Phi_{Ay} & \Phi_{Bx} & \Phi_{By} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -H & L \end{pmatrix} \quad \text{rank } M_S = s' = 3$$

$$\infty^1 \text{ soluzioni} \quad \Phi_{Ax} = -\Phi_{Bx} - F_1, \quad \Phi_{Ay} = \frac{1}{3}F_2 - \frac{H}{2L}F_1 - \frac{H}{L}\Phi_{Bx}, \quad \Phi_{By} = \frac{H}{2L}F_1 + \frac{2}{3}F_2 + \frac{H}{L}\Phi_{Bx}$$

Carrello e pendolo esterno

$$[dA \cdot \mathbf{j} = 0, dA \cdot \mathbf{i} = 0, dA \cdot \mathbf{r} = 0]$$



$$((A, \Phi_A), \Gamma_A) \quad dL^{(v)} = \Phi_{Ax} dx_A + \Phi_{Ay} dy_A + \Gamma_{Az} d\varphi_z = 0 \quad \forall dx_A, dy_A, d\varphi_z$$

$$dA \cdot \mathbf{j} = 0 \Rightarrow dL^{(v)} = \Phi_{Ax} dx_A + \Gamma_{Az} d\varphi_z = 0 \quad \forall dx_A, d\varphi_z \Rightarrow \Phi_A = \Phi_{Ay} \mathbf{j}, \quad \Gamma_A = \mathbf{0}$$

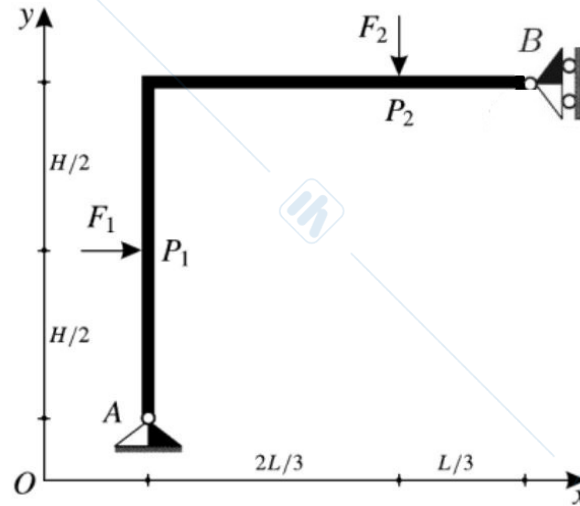
$$dA \cdot \mathbf{i} = 0 \Rightarrow dL^{(v)} = \Phi_{Ay} dy_A + \Gamma_{Az} d\varphi_z = 0 \quad \forall dy_A, d\varphi_z \Rightarrow \Phi_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i}, \quad \Gamma_A = \mathbf{0}$$

$$dA = dA_{\parallel} + dA_{\perp} \quad dA_{\parallel} \parallel \mathbf{r} \quad dA_{\perp} \perp \mathbf{r} \Rightarrow [dA \cdot \mathbf{r} = 0 \iff dA = dA_{\perp}]$$

$$dL^{(v)} = \Phi_A \cdot dA + \Gamma_A \cdot d\varphi = \Phi_{A\perp} dA_{\perp} + \Gamma_{Az} d\varphi_z = 0 \quad \forall dA_{\perp}, d\varphi_z \Rightarrow \Phi_{A\perp} = 0, \quad \Gamma_{Az} = 0$$

$$\Phi_A = \Phi_A \mathbf{r}, \quad \Gamma_A = \mathbf{0}$$

Esempio 2. Analisi cinematica e calcolo delle reazioni vincolari con le ECS



Analisi cinematica

$$m = 3, \quad x_A, y_A, \varphi, \quad A \equiv (x_A, y_A), \quad B \equiv (x_A + L, y_A + H) \quad d\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad d\mathbf{B} \cdot \mathbf{i} = 0$$

$$\begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ dx_A - Hd\varphi_z = 0, \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -H \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 3 \\ s' = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{isostatico}$$

Analisi statica

$$(C, \mathbf{F}_1) : C \equiv (x_A, y_A + H/2), \quad \mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{i}$$

$$(D, \mathbf{F}_2) : D \equiv (x_A + 2/3L, y_A + H), \quad \mathbf{F}_2 = -F_2 \mathbf{j}$$

$$(A, \Phi_A) : A \equiv (x_A, y_A), \quad \Phi_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i} + \Phi_{Ay} \mathbf{j}$$

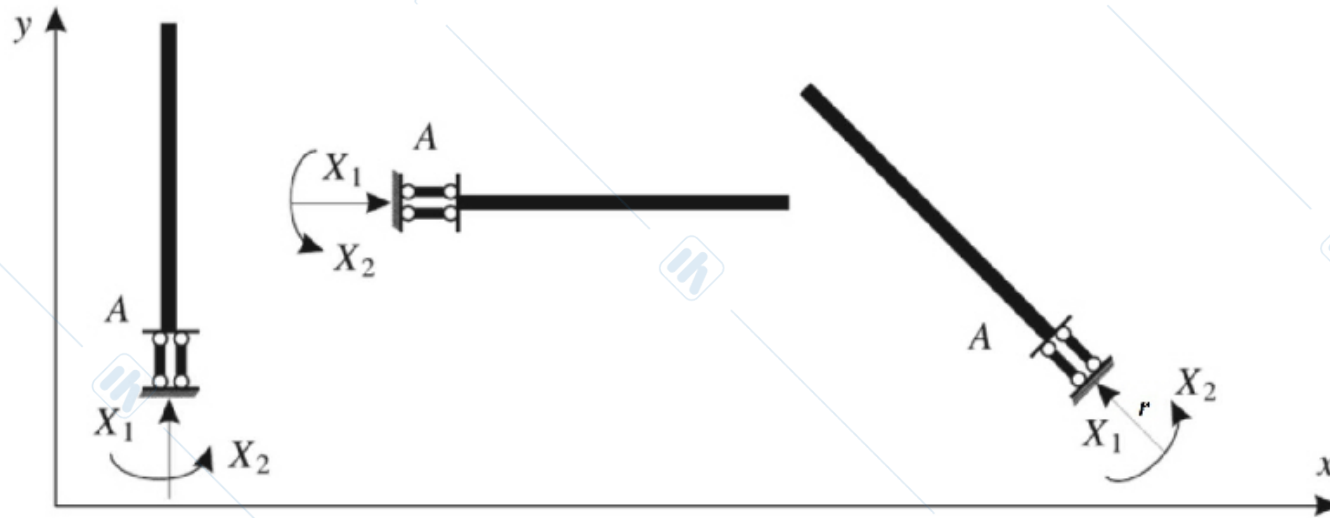
$$(B, \Phi_B) : B \equiv (x_A + H, y_A + L), \quad \Phi_B = \Phi_{Bx} \mathbf{i}$$

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_A^{(a)} + \mathbf{M}_A^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} R_x^{(a)} + R_x^{(v)} = 0, \\ R_y^{(a)} + R_y^{(v)} = 0, \\ M_{Az}^{(a)} + M_{Az}^{(v)} = 0, \end{cases} \equiv \begin{cases} F_1 + \Phi_{Ax} + \Phi_{Bx} = 0, \\ -F_2 + \Phi_{Ay} = 0, \\ -H/2F_1 - 2/3LF_2 - H\Phi_{Bx} = 0, \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -H \end{pmatrix} \quad M_S = M_C^T = \begin{pmatrix} \Phi_{Ax} & \Phi_{Ay} & \Phi_{Bx} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -H \end{pmatrix} \quad \text{rank } M_S = s' = 3$$

$$\Phi_{Ax} = -\frac{F_1}{2} + \frac{2L}{3H}F_2, \quad \Phi_{Ay} = F_2, \quad \Phi_{Bx} = -\frac{F_1}{2} - \frac{2L}{3H}F_2$$

Doppio pendolo esterno $[dA \cdot \mathbf{r} = 0, d\varphi_z = 0 \quad \mathbf{r}$ direzione dei pendoli]



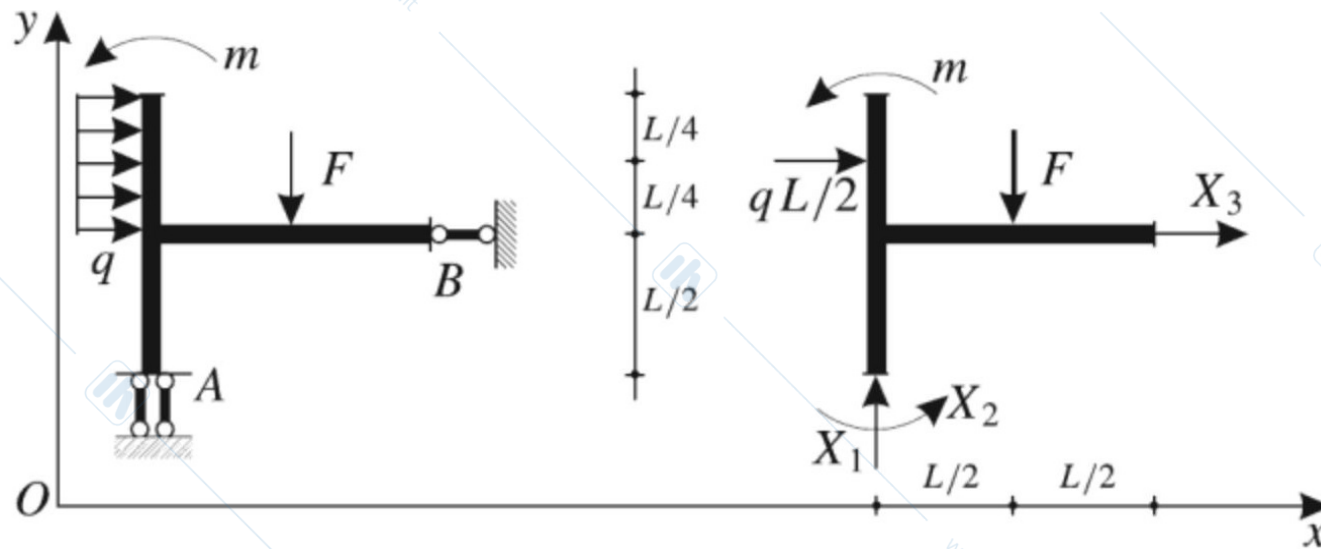
$$((A, \Phi_A), \Gamma_A) \quad \Phi_A = \Phi_r \mathbf{r} + \Phi_s \mathbf{s} \quad dA = dA_s \mathbf{s}, \quad \implies \Phi_s = 0$$

$$dL^{(v)} = \Phi_A \cdot dA + \Gamma_A \cdot d\varphi = \Phi_s dA_s = 0 \quad \forall dA_s,$$

$$\Phi_A = \Phi_r \mathbf{r}, \quad \Gamma_A = \Gamma_{Az} \mathbf{k}$$

$$\Phi_A = \Phi_A \mathbf{j}, \quad \Gamma_A = \Gamma_{Az} \mathbf{k} \qquad \Phi_A = \Phi_A \mathbf{i}, \quad \Gamma_A = \Gamma_{Az} \mathbf{k}$$

Esempio 3. Analisi cinematica e calcolo delle reazioni vincolari con le ECS



Analisi cinematica

$$m = 3, \quad x_A, y_A, \varphi, \quad A \equiv (x_A, y_A), \quad B \equiv (x_A + L/2, y_A + L/2)$$

$$dA \cdot \mathbf{j} = 0, \quad d\varphi_z = 0, \quad dB \cdot \mathbf{i} = 0$$

$$\begin{cases} dy_A = 0, \\ d\varphi_z = 0, \\ dx_A - L/2 d\varphi_z = 0, \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -L/2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 3 \\ s' = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{isostatico}$$

Analisi statica

Sollecitazioni attive

- $(C, \mathbf{F}_1) : C \equiv (x_A + L/2, y_A + L/2), \quad \mathbf{F}_1 = -F\mathbf{j}$
momento di \mathbf{F}_1 rispetto ad $A : (C - A) \times \mathbf{F}_1 = (L/2\mathbf{i} + L/2\mathbf{j}) \times (-F\mathbf{j}) = -FL/2\mathbf{k}$
- sollecitazione ripartita di intensità q nella direzione dell'asse x che risulta equivalente alla forza concentrata $(D, \mathbf{F}_2) : D \equiv (x_A, y_A + 3/4L), \mathbf{F}_2 = qL/2\mathbf{i}$
momento di \mathbf{F}_2 rispetto ad $A : (D - A) \times \mathbf{F}_2 = (3/4L\mathbf{j}) \times (qL/2\mathbf{i}) = -3qL^2/8\mathbf{k}$
- coppia di momento $\mathbf{m} = m\mathbf{k}$

Reazioni vincolari

- $\Phi_A = \Phi_A\mathbf{j}, \quad \Gamma_A = \Gamma_{Az}\mathbf{k}$
- $\Phi_B = \Phi_{Bx}\mathbf{i} \quad B \equiv (x_A + L, y_A + L/2)$
momento di Φ_B rispetto ad $A : (B - A) \times \Phi_B = (L\mathbf{i} + L/2\mathbf{j}) \times (\Phi_{Bx}\mathbf{i}) = -\Phi_{Bx}L/2\mathbf{k}$

$$\begin{cases} R_x^{(a)} + R_x^{(v)} = 0, \\ R_y^{(a)} + R_y^{(v)} = 0, \\ M_{Az}^{(a)} + M_{Az}^{(v)} = 0, \end{cases} \equiv \begin{cases} qL/2 + \Phi_{Bx} = 0, \\ -F + \Phi_A = 0, \\ -FL/2 - 3qL^2/8 + m + \Gamma_{Az} - \Phi_{Bx}L/2 = 0, \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -L/2 \end{pmatrix} \quad M_S = M_C^T = \begin{pmatrix} \Phi_{Ax} & \Gamma_{Az} & \Phi_{Bx} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L/2 \end{pmatrix} \quad \text{rank } M_S = s' = 3$$

$$\Phi_{Ax} = F, \Gamma_{Az} = FL/2 - m + qL^2/8, \Phi_{Bx} = -qL/2$$

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 15 del 10 Novembre 2020

1 Analisi statica: equilibrio e reazioni vincolari

Sia $S = \{S_1, \dots, S_N\}$ un sistema di N corpi rigidi vincolati a vincoli *olonomi, lisci, fissi e bilaterali*

$$g_i(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad i = 1, \dots, s \quad \Phi_i = X_i \nabla g_i|_{A_i} \quad i = 1, \dots, s$$

La configurazione S_0 per S è di equilibrio se e solo se valgono le ECS per ciascun solido

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall t. \quad (1)$$

Le (1) sono un sistema di $m = 6N$ equazioni lineari nelle incognite reazioni vincolari

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_s)^T$$

e quindi può scriversi nella forma matriciale

$$M_S \mathbf{X} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

matrice statica $M_S \quad [m, s]$
termini noti $\mathbf{f} = \left(R_{1x}^{(a)}, \dots, M_{Nz}^{(a)} \right)^T$

La matrice statica coincide con la trasposta della matrice cinematica $M_S = M_C^T$.

Allora, $M_S = M_C^T \Rightarrow \text{rank} M_S = \text{rank} M_C = s'$, posto $l = m - s'$, $i = s - s'$ si ha

- $l = 0, i = 0$ S è isostatico e quindi in equilibrio in S_0 , le ECS sono soddisfatte e ammettono una ed una sola soluzione;
- $l = 0, i > 0$ S è i volte iperstatico, è in equilibrio in S_0 , le ECS sono soddisfatte e ammettono ∞^i soluzioni;
- $l > 0, i = 0$ S è l volte labile.
Se S_0 è di equilibrio le ECS sono soddisfatte e ammettono una ed una sola soluzione.
Se S_0 non è di equilibrio le ECS non sono soddisfatte.
- $l > 0, i > 0$ S è l volte labile con i vincoli dipendenti.
Se S_0 è di equilibrio le ECS sono soddisfatte e ammettono ∞^i soluzioni.
Se S_0 non è di equilibrio le ECS non sono soddisfatte.

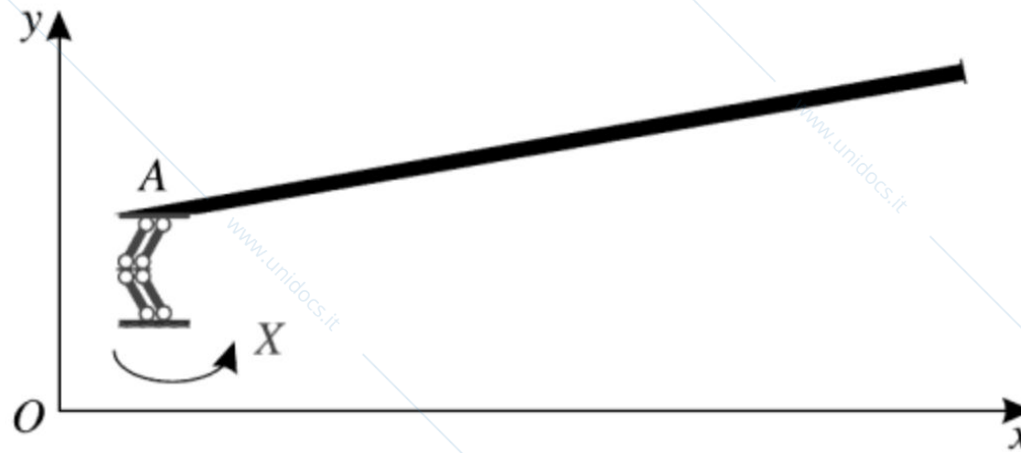
1.1 Reazioni dei vincoli esterni nel piano

Considerando vincoli olonomi, lisci, fissi e bilaterali si ha

$$((A, \Phi_A), \Gamma_A) \quad dL^{(v)} = 0 \quad \forall dS$$

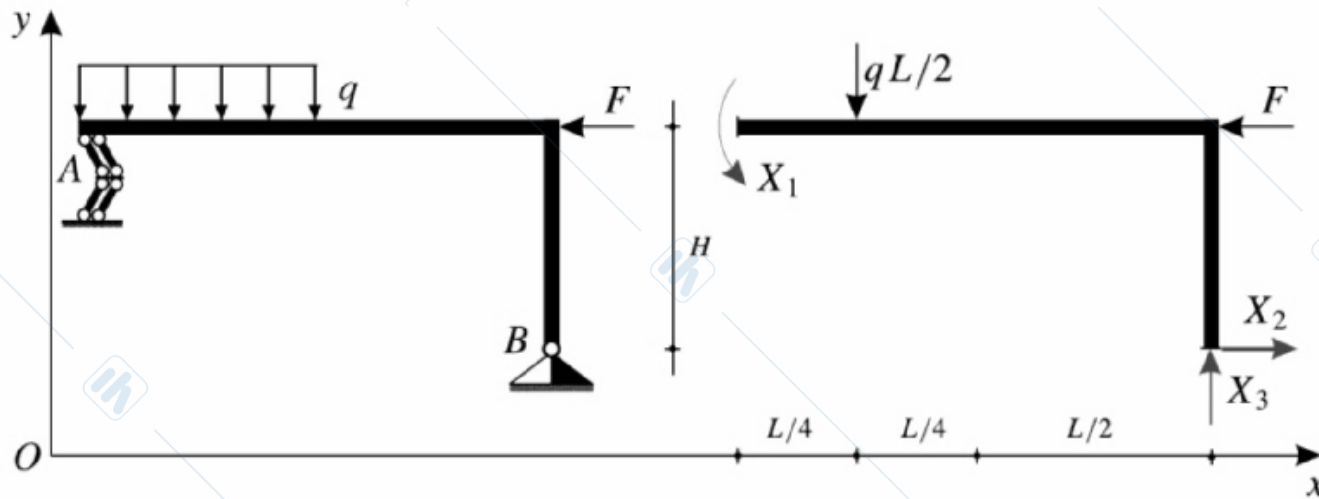
$$dP = dA + d\varphi \times (P - A) \implies dL^{(v)} = \Phi_A \cdot dA + \Gamma_A \cdot d\varphi = 0 \quad \forall dA, d\varphi$$

Doppio-doppio pendolo esterno $[dA = dP, \quad \forall P \quad (d\varphi_z = 0)]$



$$((A, \Phi_A), \Gamma_A) \quad dL^{(v)} = \Phi_A \cdot dA + \Gamma_A \cdot d\varphi = \Phi_A \cdot dA = 0, \quad \forall dA \implies \Phi_A = \mathbf{0} \quad \Gamma_A = \Gamma_{Az} \mathbf{k}$$

Esempio 1. Analisi cinematica e calcolo delle reazioni vincolari con le ECS



Analisi cinematica

$$m = 3, \quad x_B, y_B, \varphi, \quad A \equiv (x_B - L, y_B + H), B \equiv (x_B, y_B)$$

$$d\varphi_z = 0, d\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} d\varphi_z = 0, \\ dx_B = 0, \\ dy_B = 0, \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_B & dy_B & d\varphi \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 3 \\ s' = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{isostatico}$$

Analisi statica

Sollecitazioni attive

- $(C, \mathbf{F}_1) : C \equiv (x_B, y_B + H), \quad \mathbf{F}_1 = -F \mathbf{i}$
momento rispetto ad $B : (C - B) \times \mathbf{F}_1 = H \mathbf{j} \times (-F \mathbf{i}) = FH \mathbf{k}$
- sollecitazione ripartita di intensità q nella direzione dell'asse y che risulta equivalente alla forza concentrata $(D, \mathbf{F}_2) : D \equiv (x_B - 3/4L, y_B + H), \mathbf{F}_2 = -qL/2 \mathbf{j}$
momento rispetto ad $B : (D - B) \times \mathbf{F}_2 = (-3/4L \mathbf{i} + H \mathbf{j}) \times (-qL/2 \mathbf{j}) = 3qL^2/4 \mathbf{k}$

Reazioni vincolari

- $\Gamma_A = \Gamma_{Az} \mathbf{k}$
- $\Phi_B = \Phi_{Bx} \mathbf{i} + \Phi_{By} \mathbf{j}$

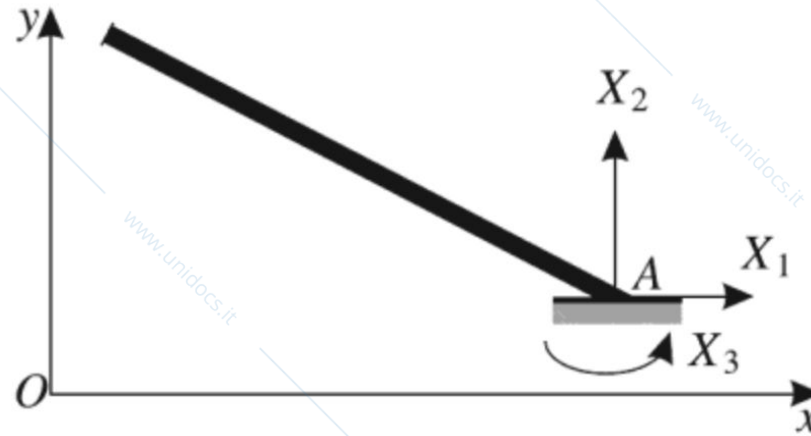
$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_A^{(a)} + \mathbf{M}_A^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} R_x^{(a)} + R_x^{(v)} = 0, \\ R_y^{(a)} + R_y^{(v)} = 0, \\ M_{Az}^{(a)} + M_{Az}^{(v)} = 0, \end{cases} \equiv \begin{cases} -F + \Phi_{Bx} = 0, \\ -qL/2 + \Phi_{By} = 0, \\ FH + 3qL^2/4 + \Gamma_{Az} = 0, \end{cases}$$

$$\Gamma_{Az} = -FH - 3qL^2/4, \Phi_{Bx} = F, \Phi_{By} = qL/2$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_B & dy_B & d\varphi \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_S = M_C^T = \begin{pmatrix} \Gamma_{Az} & \Phi_{Bx} & \Phi_{By} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rank } M_S = s' = 3$$

Incastro esterno

$$[dP = \mathbf{0}, \quad \forall P \quad (dx_A = dy_A = d\varphi_z = 0)]$$



$$((A, \Phi_A), \Gamma_A) \quad dL^{(v)} = \Phi_A \cdot dA + \Gamma_A \cdot d\varphi = 0 \implies \Phi_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i} + \Phi_{Ay} \mathbf{j}, \quad \Gamma_A = \Gamma_{Az} \mathbf{k}$$

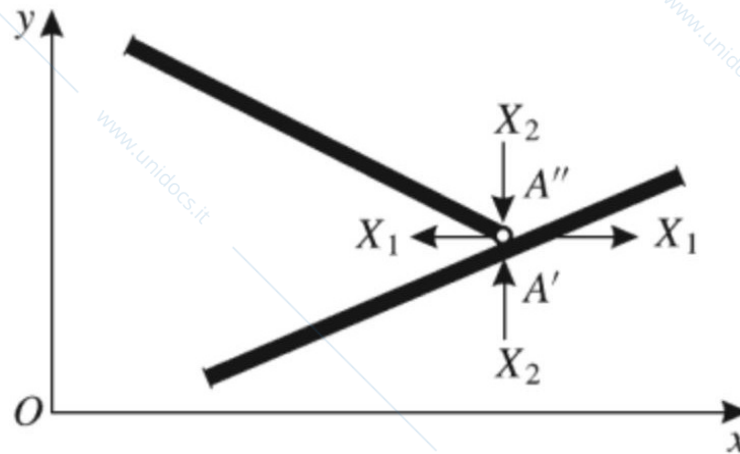
1.2 Reazioni dei vincoli interni nel piano

Sia $S = S' \cup S''$ un sistema vincolato internamente con vincoli olonomi, lisci, fissi e bilaterali si ha

$$\begin{aligned}
 S' : \quad dP &= dA' + d\varphi' \times (P - A') \quad \forall P \in S' && ((A', \Phi'_A), \Gamma'_A) \\
 S'' : \quad dP &= dA'' + d\varphi'' \times (P - A'') \quad \forall P \in S'' && ((A'', \Phi''_A), \Gamma''_A)
 \end{aligned}
 \quad dL^{(v)} = 0 \quad \forall dS$$

$$dL^{(v)} = \Phi'_A \cdot dA' + \Gamma'_{A'} \cdot d\varphi' + \Phi''_A \cdot dA'' + \Gamma''_{A'} \cdot d\varphi'' = 0 \quad \forall dA', d\varphi', dA'', d\varphi''$$

Cerniera interna $[dA' - dA'' = 0]$



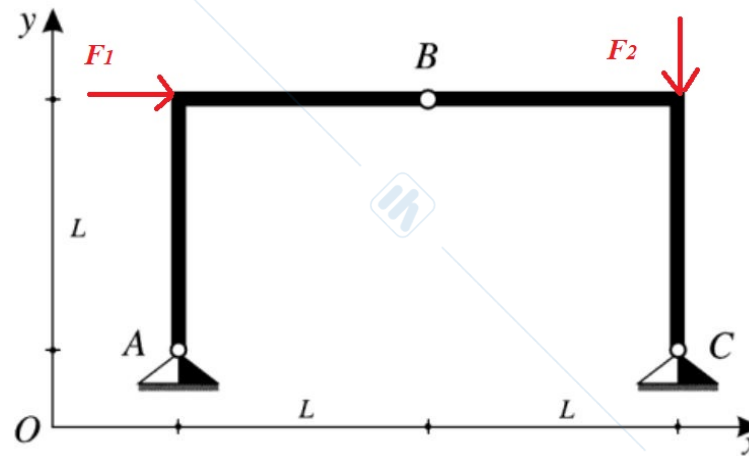
$$dA' - dA'' = \mathbf{0} \Rightarrow dL^{(v)} = (\Phi'_A + \Phi''_A) \cdot dA' + \Gamma'_A \cdot d\varphi' + \Gamma''_A \cdot d\varphi'' = 0 \quad \forall dA', d\varphi', d\varphi''$$

$$dL^{(v)} = 0 \quad \forall dA', d\varphi', d\varphi'' \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'_A + \Phi''_A = \mathbf{0} \\ \Gamma'_A = \mathbf{0} \\ \Gamma''_A = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i} + \Phi_{Ay} \mathbf{j} & \Gamma'_A = \mathbf{0}, \\ \Phi''_A = -\Phi'_A & \Gamma''_A = \mathbf{0}, \end{cases}$$

Nel caso in cui la cerniera interna colleghi N travi S_i nel punto A si ha

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i = \mathbf{0}, \quad \Gamma_i = \mathbf{0} \quad \forall i.$$

Esempio 2. Analisi cinematica e calcolo delle reazioni vincolari con le ECS per l'arco a tre cerniere in figura.



Analisi cinematica

$m = 6, \quad x_A, y_A, \varphi_1, x_C, y_C, \varphi_2$ $A \equiv (x_A, y_A), B \equiv (x_A + L, y_A + L), C \equiv (x_A + 2L, y_A)$
 equazioni di vincolo

$$\begin{cases} dA = \mathbf{0}, \\ dB' - dB'' = \mathbf{0}, \\ dC = \mathbf{0}, \end{cases} \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, \\ dx_A - d\varphi_{1z} (y_B - y_A) - [dx_C - d\varphi_{2z} (y_B - y_C)] = 0, \\ dy_A + d\varphi_{1z} (x_B - x_A) - [dy_C + d\varphi_{1z} (x_B - x_C)] = 0, \\ dx_C = 0, dy_C = 0, \end{cases} \quad s = 6$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{1z} & dx_C & dy_C & d\varphi_{2z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -L & -1 & 0 & L \\ 0 & 1 & L & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 6 \\ s' = 6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad S \text{ è isostatico}$$

Analisi statica

$$(P_1, \mathbf{F}_1) : P_1 \equiv (x_A, y_A + L), \quad \mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{i}$$

$$(P_2, \mathbf{F}_2) : P_2 \equiv (x_A + 2L, y_A + L), \quad \mathbf{F}_2 = -F_2 \mathbf{j}$$

$$(A, \Phi_A) : A \equiv (x_A, y_A), \quad \Phi_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i} + \Phi_{Ay} \mathbf{j}$$

$$(B, \Phi'_B), (B, \Phi''_B) : B \equiv (x_A + L, y_A + L), \quad \Phi''_B = -\Phi'_B$$

$$(C, \Phi_C) : C \equiv (x_A + 2L, y_A), \quad \Phi_C = \Phi_{Cx} \mathbf{i} + \Phi_{Cy} \mathbf{j}$$

$$S' : \begin{cases} \mathbf{R}'^{(a)} + \mathbf{R}'^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}'_A^{(a)} + \mathbf{M}'_A^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$S'' : \begin{cases} \mathbf{R}''^{(a)} + \mathbf{R}''^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}''_C^{(a)} + \mathbf{M}''_C^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\mathbf{M}'_A{}^{(a)} = (P_1 - A) \times \mathbf{F}_1 = L\mathbf{j} \times F_1\mathbf{i} = -LF_1\mathbf{k},$$

$$\mathbf{M}'_A{}^{(v)} = (B - A) \times \Phi'_B = (L\mathbf{i} + L\mathbf{j}) \times (\Phi'_{Bx}\mathbf{i} + \Phi'_{By}\mathbf{j}) = (L\Phi'_{By} - L\Phi'_{Bx})\mathbf{k}$$

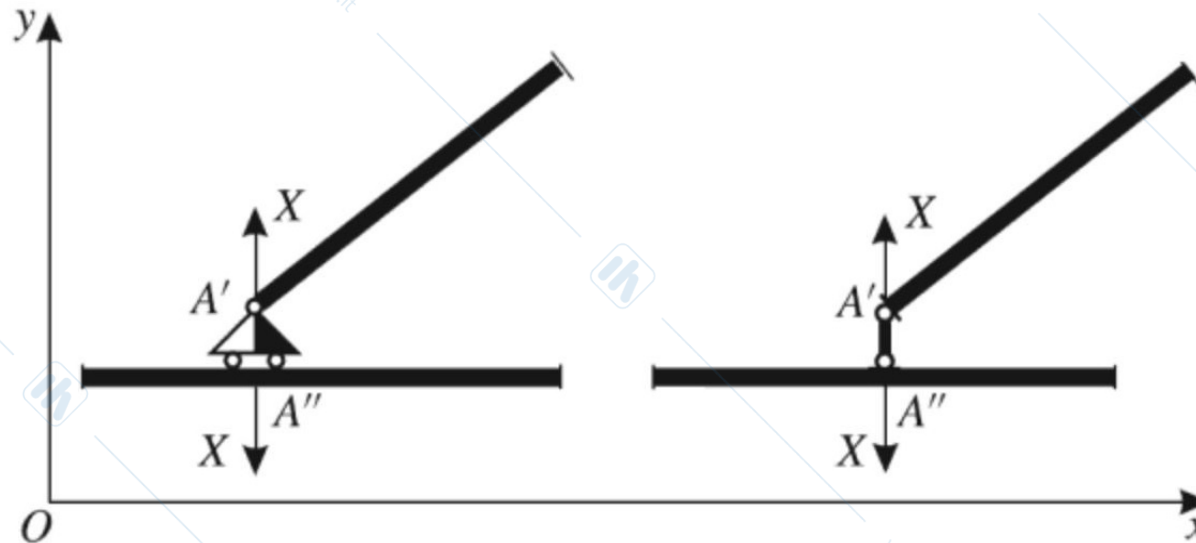
$$S' : \begin{cases} \mathbf{R}'^{(a)} + \mathbf{R}'^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}'_A{}^{(a)} + \mathbf{M}'_A{}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} R'_x{}^{(a)} + R'_x{}^{(v)} = 0, \\ R'_y{}^{(a)} + R'_y{}^{(v)} = 0, \\ M'_{Az}{}^{(a)} + M'_{Az}{}^{(v)} = 0, \end{cases} \equiv \begin{cases} F_1 + \Phi_{Ax} + \Phi'_{Bx} = 0, \\ \Phi_{Ay} + \Phi'_{By} = 0, \\ -LF_1 + L\Phi'_{By} - L\Phi'_{Bx} = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{M}''_C{}^{(a)} = (P_2 - C) \times \mathbf{F}_2 = L\mathbf{j} \times (-F_2\mathbf{j}) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}''_C{}^{(v)} = (B - C) \times \Phi''_B = (-L\mathbf{i} + L\mathbf{j}) \times (-\Phi'_{Bx}\mathbf{i} - \Phi'_{By}\mathbf{j}) = (L\Phi'_{By} + L\Phi'_{Bx})\mathbf{k}$$

$$S'' : \begin{cases} \mathbf{R}''^{(a)} + \mathbf{R}''^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}''_C{}^{(a)} + \mathbf{M}''_C{}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} R''_x{}^{(a)} + R''_x{}^{(v)} = 0, \\ R''_y{}^{(a)} + R''_y{}^{(v)} = 0, \\ M''_{Cz}{}^{(a)} + M''_{Cz}{}^{(v)} = 0, \end{cases} \equiv \begin{cases} \Phi_{Cx} - \Phi'_{Bx} = 0, \\ \Phi_{Cy} - \Phi'_{By} - F_2 = 0, \\ L\Phi'_{By} + L\Phi'_{Bx} = 0, \end{cases}$$

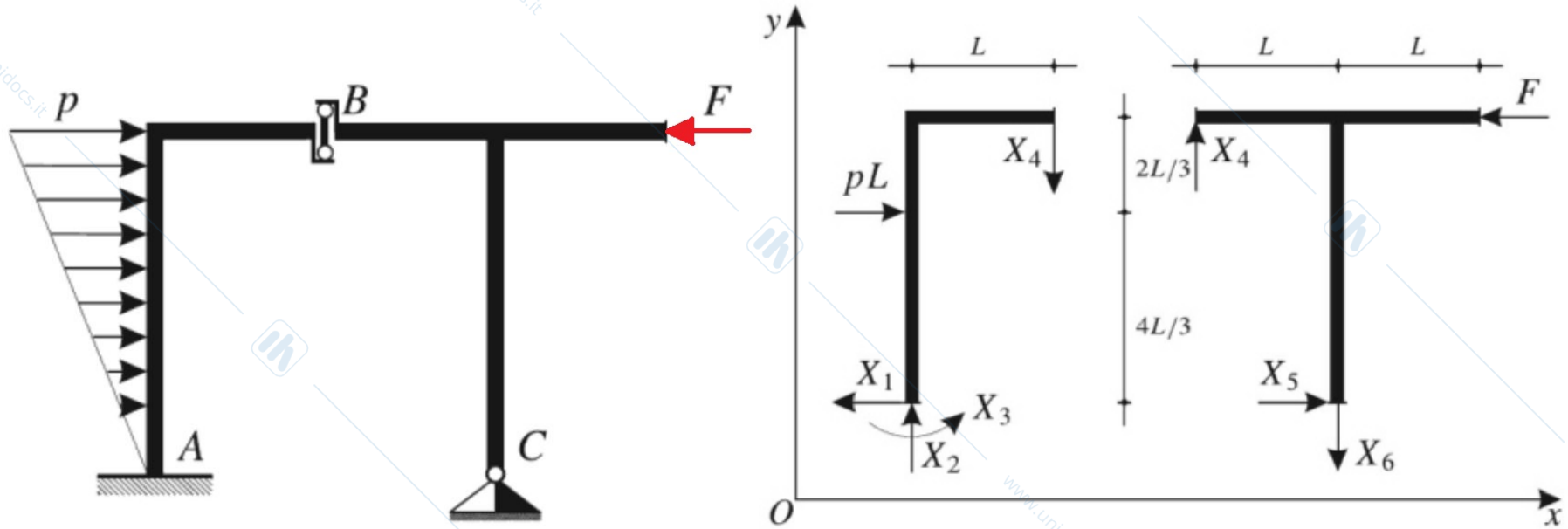
Carrello e pendolo interni $[(dA' - dA'') \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (dA' - dA'') \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r}$ direz. pendolo]



$$(dA' - dA'') \cdot \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} dL^{(v)} &= \Phi'_{Ax} dx'_A + \Phi''_{Ax} dx''_A + \Phi'_{Ay} dy'_A + \Phi''_{Ay} dy''_A + \Gamma'_{Az} d\varphi'_z + \Gamma''_{Az} d\varphi''_z \\ &= \Phi'_{Ax} dx'_A + \Phi''_{Ax} dx''_A + (\Phi'_{Ay} + \Phi''_{Ay}) dy'_A + \Gamma'_{Az} d\varphi'_z + \Gamma''_{Az} d\varphi''_z \end{aligned}$$

$$dL^{(v)} = 0 \quad \forall dx'_A, dy'_A, d\varphi'_z, dx''_A, d\varphi''_z \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'_{Ax} = \Phi''_{Ax} = 0 \\ \Phi'_{Ay} + \Phi''_{Ay} = 0 \\ \Gamma'_{Az} = \Gamma''_{Az} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'_A = \Phi_{Ay} \mathbf{j} & \Gamma'_A = \mathbf{0}, \\ \Phi''_A = -\Phi'_A & \Gamma''_A = \mathbf{0}, \end{cases}$$

Esempio 3. Analisi cinematica e calcolo delle reazioni vincolari con le ECS.



Analisi cinematica

$m = 6, \quad x_A, y_A, \varphi_1, x_C, y_C, \varphi_2$

$A \equiv (x_A, y_A), B \equiv (x_A + L, y_A + 2L), C \equiv (x_A + 2L, y_A)$

equazioni di vincolo

$$dA = \mathbf{0}, d\varphi_1 = \mathbf{0}, \quad (dB' - dB'') \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad dC = \mathbf{0},$$

$$\begin{cases} dA = \mathbf{0}, d\varphi_1 = \mathbf{0} \\ (dB' - dB'') \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0}, \\ dC = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, d\varphi_{1z} = 0 \\ dy_A + d\varphi_{1z}(x_B - x_A) - [dy_C + d\varphi_{1z}(x_B - x_C)] = 0, \\ dx_C = 0, dy_C = 0, \end{cases} \quad s = 6$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{1z} & dx_C & dy_C & d\varphi_{2z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 6 \\ s' = 6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad S \text{ è isostatico}$$

Analisi statica

Il carico triangolare $(P, \mathbf{u}(P) = \frac{p}{2L}y\mathbf{i})$, $P \in \Omega = [0, 2L]$ è equivalente a

$$(P_1, \mathbf{F}_1) : P_1 \equiv \left(x_A, y_A + \frac{4}{3}L\right), \quad \mathbf{F}_1 = pL\mathbf{i}$$

$$(P_2, \mathbf{F}_2) : P_2 \equiv (x_A + 3L, y_A + 2L), \quad \mathbf{F}_2 = -F\mathbf{i}$$

$$\begin{aligned} ((A, \Phi_A), \Gamma_A) : A &\equiv (x_A, y_A), \quad \Phi_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i} + \Phi_{Ay} \mathbf{j}, \Gamma_A = \Gamma_{Az} \mathbf{k} \\ (B, \Phi'_B), (B, \Phi''_B) : B &\equiv (x_A + L, y_A + 2L), \quad \Phi''_{By} = -\Phi'_{By} \\ (C, \Phi_C) : C &\equiv (x_A + 2L, y_A), \quad \Phi_C = \Phi_{Cx} \mathbf{i} + \Phi_{Cy} \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$S' : \begin{cases} \mathbf{R}'^{(a)} + \mathbf{R}'^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}'_A^{(a)} + \mathbf{M}'_A^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad S'' : \begin{cases} \mathbf{R}''^{(a)} + \mathbf{R}''^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}''_C^{(a)} + \mathbf{M}''_C^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$\mathbf{M}'_A^{(a)} = (P_1 - A) \times \mathbf{F}_1 = \frac{4}{3} L \mathbf{j} \times pL \mathbf{i} = -\frac{4}{3} pL^2 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{M}'_A^{(v)} = (B - A) \times \Phi'_B + \Gamma_{Az} \mathbf{k} = (L \mathbf{i} + 2L \mathbf{j}) \times \Phi'_{By} \mathbf{j} = L \Phi'_{By} \mathbf{k} + \Gamma_{Az} \mathbf{k}$$

$$S' : \begin{cases} \mathbf{R}'^{(a)} + \mathbf{R}'^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}'_A^{(a)} + \mathbf{M}'_A^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} R'_x^{(a)} + R'_x^{(v)} = 0, \\ R'_y^{(a)} + R'_y^{(v)} = 0, \\ M'_{Az}^{(a)} + M'_{Az}^{(v)} = 0, \end{cases} \equiv \begin{cases} pL + \Phi_{Ax} = 0, \\ \Phi_{Ay} + \Phi'_{By} = 0, \\ -\frac{4}{3} pL^2 + L \Phi'_{By} + \Gamma_{Az} = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{M}_C^{''(a)} = (P_2 - C) \times \mathbf{F}_2 = (L\mathbf{i} + 2L\mathbf{j}) \times (-F\mathbf{i}) = 2LF\mathbf{k},$$

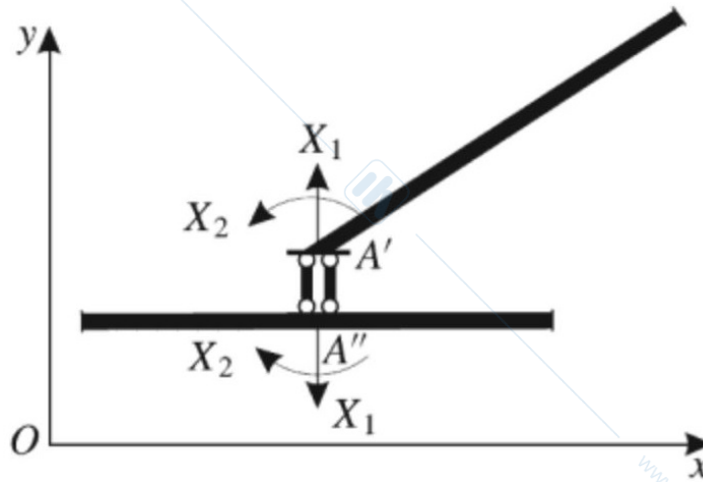
$$\mathbf{M}_C^{''(v)} = (B - C) \times \Phi_B'' = (-L\mathbf{i} + 2L\mathbf{j}) \times (-\Phi'_{By}\mathbf{j}) = L\Phi'_{By}\mathbf{k}$$

$$S'' : \begin{cases} \mathbf{R}^{''(a)} + \mathbf{R}^{''(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_C^{''(a)} + \mathbf{M}_C^{''(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} R_x^{''(a)} + R_x^{''(v)} = 0, \\ R_y^{''(a)} + R_y^{''(v)} = 0, \\ M_{Cz}^{''(a)} + M_{Cz}^{''(v)} = 0, \end{cases} \equiv \begin{cases} -F + \Phi_{Cx} = 0, \\ -\Phi'_{By} + \Phi_{Cy} = 0, \\ 2LF + L\Phi'_{By} = 0. \end{cases}$$

$$\Phi_{Ax} = pL, \Phi_{Ay} = 2F, \Gamma_{Az} = 2LF + \frac{4}{3}pL^2, \Phi'_{By} = -2F, \Phi_{Cx} = F, \Phi_{Cy} = -2F.$$

Doppio pendolo interno

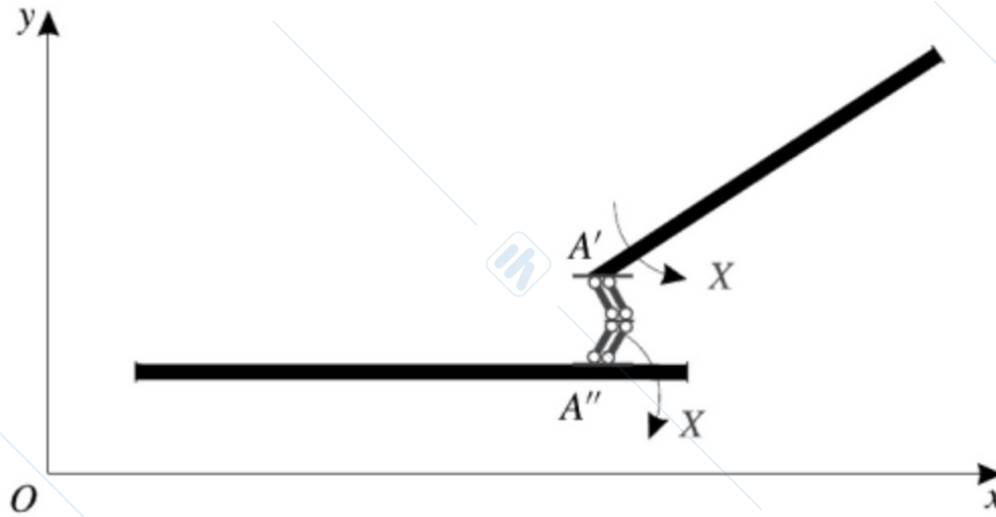
$$\begin{aligned} & [(dA' - dA'') \cdot \mathbf{j} = 0, d\varphi' - d\varphi'' = 0] \\ & [(dA' - dA'') \cdot \mathbf{r} = 0, d\varphi' - d\varphi'' = 0 \quad \mathbf{r} \text{ direzione dei pendoli}] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (dA' - dA'') \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\varphi'_z = d\varphi''_z \\ dL^{(v)} = \Phi'_{Ax} dx'_A + \Phi''_{Ax} dx''_A + \Phi'_{Ay} dy'_A + \Phi''_{Ay} dy''_A + \Gamma'_{Az} d\varphi'_z + \Gamma''_{Az} d\varphi''_z \\ = \Phi'_{Ax} dx'_A + \Phi''_{Ax} dx''_A + (\Phi'_{Ay} + \Phi''_{Ay}) dy'_A + (\Gamma'_{Az} + \Gamma''_{Az}) d\varphi'_z \end{aligned}$$

$$dL^{(v)} = 0 \quad \forall dx'_A, dy'_A, d\varphi'_z, dx''_A \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'_{Ax} = \Phi''_{Ax} = 0 \\ \Phi'_{Ay} + \Phi''_{Ay} = 0 \\ \Gamma'_{Az} + \Gamma''_{Az} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'_A = \Phi_{Ay} \mathbf{j} & \Gamma'_A, \\ \Phi''_A = -\Phi'_A & \Gamma''_A = -\Gamma'_A. \end{cases}$$

Doppio-doppio pendolo interno $[d\varphi' - d\varphi'' = 0]$

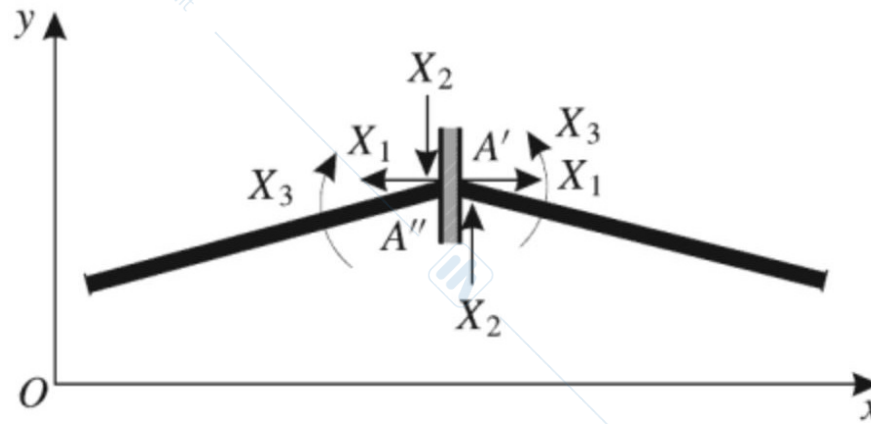


$$d\varphi'_z = d\varphi''_z \Rightarrow dL^{(v)} = \Phi'_{Ax} dx'_A + \Phi''_{Ax} dx''_A + \Phi'_{Ay} dy'_A + \Phi''_{Ay} dy''_A + \Gamma'_{Az} d\varphi'_z + \Gamma''_{Az} d\varphi''_z$$

$$= \Phi'_{Ax} dx'_A + \Phi''_{Ax} dx''_A + \Phi'_{Ay} dy'_A + \Phi''_{Ay} dy''_A + (\Gamma'_{Az} + \Gamma''_{Az}) d\varphi'_z$$

$$dL^{(v)} = 0 \quad \forall dx'_A, dy'_A, d\varphi'_z, dx''_A, dy''_A \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'_{Ax} = \Phi''_{Ax} = 0 \\ \Phi'_{Ay} = \Phi''_{Ay} = 0 \\ \Gamma'_{Az} + \Gamma''_{Az} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'_A = 0 \\ \Phi''_A = 0 \end{cases} \begin{cases} \Gamma'_A, \\ \Gamma''_A = -\Gamma'_A. \end{cases}$$

Incastro interno $[(dA' - dA'') = \mathbf{0}, d\varphi' - d\varphi'' = \mathbf{0}]$



$$\begin{aligned} (dA' - dA'') = \mathbf{0} &\Rightarrow dL^{(v)} = \Phi'_A \cdot dA' + \Gamma'_A \cdot d\varphi' + \Phi''_A \cdot dA'' + \Gamma''_A \cdot d\varphi'' \\ d\varphi' - d\varphi'' = \mathbf{0} &\Rightarrow \phantom{dL^{(v)}} = (\Phi'_A + \Phi''_A) \cdot dA' + (\Gamma'_A + \Gamma''_A) \cdot d\varphi' \end{aligned}$$

$$dL^{(v)} = 0 \quad \forall dA', d\varphi' \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'_A + \Phi''_A = \mathbf{0} \\ \Gamma'_A + \Gamma''_A = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i} + \Phi_{Ay} \mathbf{j} & \Gamma'_A = \Gamma'_{Az} \mathbf{k}, \\ \Phi''_A = -\Phi'_A & \Gamma''_A = -\Gamma'_A, \end{cases}$$

Se l'incastro collega N travi, l'azione del vincolo in A risulta

$$((A_i, \Phi_i), \Gamma_i) : \quad \sum_{i=1}^N \Phi_i = \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \mathbf{0}.$$

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 16 del 12 Novembre 2020

1 Principio dei lavori virtuali: analisi dell'equilibrio e calcolo delle reazioni vincolari

Le equazioni cardinali della statica sono una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un punto materiale o di un corpo rigido.

$$P : \quad \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \quad S : \quad \begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_O^{(a)} + \mathbf{M}_O^{(v)} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1)$$

Per un sistema di N punti materiali e/o di M corpi rigidi una configurazione S_0 è di equilibrio se e solo se valgono le ECS per ciascun punto e/o per ciascun solido

$$\begin{aligned} \{P_1, \dots, P_N\} & : \quad \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N \\ \{S_1, \dots, S_M\} & : \quad \begin{cases} \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

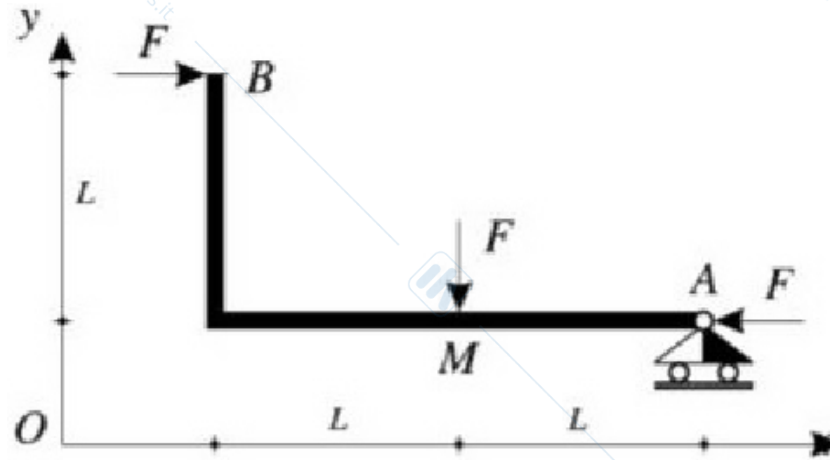
- *Analisi dell'equilibrio: $l = 0$*
- *Calcolo delle reazioni vincolari in condizioni di equilibrio (vincoli lisci o scabri)*

Principio dei lavori virtuali: Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema S a vincoli olonomi lisci e fissi sia in equilibrio in una configurazione S_0 è che per ogni spostamento virtuale δS eseguito a partire da S_0 sia

$$\delta L^{(a)} \leq 0, \quad \forall \delta S \quad \delta L^{(a)} = 0, \quad \forall \delta S \text{ reversibile} \quad (3)$$

- *Analisi dell'equilibrio: $l = 0, l > 0$*
- *Condizioni pure di equilibrio*
- *Calcolo delle reazioni vincolari in condizioni di equilibrio (vincoli lisci)*

Esercizio 1. Analisi dell'equilibrio con il PLV



Analisi cinematica

$$m = 3, \quad x_A, y_A, \varphi, \quad A \equiv (x_A, y_A), B \equiv (x_A - 2L, y_A + L) \quad d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$dy_A = 0, \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 1 \\ s' = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} l = 2 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{2 volte labile}$$

Analisi dell'equilibrio

$$(B, \mathbf{F}_B) : B \equiv (x_A - 2L, y_A + L), \quad \mathbf{F}_B = F\mathbf{i}$$

$$(M, \mathbf{F}_M) : M \equiv (x_A - L, y_A), \quad \mathbf{F}_M = -F\mathbf{j}$$

$$(A, \mathbf{F}_A) : A \equiv (x_A, y_A), \quad \mathbf{F}_A = -F\mathbf{i}$$

$$(A, \Phi_A) : A \equiv (x_A, y_A), \quad \Phi_A = \Phi_A \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} dL^{(a)} &= \mathbf{F}_B \cdot dB + \mathbf{F}_M \cdot dM + \mathbf{F}_A \cdot dA = F dx_B - F dy_M - F dx_A \\ &= F [dx_A - d\varphi (y_B - y_A)] - F [dy_A + d\varphi (x_M - x_A)] - F dx_A \\ &= F [dx_A - Ld\varphi] - F [-Ld\varphi] - F dx_A = 0 \end{aligned}$$

$$dL^{(a)} = 0 \iff S \text{ è in equilibrio in } S_0$$

Il PLV fornisce *condizioni generali di equilibrio* per il sistema in esame

$$\begin{aligned} dL^{(a)} &= \mathbf{R}^{(a)} \cdot d\mathbf{A} + \mathbf{M}_A^{(a)} \cdot d\varphi \implies dL^{(a)} = R_x^{(a)} dx_A + M_{Az}^{(a)} d\varphi_z \\ d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} &= 0 \end{aligned}$$

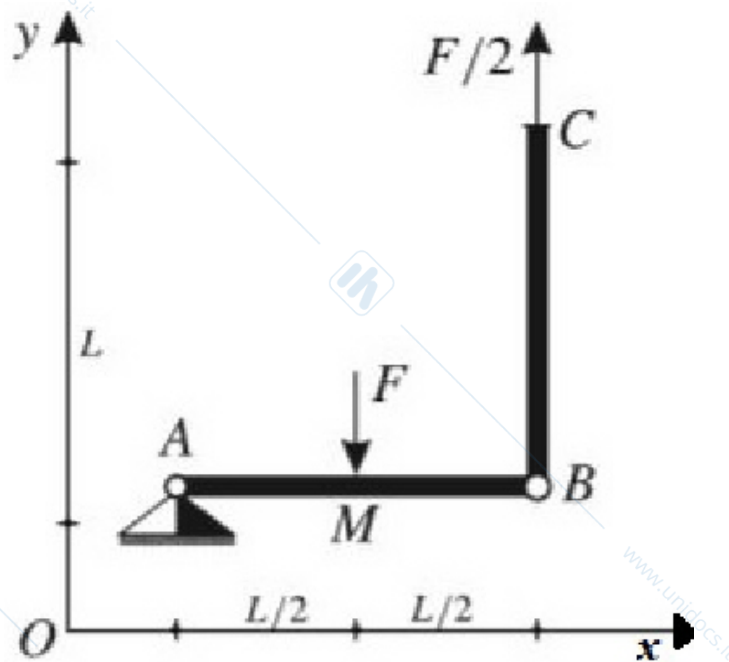
$$dL^{(a)} = R_x^{(a)} dx_A + M_{Az}^{(a)} d\varphi_z = 0 \quad \forall dx_A, d\varphi_z \iff \Sigma^{(a)} : R_x^{(a)} = 0, \quad M_{Az}^{(a)} = 0$$

Calcolo delle reazioni vincolari

La trave è in equilibrio e $i = 0$ allora per le ECS si ha $\Phi_A = F \mathbf{j}$.

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_A^{(a)} + \mathbf{M}_A^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} F - F = 0, & \Phi_A - F = 0, \\ (M - A) \times \mathbf{F}_M + (B - A) \times \mathbf{F}_B = LF \mathbf{k} - LF \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Esercizio 2. Analisi dell'equilibrio con il PLV



Analisi cinematica

$$m = 6, \quad x_A, y_A, \varphi_1, \quad x_B, y_B, \varphi_2 \quad \mathbf{dA} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{dB}' = \mathbf{dB}''$$

$$\begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, \\ dx_A - d\varphi_1 (y_B - y_A) - dx_B'' = 0, \\ dy_A + d\varphi_1 (x_B - x_A) - dy_B'' = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, \\ dx_A - dx_B'' = 0, \\ dy_A + Ld\varphi_1 - dy_B'' = 0, \end{cases} \quad s = 4$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_1 & dx_B & dy_B & d\varphi_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad s' = 4 \quad \begin{matrix} l = 2 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{2 volte labile}$$

Analisi dell'equilibrio

$$(M, \mathbf{F}_M) : M \equiv (x_A - L, y_A), \quad \mathbf{F}_M = -F\mathbf{j}$$

$$(C, \mathbf{F}_C) : C \equiv (x_A + L, y_A + L), \quad \mathbf{F}_C = F/2\mathbf{j}$$

$$(A, \Phi_A) : A \equiv (x_A, y_A), \quad \Phi_A = \Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j},$$

$$(B, \Phi_B) : B \equiv (x_A + L, y_A), \quad \Phi'_B = \Phi'_{Bx}\mathbf{i} + \Phi'_{By}\mathbf{j} \quad \Phi''_B = -\Phi'_B$$

$$\begin{aligned} dL^{(a)} &= \mathbf{F}_M \cdot dM + \mathbf{F}_C \cdot dC = -F dy_M + \frac{F}{2} dy_C \\ &= -F [dy_A + d\varphi_1 (x_M - x_A)] + \frac{F}{2} [dy_B + d\varphi_2 (x_C - x_B)] \\ &= -F \frac{L}{2} d\varphi_1 + \frac{F}{2} L d\varphi_1 = 0 \end{aligned}$$

$$dL^{(a)} = 0 \iff S \text{ è in equilibrio in } S_0$$

Condizioni generali di equilibrio

$$\begin{aligned} \text{trave } AB &: \left(\mathbf{R}_1^{(a)}, \mathbf{M}_{1A}^{(a)} \right), \left(\mathbf{R}_1^{(v)}, \mathbf{M}_{1A}^{(v)} \right), & dx_A = 0, dy_A = 0, \\ \text{trave } BC &: \left(\mathbf{R}_2^{(a)}, \mathbf{M}_{2B}^{(a)} \right), \left(\mathbf{R}_2^{(v)}, \mathbf{M}_{2B}^{(v)} \right), & dx_B = 0, dy_B = Ld\varphi_{1z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dL^{(a)} &= \mathbf{R}_1^{(a)} \cdot dA + \mathbf{M}_{1A}^{(a)} \cdot d\varphi_1 + \mathbf{R}_2^{(a)} \cdot dB + \mathbf{M}_{2B}^{(a)} \cdot d\varphi_2 = M_{1Az}^{(a)} d\varphi_{1z} + R_{2y}^{(a)} dy_B + M_{2Bz}^{(a)} d\varphi_{2z} \\ &= \left(M_{1Az}^{(a)} + LR_{2y}^{(a)} \right) d\varphi_{1z} + M_{2Bz}^{(a)} d\varphi_{2z} \end{aligned}$$

$$dL^{(a)} = 0 \quad \forall d\varphi_{1z}, d\varphi_{2z} \iff \Sigma_1^{(a)}, \Sigma_2^{(a)} : \begin{cases} M_{1Az}^{(a)} + LR_{2y}^{(a)} = 0, \\ M_{2Bz}^{(a)} = 0, \end{cases}$$

Calcolo delle reazioni vincolari

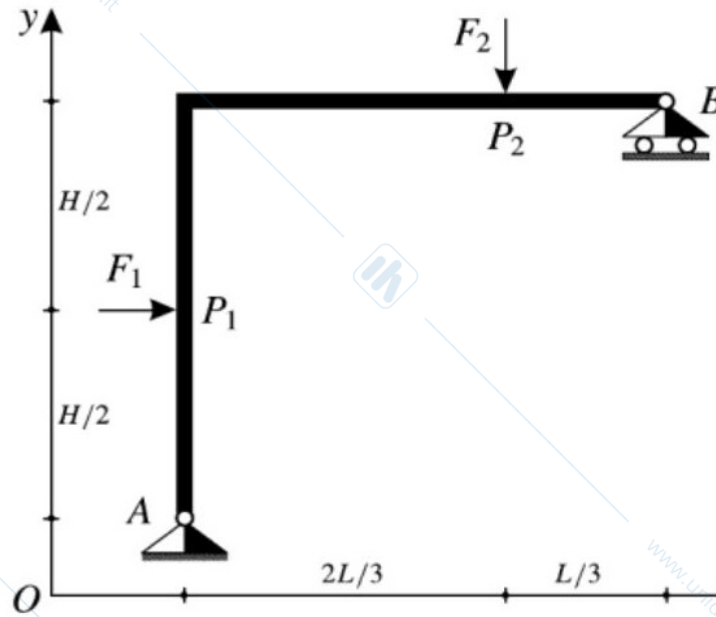
La trave è in equilibrio nella configurazione S_0 ed essendo $i = 0$ il problema è staticamente determinato.

$$\text{ECS trave } AB \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{R}_1^{(a)} + \mathbf{R}_1^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{1A}^{(a)} + \mathbf{M}_{1A}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \implies \begin{cases} \Phi_{Ax} + \Phi'_{Bx} = 0, \\ \Phi_{Ay} - F + \Phi'_{By} = 0, \\ L\Phi'_{By} - F\frac{L}{2} = 0, \end{cases}$$

$$\text{ECS trave } BC \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{R}_2^{(a)} + \mathbf{R}_2^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{2B}^{(a)} + \mathbf{M}_{2B}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \implies \begin{cases} -\Phi'_{Bx} = 0 \\ -\Phi'_{By} + \frac{F}{2} = 0 \\ 0 = 0, \end{cases}$$

$$\Phi_A = \frac{F}{2}\mathbf{j}, \quad \Phi'_B = \frac{F}{2}\mathbf{j}.$$

Esercizio 3. Calcolo delle reazioni vincolari con il PLV



Analisi cinematica

$$m = 3, \quad x_A, y_A, \varphi, \quad A \equiv (x_A, y_A), \quad B \equiv (x_A + L, y_A + H) \quad d\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad d\mathbf{B} \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\begin{cases} dx_A = 0, & dy_A = 0, \\ dy_B = 0, \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & L \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 3 \\ s' = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} l = 0 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{isostatico}$$

$$\Sigma^{(a)} : P_1 \equiv (x_A, y_A + H/2), \mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{i}, \quad P_2 \equiv (x_A + 2/3L, y_A + H), \mathbf{F}_2 = -F_2 \mathbf{j}$$

$$\Sigma^{(v)} : A \equiv (x_A, y_A), \mathbf{\Phi}_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i} + \Phi_{Ay} \mathbf{j}, \quad B \equiv (x_A + L, y_A + H), \mathbf{\Phi}_B = \Phi_{By} \mathbf{j}$$

Calcolo delle reazioni vincolari con le ECS

$$\begin{cases} F_1 + \Phi_{Ax} = 0, \\ -F_2 + \Phi_{Ay} + \Phi_{By} = 0, \\ -H/2F_1 - 2/3LF_2 + L\Phi_{By} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{\Phi}_A = -F_1 \mathbf{i} + (F_2/3 - F_1H/(2L)) \mathbf{i}, \\ \mathbf{\Phi}_B = (F_1H/(2L) + 2/3F_2) \mathbf{j} \end{cases}$$

Calcolo delle reazioni vincolari con il PLV

Calcolo di $\mathbf{\Phi}_B$

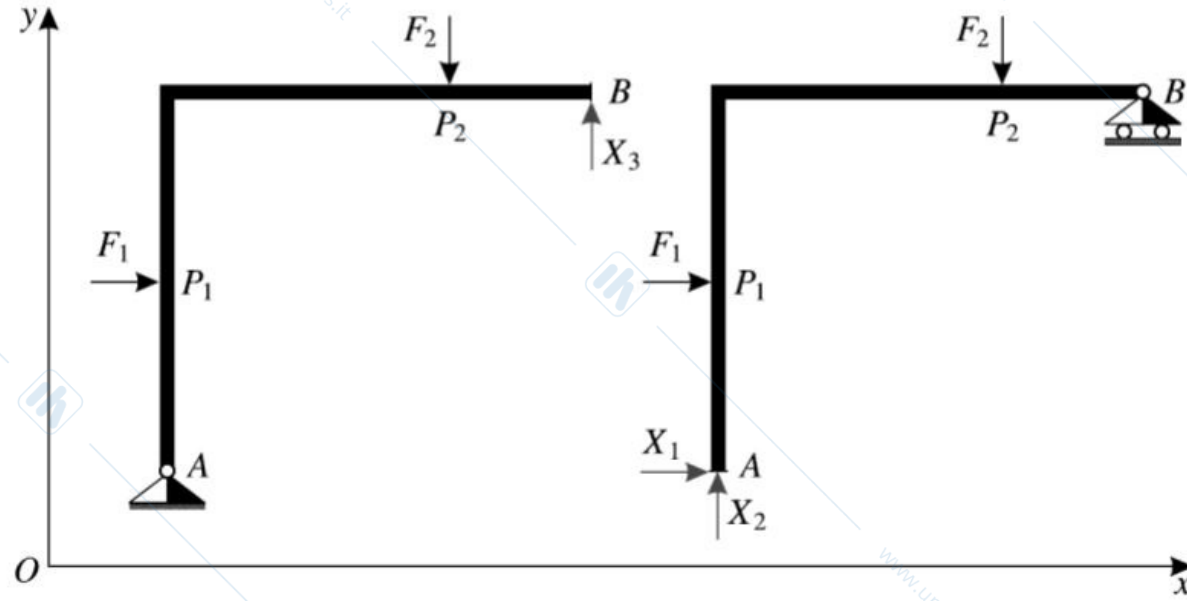
Si sopprime il carrello in B e si consideri il sistema S^* vincolato con una cerniera in A e soggetto alla sollecitazione attiva

$$\Sigma^{(a)*} = \{(P_1, \mathbf{F}_1), (P_2, \mathbf{F}_2), (B, \mathbf{\Phi}_B)\}.$$

Allora si ha $l^* = 1$ ma la configurazione S_0 resta di equilibrio e per il PLV dovrà aversi

$$dL^{*(a)} = 0 \quad \forall dS^*$$

dove dS^* è uno spostamento possibile per S^* ma non per S , cioè tale che $d^*y_B \neq 0$.

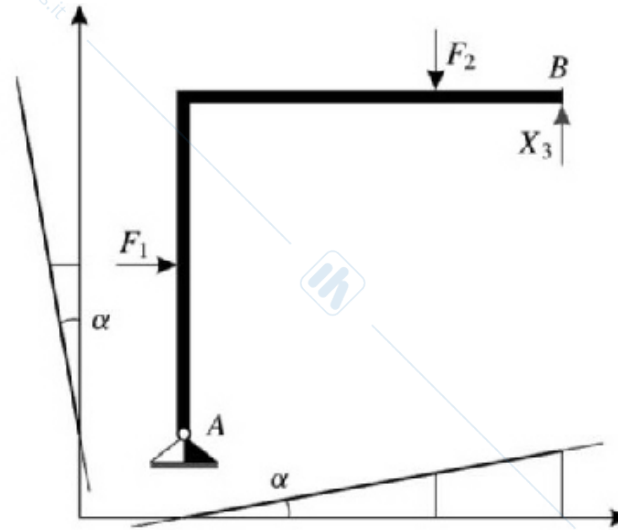


$$S^* : d^* y_B = d^* y_A + L d^* \varphi_z \implies d^* y_B = L d^* \varphi_z \Leftrightarrow d^* \varphi_z = d^* y_B / L$$

$$dL^{*(a)} = \mathbf{R}^{(a)} \cdot d^* A + \mathbf{M}_A^{(a)} \cdot d^* \varphi + \Phi_B \cdot d^* B = M_{Az}^{(a)} d^* \varphi_z + \Phi_B d^* y_B = \left(M_{Az}^{(a)} / L + \Phi_B \right) d^* y_B$$

$$dL^{*(a)} = 0 \quad \forall d^* y_B \iff M_{Az}^{(a)} / L + \Phi_B = 0 \iff \Phi_B = -M_{Az}^{(a)} / L$$

In ogni spostamento dS^* la trave è suscettibile di rotazioni infinitesime attorno ad A



$$d^*P = d^*\varphi \times (P - A) \quad A \equiv \text{centro istantaneo di rotazione}$$

$$\begin{cases} d^*x_P = -(y_P - y_A) d^*\varphi_z, \\ d^*y_P = (x_P - x_A) d^*\varphi_z, \\ \alpha : \tan \alpha = d^*\varphi_z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 : d^*x_1 = -H/2 d^*\varphi_z, & d^*y_1 = 0 \\ P_2 : d^*x_2 = -H d^*\varphi_z, & d^*y_2 = 2/3 L d^*\varphi_z \\ B : d^*x_B = -H d^*\varphi_z, & d^*y_B = L d^*\varphi_z \end{cases}$$

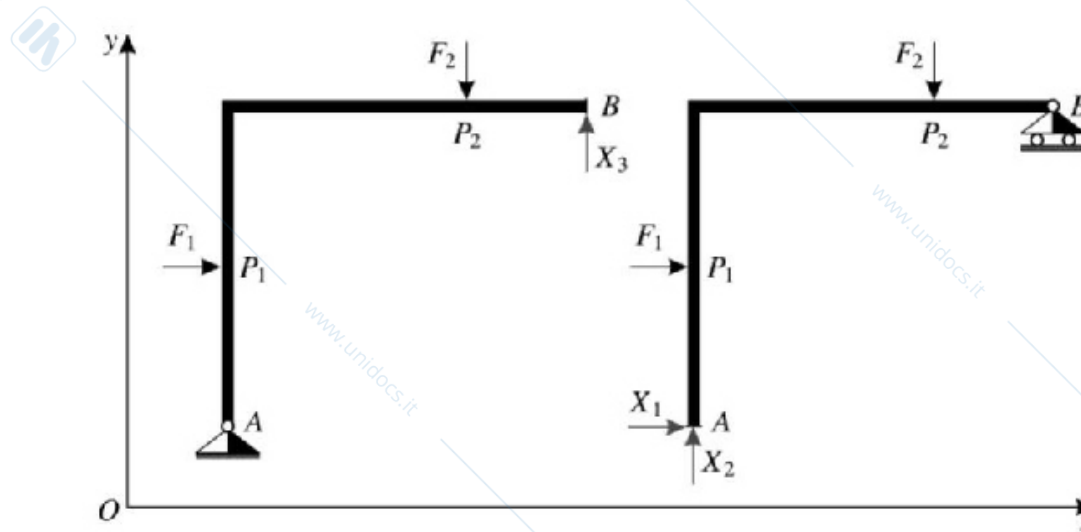
$$dL^{*(a)} = \mathbf{F}_1 \cdot d^*P_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d^*P_2 + \Phi_B \cdot d^*B = 0 \quad \forall dS^*$$

$$dL^{*(a)} = F_1 d^*x_1 - F_2 d^*y_2 + \Phi_{By} d^*y_B = (-H/2F_1 - 2/3LF_2 + L\Phi_{By}) \tan \alpha = 0 \quad \forall \alpha$$

Calcolo di Φ_A

Si sopprime la cerniera in A e si consideri il sistema S^* vincolato con un carrello in B e soggetto alla sollecitazione attiva

$$\Sigma^{(a)*} = \{(P_1, \mathbf{F}_1), (P_2, \mathbf{F}_2), (A, \Phi_A)\}.$$



Allora si ha $l^* = 2$ ma la configurazione S_0 resta di equilibrio e per il PLV dovrà aversi

$$dL^{*(a)} = 0 \quad \forall dS^*$$

dove dS^* è uno spostamento possibile per S^* ma non per S , cioè : $d^*x_A, d^*y_A \neq 0$.

$$S^* : d^*y_B = d^*y_A + Ld^*\varphi_z = 0 \implies d^*\varphi_z = -d^*y_A/L$$

$$\begin{aligned} dL^{*(a)} &= \mathbf{R}^{(a)} \cdot d^*A + \mathbf{M}_A^{(a)} \cdot d^*\varphi + \Phi_A \cdot d^*A \\ &= R_x^{(a)} d^*x_A + R_y^{(a)} d^*y_A + M_{Az}^{(a)} d^*\varphi_z + \Phi_{Ax} d^*x_A + \Phi_{Ay} d^*y_A \\ &= R_x^{(a)} d^*x_A + R_y^{(a)} d^*y_A - M_{Az}^{(a)} d^*y_A/L + \Phi_{Ax} d^*x_A + \Phi_{Ay} d^*y_A \\ &= \left(R_x^{(a)} + \Phi_{Ax} \right) d^*x_A + \left(R_y^{(a)} - M_{Az}^{(a)}/L + \Phi_{Ay} \right) d^*y_A = 0 \quad \forall d^*x_A, d^*y_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dL^{*(a)} = 0, \quad \forall d^*x_A, d^*y_A &\Leftrightarrow \begin{cases} R_x^{(a)} + \Phi_{Ax} = 0 \\ R_y^{(a)} - M_{Az}^{(a)}/L + \Phi_{Ay} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} F_1 + \Phi_{Ax} = 0 \\ -F_2/3 + HF_1/(2L) + \Phi_{Ay} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi_{Ax} = -F_1 \\ \Phi_{Ay} = F_2/3 - HF_1/(2L) \end{cases} \end{aligned}$$

Per determinare la reazione Φ_A con la teoria dei centri utilizzando i diagrammi di spostamento, conviene procedere alla determinazione di Φ_{Ax} e Φ_{Ay} separatamente.

Per determinare Φ_{Ay} si consideri il sistema S^* vincolato con un carrello in A e uno in B

e soggetto alla sollecitazione attiva

$$\Sigma^{(a)*} = \{(P_1, \mathbf{F}_1), (P_2, \mathbf{F}_2), (A, \Phi_A = \Phi_{Ay} \mathbf{j})\}.$$

Allora si ha $l^* = 1$ ma la configurazione S_0 resta di equilibrio e per il PLV dovrà aversi

$$dL^{*(a)} = 0 \quad \forall dS^*$$

dove dS^* è una rotazione attorno a C centro istantaneo di rotazione

$$d^*P = d^*\varphi \times (P - C) \quad C \text{ centro istantaneo di rotazione}$$

$$\begin{cases} d^*x_P = -(y_P - y_C) d^*\varphi_z, \\ d^*y_P = (x_P - x_C) d^*\varphi_z, \\ \alpha : \tan \alpha = d^*\varphi_z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 : d^*x_1 = -H/2 d^*\varphi_z, & d^*y_1 = -L d^*\varphi_z \\ P_2 : d^*x_2 = -H d^*\varphi_z, & d^*y_2 = -L/3 d^*\varphi_z \\ A : d^*x_A = 0, & d^*y_A = -L d^*\varphi_z \\ B : d^*x_B = -H d^*\varphi_z, & d^*y_B = 0 \end{cases}$$

$$dL^{*(a)} = \mathbf{F}_1 \cdot d^*P_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d^*P_2 + \Phi_A \cdot d^*A = F_1 d^*x_1 - F_2 d^*y_2 + \Phi_{Ay} d^*y_A$$

$$dL^{*(a)} = (-H/2 F_1 + L/3 F_2 - L \Phi_{Ay}) d^*\varphi_z = 0 \quad \forall d^*\varphi_z \Rightarrow \Phi_{Ay} = -H / (2L) F_1 + F_2/3$$

Per determinare Φ_{Ax} si consideri il sistema S^* vincolato con un carrello in A e uno in B

e soggetto alla sollecitazione attiva

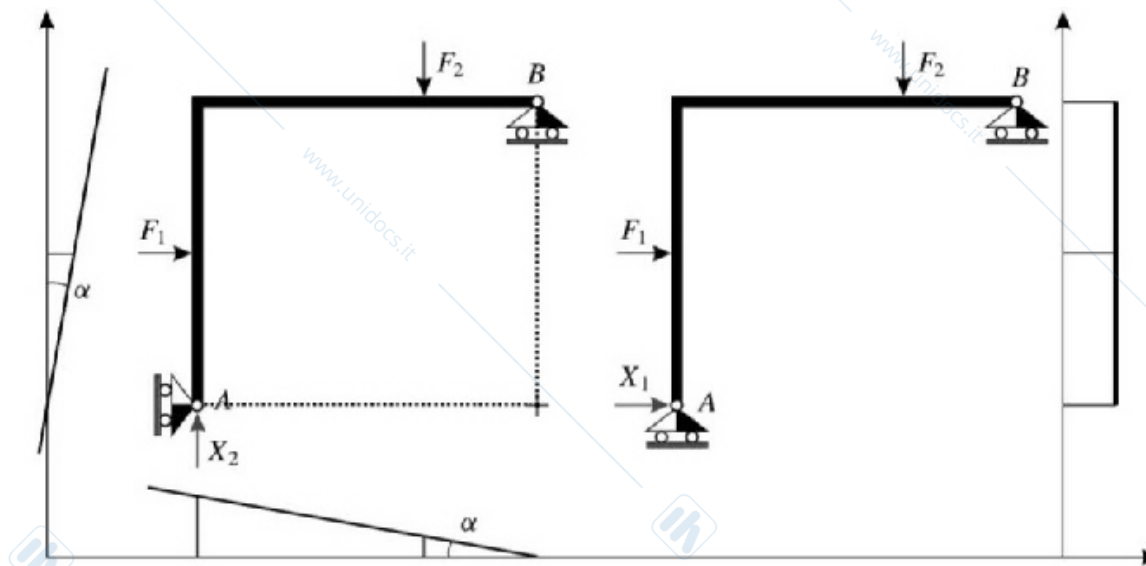
$$\Sigma^{(a)*} = \{(P_1, \mathbf{F}_1), (P_2, \mathbf{F}_2), (A, \Phi_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i})\}.$$

Allora si ha $l^* = 1$ ma la configurazione S_0 resta di equilibrio e per il PLV dovrà aversi

$$dL^{*(a)} = 0 \quad \forall dS^*$$

dove dS^* è una traslazione lungo l'asse x (C improprio nella direzione dell'asse y)

$$d^* x_P = \text{cost}, \quad d^* y_P = 0 \quad \forall P$$



$$\begin{aligned}dL^{*(a)} &= \mathbf{F}_1 \cdot d^* P_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d^* P_2 + \Phi_A \cdot d^* A = F_1 d^* x_1 - F_2 d^* y_2 + \Phi_{Ax} d^* x_A \\ &= F_1 d^* x_1 + \Phi_{Ax} d^* x_A\end{aligned}$$

$$dL^{*(a)} = (F_1 + \Phi_{Ax}) d^* x_A = 0, \quad \forall d^* x_A \Rightarrow \Phi_{Ax} = -F_1$$

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 17 del 17 Novembre 2020

1 Analisi dell'equilibrio e calcolo delle reazioni vincolari: ECS e PLV

Le equazioni cardinali della statica sono una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un punto materiale o di un corpo rigido.

$$P : \quad \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \quad S : \quad \begin{cases} \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_O^{(a)} + \mathbf{M}_O^{(v)} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1)$$

Per un sistema di N punti materiali e/o di M corpi rigidi una configurazione S_0 è di equilibrio se e solo se valgono le ECS per ciascun punto e/o per ciascun solido

$$\begin{aligned} \{P_1, \dots, P_N\} & : \quad \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N \\ \{S_1, \dots, S_M\} & : \quad \begin{cases} \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

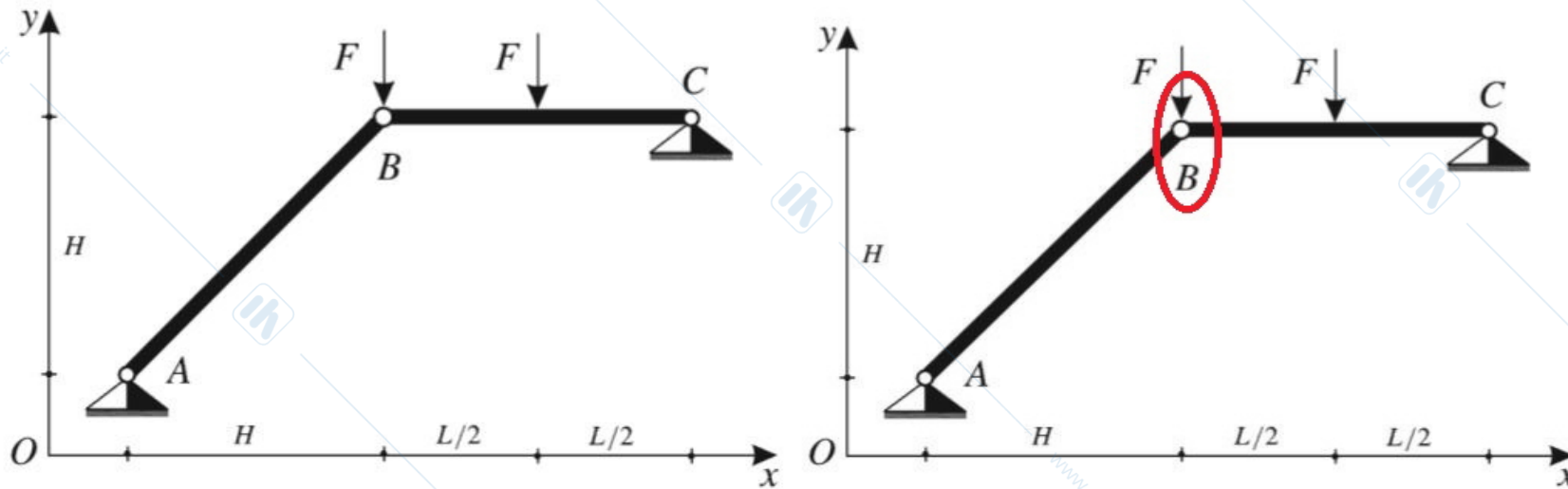
- *Analisi dell'equilibrio: $l = 0$*
- *Calcolo delle reazioni vincolari in condizioni di equilibrio (vincoli lisci o scabri)*

Principio dei lavori virtuali: Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema S a vincoli olonomi lisci e fissi sia in equilibrio in una configurazione S_0 è che per ogni spostamento virtuale δS eseguito a partire da S_0 sia

$$\delta L^{(a)} \leq 0, \quad \forall \delta S \quad \delta L^{(a)} = 0, \quad \forall \delta S \text{ reversibile} \quad (3)$$

- *Analisi dell'equilibrio: $l > 0$*
- *Analisi dell'equilibrio: $l = 0 \longleftrightarrow$ teoria dei centri e diagrammi di spostamento*
- *Condizioni pure di equilibrio*
- *Calcolo delle reazioni vincolari in condizioni di equilibrio (vincoli lisci)*

Esercizio 1. Arco a tre cerniere



Analisi cinematica

$$m = 6 \quad x_A, y_A, \varphi_1, \quad x_C, y_C, \varphi_2$$

$$\text{cerniera in } A : \quad dA = \mathbf{0} \quad (dx_A = 0, dy_A = 0)$$

$$\text{cerniera interna in } B : \quad dB' - dB'' = \mathbf{0} \quad (dx_{B'} - dx_{B''} = 0, dy_{B'} - dy_{B''} = 0)$$

$$\text{cerniera in } C : \quad dC = \mathbf{0} \quad (dx_C = 0, dy_C = 0)$$

$$\begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ [dx_A - d\varphi_1(y_B - y_A)] - [dx_C - d\varphi_2(y_B - y_C)] = 0, \\ [dy_A + d\varphi_1(x_B - x_A)] - [dy_C + d\varphi_2(x_B - x_C)] = 0, \\ dx_C = 0, \\ dy_C = 0. \end{cases} \equiv \begin{cases} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ dx_A - Hd\varphi_1 - dx_C = 0, \\ dy_A + Hd\varphi_1 - dy_C + Ld\varphi_2 = 0, \\ dx_C = 0, \\ dy_C = 0. \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_1 & dx_C & dy_C & d\varphi_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -H & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & H & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} s = 6 & l = 0 \\ s' = 6 & i = 0 \end{matrix} \quad \text{isostatico}$$

Calcolo delle reazioni vincolari con le ECS

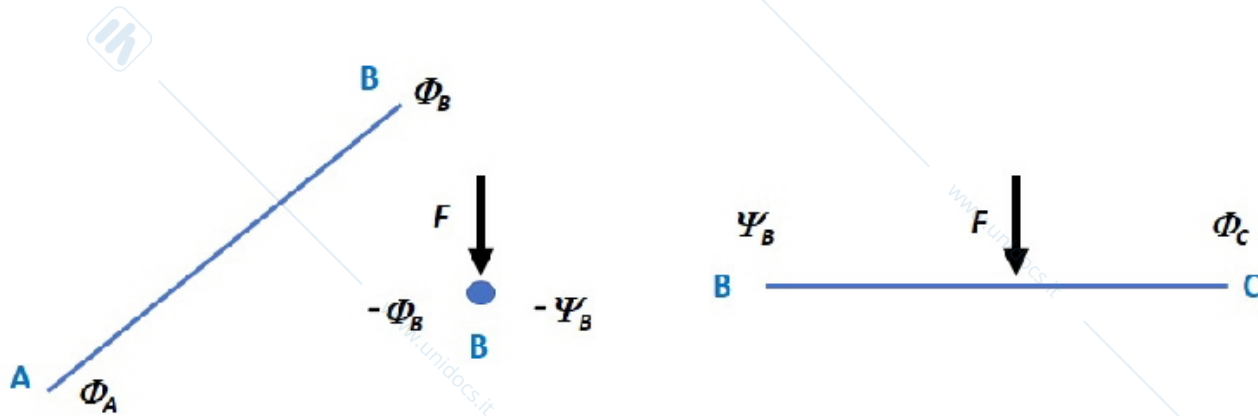
Si osservi che *la cerniera interna è carica*, pertanto conviene scrivere le ECS per le

travi AB e BC e per il punto materiale B

trave $AB \longrightarrow$ cerniera esterna in A : $\Phi_A = \Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j}$,
 cerniera interna in B : $\Phi_B = \Phi_{Bx}\mathbf{i} + \Phi_{By}\mathbf{j}$.

punto materiale $B \longrightarrow -\Phi_B, -\Psi_B$

trave $BC \longrightarrow$ cerniera interna in A : $\Psi_B = \Psi_{Bx}\mathbf{i} + \Psi_{By}\mathbf{j}$,
 cerniera esterna in C : $\Phi_C = \Phi_{Cx}\mathbf{i} + \Phi_{Cy}\mathbf{j}$.



ECS trave $AB \longrightarrow$
$$\begin{cases} \mathbf{R}_1^{(a)} + \mathbf{R}_1^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{1A}^{(a)} + \mathbf{M}_{1A}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} \Phi_{Ax} + \Phi_{Bx} = 0, \\ \Phi_{Ay} + \Phi_{By} = 0, \\ H\Phi_{By} - H\Phi_{Bx} = 0, \end{cases}$$

$$\text{ECS punto materiale } B \longrightarrow \mathbf{R}_1^{(a)} + \mathbf{R}_1^{(v)} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\Phi_{Bx} - \Psi_{Bx} = 0, \\ -\Phi_{By} - \Psi_{By} - F = 0, \end{cases}$$

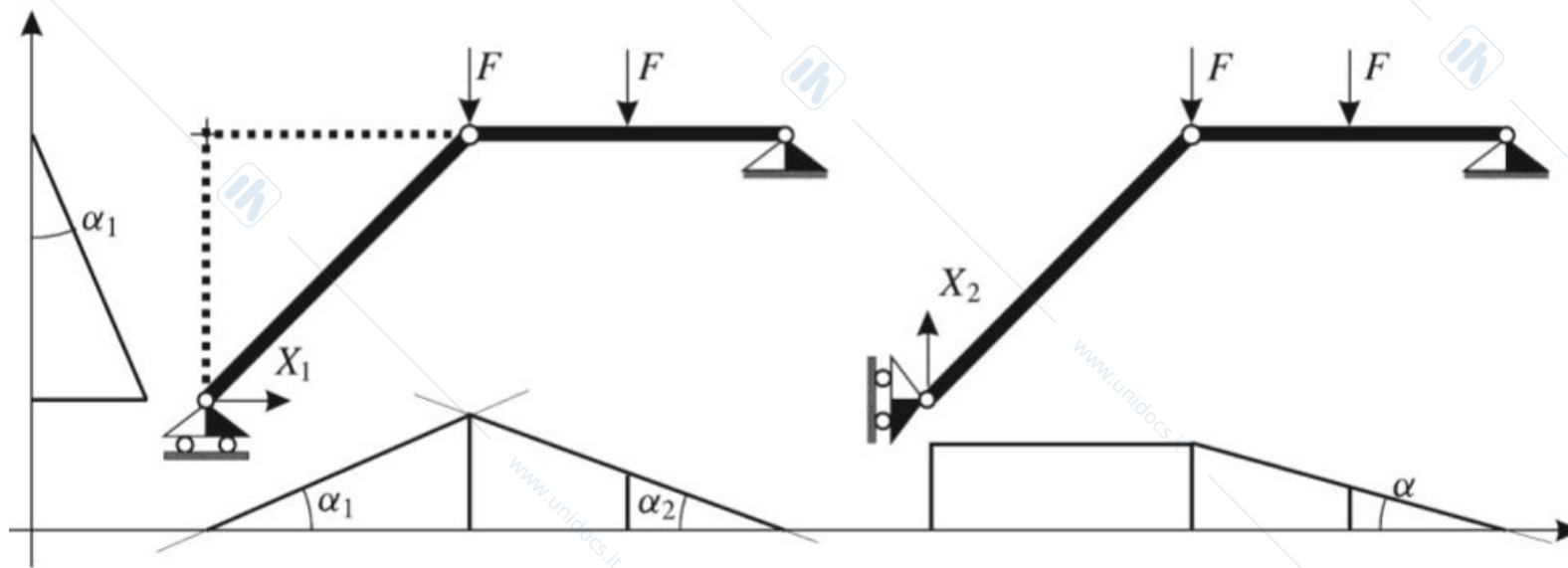
$$\text{ECS trave } BC \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{R}_2^{(a)} + \mathbf{R}_2^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{2C}^{(a)} + \mathbf{M}_{2C}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi_{Cx} + \Psi_{Bx} = 0 \\ \Phi_{Cy} + \Psi_{By} - F = 0 \\ -L\Psi_{By} + L/2F = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Phi_A &= 3/2F\mathbf{i} + 3/2F\mathbf{j}, & \Phi_B &= -3/2F\mathbf{i} - 3/2F\mathbf{j}, \\ \Psi_B &= 3/2F\mathbf{i} + F/2\mathbf{j}, & \Phi_C &= -3/2F\mathbf{i} + F/2\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Determinazione delle reazioni vincolari con il PLV: teoria dei centri e diagrammi di spostamento

Calcolo di Φ_A

Si procede con il determinare separatamente Φ_{Ax} e Φ_{Ay} secondo lo schema in figura



Calcolo di Φ_{Ax}

Si consideri il sistema S^* ottenuto sopprimendo la cerniera in A e sostituendola con un carrello con direzione di scorrimento parallela all'asse delle x e con la reazione vincolare $\Phi_A = \Phi_{Ax} \mathbf{i}$.

Allora il sistema S^* (una volta labile) è soggetto alla sollecitazione attiva

$$\Sigma^* = \{ (A, \Phi_{Ax} \mathbf{i}), (B, -F \mathbf{j}), (\bar{P}, -F \mathbf{j}) \}$$

Per il PLV si ha

$$d^* L^{(a)} = \Phi_{Ax} \mathbf{i} \cdot d^* A - F \mathbf{j} \cdot d^* B - F \mathbf{j} \cdot d^* \bar{P} = \Phi_{Ax} d^* x_A - F d^* y_B - F d^* y_{\bar{P}} = 0, \quad \forall d^* S^*$$

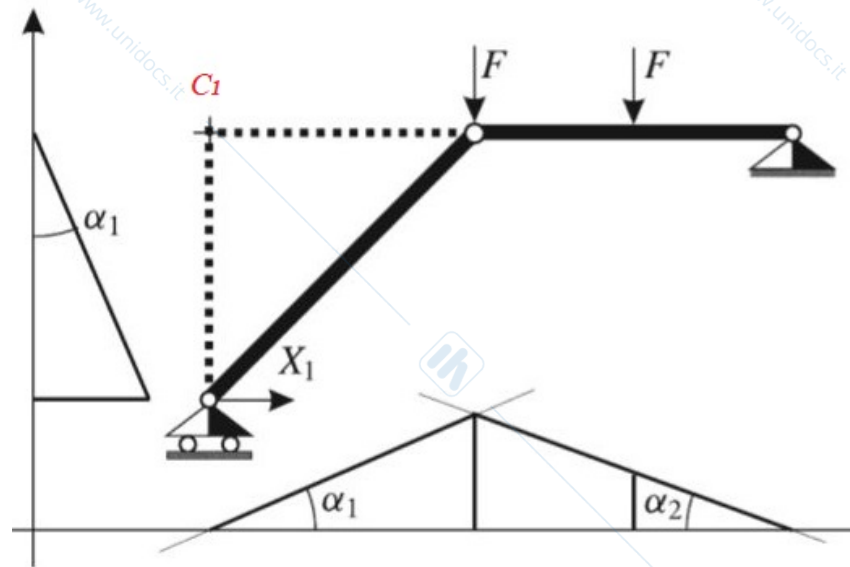
dove $d^* S^*$ è uno spostamento rigido infinitesimo per cui $d^* x_A \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{trave } AB : \quad & \begin{cases} d^* x_P = d^* x_A - d^* \varphi_1 (y_P - y_A) \\ d^* y_P = d^* y_A + d^* \varphi_1 (x_P - x_A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^* x_B = d^* x_A - H d^* \varphi_1 = 0 \\ d^* y_B = H d^* \varphi_1 \end{cases} \\ & \Rightarrow d^* x_A = H d^* \varphi_1 \end{aligned}$$

$$\text{trave } BC : \quad \begin{cases} d^* x_P = -d^* \varphi_2 (y_P - y_C) \\ d^* y_P = d^* \varphi_2 (x_P - x_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^* y_{\bar{P}} = -L/2 d^* \varphi_2 \\ d^* y_B = -L d^* \varphi_2 \equiv H d^* \varphi_1 \end{cases}$$

$$d^* x_A = H d^* \varphi_1, \quad d^* y_B = H d^* \varphi_1, \quad d^* y_{\bar{P}} = -L/2 d^* \varphi_2 = H/2 d^* \varphi_1$$

$$d^* L^{(a)} = (\Phi_{Ax} H - F H - F H/2) d^* \varphi_1 = 0, \quad \forall d^* \varphi_1 \implies \Phi_{Ax} = 3F/2.$$



Il sistema nella configurazione S^* ammette i seguenti centri di istantanea rotazione

$$C_1, \quad C_{12} = B, \quad C_2 = C$$

Il diagramma di spostamento riportato lungo l'asse x è ottenuto ricordando che

$$d^*y_A = 0, \quad d^*y_B = -Ld^*\varphi_2 \equiv Hd^*\varphi_1, \quad d^*y_C = 0,$$

laddove quello riferito all'asse y si ricava facilmente dalle relazioni seguenti

$$d^*x_A = Hd^*\varphi_1, \quad d^*x_{C_1} = d^*x_B = d^*x_C = 0.$$

Calcolo di Φ_{Ay}

Si consideri il sistema S^* ottenuto sopprimendo la cerniera in A e sostituendola con un carrello con direzione di scorrimento parallela all'asse delle y e con la reazione vincolare $\Phi_A = \Phi_{Ay}\mathbf{j}$.

Allora il sistema S^* (una volta labile) è soggetto alla sollecitazione attiva

$$\Sigma^* = \{(A, \Phi_{Ay}\mathbf{j}), (B, -F\mathbf{j}), (\bar{P}, -F\mathbf{j})\}$$

Per il PLV si ha

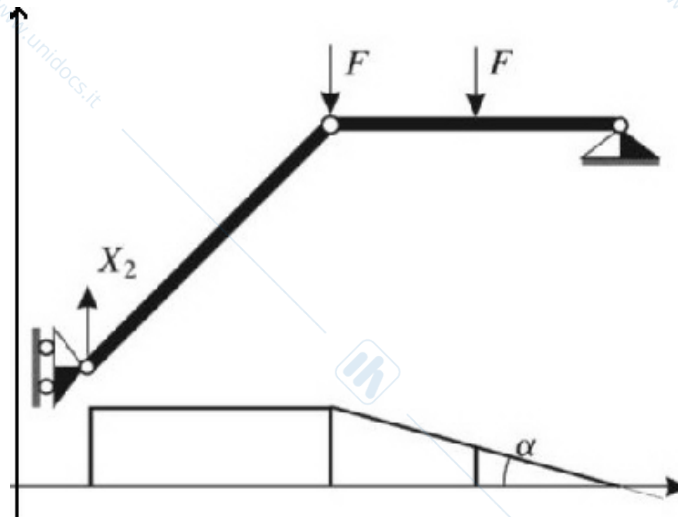
$$d^*L^{(a)} = \Phi_{Ay}\mathbf{j} \cdot d^*A - F\mathbf{j} \cdot d^*B - F\mathbf{j} \cdot d^*\bar{P} = \Phi_{Ay}d^*y_A - Fd^*y_B - Fd^*y_{\bar{P}} = 0, \quad \forall d^*S^*$$

dove d^*S^* è uno spostamento rigido infinitesimo per cui $d^*y_A \neq 0$.

$$\begin{cases} d^*x_P = d^*x_A - d^*\varphi_1 (y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*y_A + d^*\varphi_1 (x_P - x_A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_B = -Hd^*\varphi_1 = 0 \\ d^*y_B = d^*y_A + Hd^*\varphi_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*\varphi_1 = 0 \\ d^*y_B = d^*y_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_2 (y_P - y_C) \\ d^*y_P = d^*\varphi_2 (x_P - x_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*y_{\bar{P}} = -L/2d^*\varphi_2 \\ d^*y_B = -Ld^*\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*y_{\bar{P}} = -L/2d^*\varphi_2 \\ d^*y_A = -Ld^*\varphi_2 \end{cases}$$

$$d^*L^{(a)} = (-\Phi_{Ay}L + FL + FL/2)d^*\varphi_2 = 0, \quad \forall d^*\varphi_2 \Rightarrow \Phi_{Ay} = 3F/2.$$



Il sistema nella configurazione S^* ammette i seguenti centri di istantanea rotazione

$$C_1, \quad C_{12} = B, \quad C_2 = C$$

dove C_1 è improprio parallelo all'asse x .

Il diagramma di spostamento riportato lungo l'asse x è ottenuto ricordando che

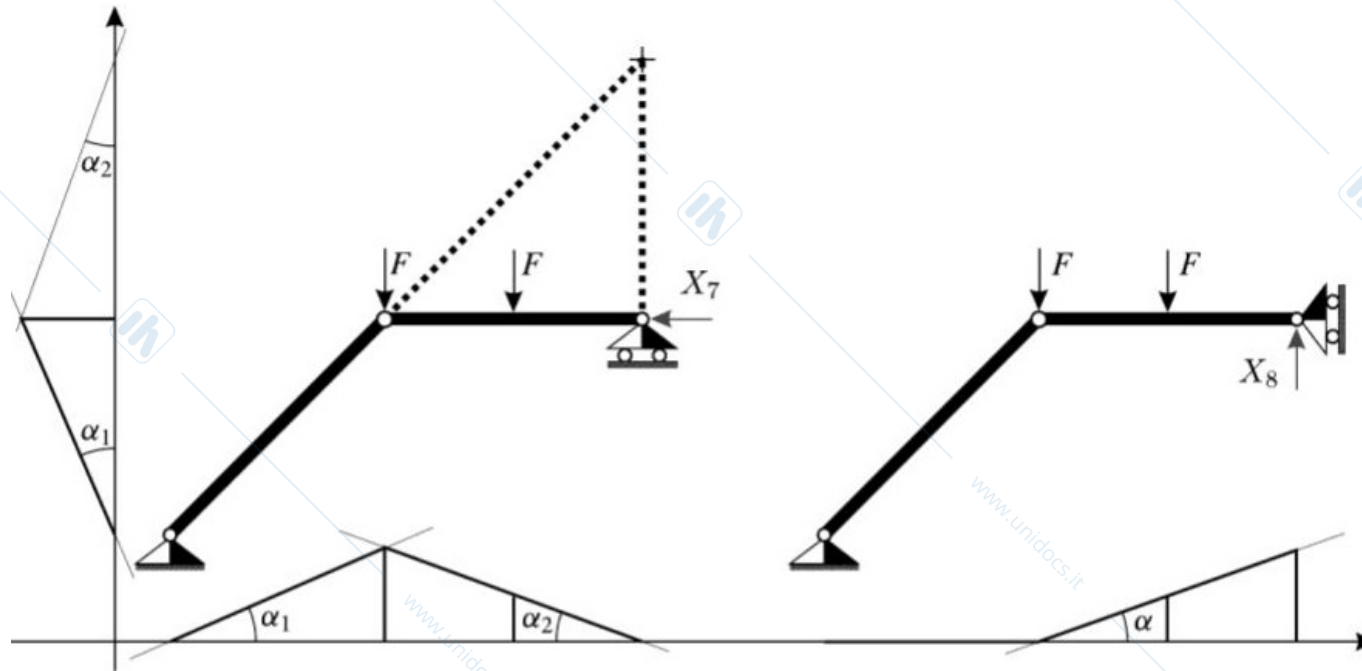
$$d^*y_A = d^*y_B = -Ld^*\varphi_2, \quad d^*y_{\bar{P}} = -L/2d^*\varphi_2$$

laddove è nullo quello riferito all'asse y dato che

$$d^*x_A = d^*x_B = d^*x_C = 0.$$

Calcolo di Φ_C

Si procede con il determinare separatamente Φ_{Cx} e Φ_{Cy} secondo lo schema in figura



Calcolo di Φ_{Cx}

Si consideri il sistema S^* ottenuto sopprimendo la cerniera in C e sostituendola con un carrello con direzione di scorrimento parallela all'asse delle x e con la reazione vincolare $\Phi_C = \Phi_{Cx} \mathbf{i}$.

Allora il sistema S^* (una volta labile) è soggetto alla sollecitazione attiva

$$\Sigma^* = \{(B, -F\mathbf{j}), (\bar{P}, -F\mathbf{j}), (C, \Phi_{Cx}\mathbf{i})\}$$

$$d^*L^{(a)} = -F\mathbf{j} \cdot d^*B - F\mathbf{j} \cdot d^*\bar{P} + \Phi_{Cx}\mathbf{i} \cdot d^*C = -Fd^*y_B - Fd^*y_{\bar{P}} + \Phi_{Cx}d^*x_C = 0, \quad \forall d^*S^*$$

dove d^*S^* è uno spostamento rigido infinitesimo per cui $d^*x_C \neq 0$.

$$\text{trave } AB \longrightarrow \begin{cases} d^*x_P = d^*x_A - d^*\varphi_1(y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*y_A + d^*\varphi_1(x_P - x_A) \end{cases} \implies \begin{cases} d^*x_B = -Hd^*\varphi_1, \\ d^*y_B = Hd^*\varphi_1, \end{cases}$$

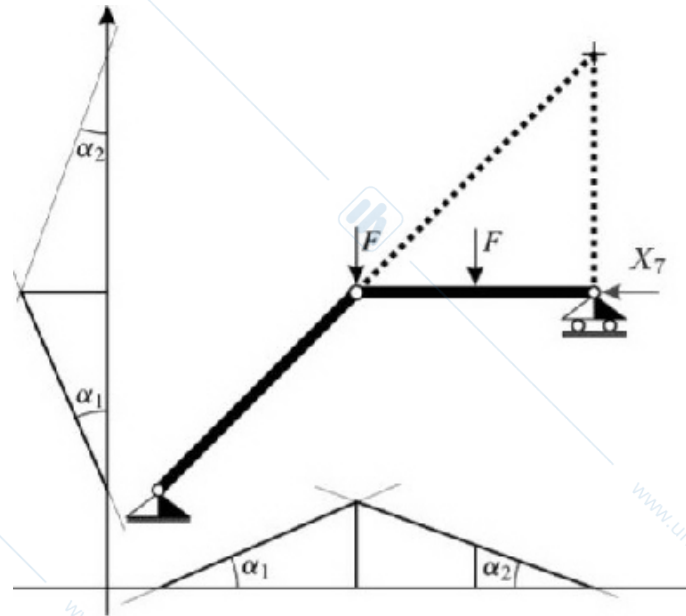
$$\text{trave } BC \longrightarrow \begin{cases} d^*x_P = d^*x_C - d^*\varphi_2(y_P - y_C) \\ d^*y_P = d^*\varphi_2(x_P - x_C) \end{cases} \implies \begin{cases} d^*x_B = d^*x_C, \\ d^*y_{\bar{P}} = -L/2d^*\varphi_2, \\ d^*y_B = -Ld^*\varphi_2 \equiv Hd^*\varphi_1, \end{cases}$$

$$d^*L^{(a)} = (FL + FL/2 + \Phi_{Cx}L)d^*\varphi_2 = 0, \quad \forall d^*\varphi_2 \implies \Phi_{Cx} = -3F/2.$$

Il sistema nella configurazione S^* ammette i seguenti centri di istantanea rotazione

$$C_1 = A, \quad C_{12} = B, \quad C_2$$

dove C_2 è dato dall'intersezione della retta congiungente AB con la parallela all'asse y passante per C .



Il diagramma di spostamento riportato lungo l'asse x è ottenuto ricordando che

$$d^*y_A = 0, \quad d^*y_B = Hd^*\varphi_1 \equiv -Ld^*\varphi_2 \equiv, \quad d^*y_P = -L/2d^*\varphi_2, \quad d^*y_C = 0$$

laddove quello riferito all'asse y si ricava facilmente dalle relazioni seguenti

$$d^*x_A = 0, \quad d^*x_B = d^*x_C = -Hd^*\varphi_1 \equiv Ld^*\varphi_2, \quad d^*x_{C_2} = 0.$$

Calcolo di Φ_{Cy}

Si consideri il sistema S^* ottenuto sopprimendo la cerniera in C e sostituendola con un carrello con direzione di scorrimento parallela all'asse delle y e con la reazione vincolare $\Phi_C = \Phi_{Cy}\mathbf{j}$.

Allora il sistema S^* (una volta labile) è soggetto alla sollecitazione attiva

$$\Sigma^* = \{(B, -F\mathbf{j}), (\bar{P}, -F\mathbf{j}), (C, \Phi_{Cy}\mathbf{j})\}$$

$$d^*L^{(a)} = -F\mathbf{j} \cdot d^*B - F\mathbf{j} \cdot d^*\bar{P} + \Phi_{Cy}\mathbf{j} \cdot d^*C = -Fd^*y_B - Fd^*y_{\bar{P}} + \Phi_{Cy}d^*y_C = 0, \quad \forall d^*S^*$$

dove d^*S^* è uno spostamento rigido infinitesimo per cui $d^*y_C \neq 0$.

$$\text{trave } AB : \begin{cases} d^*x_P = d^*x_A - d^*\varphi_1 (y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*y_A + d^*\varphi_1 (x_P - x_A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_B = -Hd^*\varphi_1 \\ d^*y_B = Hd^*\varphi_1 \end{cases}$$

$$\text{trave } BC : \begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_2 (y_P - y_C) \\ d^*y_P = d^*y_C + d^*\varphi_2 (x_P - x_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_B = 0 \\ d^*y_{\bar{P}} = d^*y_C - L/2d^*\varphi_2, \\ d^*y_B = d^*y_C - Ld^*\varphi_2 \end{cases}$$

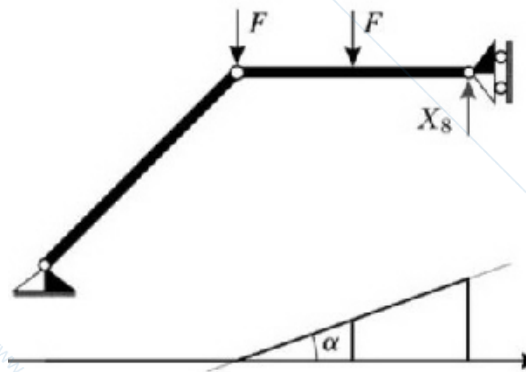
$$d^*\varphi_1 = 0, \quad d^*y_B = 0, \quad d^*y_C = Ld^*\varphi_2, \quad d^*y_{\bar{P}} = L/2d^*\varphi_2$$

$$d^* L^{(a)} = (-FL/2 + \Phi_{C_y} L) d^* \varphi_2 = 0, \quad \forall d^* \varphi_2 \implies \Phi_{C_y} = F/2.$$

Il sistema nella configurazione S^* ammette i seguenti centri di istantanea rotazione

$$C_1 = A, \quad C_{12} = B, \quad C_2$$

dove C_2 è improprio parallelo all'asse x .



Il diagramma di spostamento riportato lungo l'asse x è ottenuto ricordando che

$$d^* y_B = 0, \quad d^* y_{\bar{P}} = L/2 d^* \varphi_2, \quad d^* y_C = L d^* \varphi_2,$$

laddove è nullo quello riferito all'asse y dato che

$$d^* x_A = 0, \quad d^* \varphi_1 = 0, \quad d^* x_B = d^* x_C = 0.$$

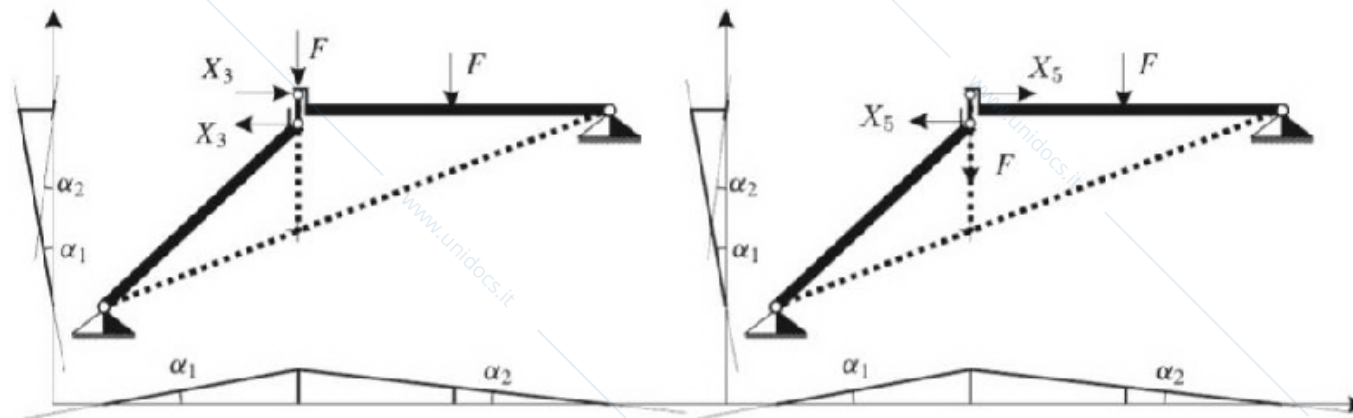
Determinazione delle reazioni per la cerniera interna in B

Essendo la cerniera interna in B carica, si indichino con Φ_B e Ψ_B le reazioni esercitate sulle travi AB e BC rispettivamente. Osservando che B è in equilibrio e che la sollecitazione attiva agente su B ha la direzione dell'asse y si ha

$$\Phi_{Bx}, \quad \Psi_{Bx} = -\Phi_{Bx},$$

laddove non sussiste la stessa relazione per le componenti lungo l'asse y .

Pertanto, si procede con il determinare separatamente Φ_{Bx} e poi Φ_{By}, Ψ_{By} .



Calcolo di Φ_{Bx} e $\Psi_{Bx} = -\Phi_{Bx}$

Si consideri il sistema S^* ottenuto sopprimendo la cerniera interna in B e sostituendola

con un pendolo interno con direzione parallela all'asse delle y ($d^*y_{B'} = d^*y_{B''}$) e con la reazione vincolare Φ_{Bx} ($\Psi_{Bx} = -\Phi_{Bx}$)

$$\Sigma^* = \{(B, -F\mathbf{j}), (\bar{P}, -F\mathbf{j}), (B', \Phi_{Bx}\mathbf{i}), (B'', -\Phi_{Bx}\mathbf{i})\}$$

$$\begin{aligned} d^*L^{(a)} &= -F\mathbf{j} \cdot d^*B - F\mathbf{j} \cdot d^*\bar{P} + \Phi_{Bx}\mathbf{i} \cdot d^*B' - \Phi_{Bx}\mathbf{i} \cdot d^*B'' \\ &= -Fd^*y_B - Fd^*y_{\bar{P}} + \Phi_{Bx}d^*x_{B'} - \Phi_{Bx}d^*x_{B''} = 0, \quad \forall d^*S^* \end{aligned}$$

dove d^*S^* è uno spostamento rigido infinitesimo per cui $d^*x_{B'} - d^*x_{B''} \neq 0$.

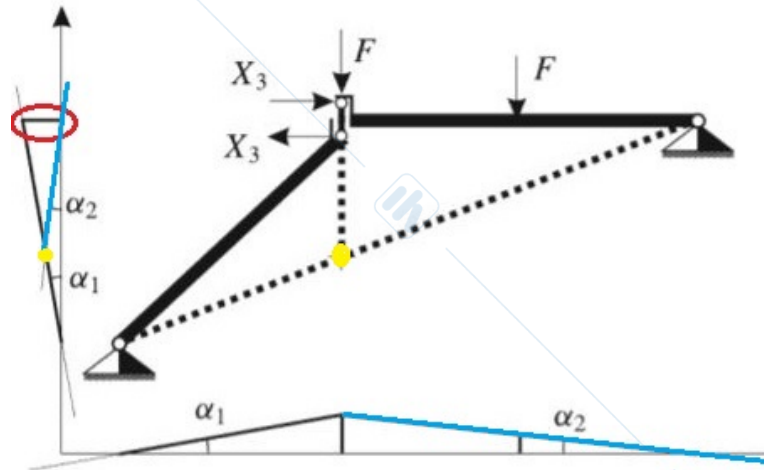
$$\text{trave } AB : \begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_1 (y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*\varphi_1 (x_P - x_A) \end{cases} \implies \begin{cases} d^*x_{B'} = -Hd^*\varphi_1, \\ d^*y_{B'} = Hd^*\varphi_1, \end{cases}$$

$$\text{trave } BC : \begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_2 (y_P - y_C) \\ d^*y_P = d^*\varphi_2 (x_P - x_C) \end{cases} \implies \begin{cases} d^*x_{B''} = 0, \\ d^*y_{\bar{P}} = -L/2d^*\varphi_2, \\ d^*y_{B''} = -Ld^*\varphi_2 \equiv Hd^*\varphi_1, \end{cases}$$

$$d^*L^{(a)} = (FL + FL/2 + \Phi_{Bx}L) d^*\varphi_2 = 0, \quad \forall d^*\varphi_2 \implies \Phi_{Bx} = -\Psi_{Bx} = -3F/2.$$

*Si osservi che essendo $d^*y_{B'} = d^*y_{B''}$, nel computo del lavoro elementare per la forza*

attiva $(B, -F\mathbf{j})$ non è necessario specificare se tale azione insiste nel punto B come appartenente alla trave AB o alla trave BC .



Il sistema nella configurazione S^* ammette i seguenti centri di istantanea rotazione

$$C_1 = A, \quad C_{12}, \quad C_2 = C$$

dove C_{12} è dato dall'intersezione della retta per A e C con la parallela all'asse y passante per B .

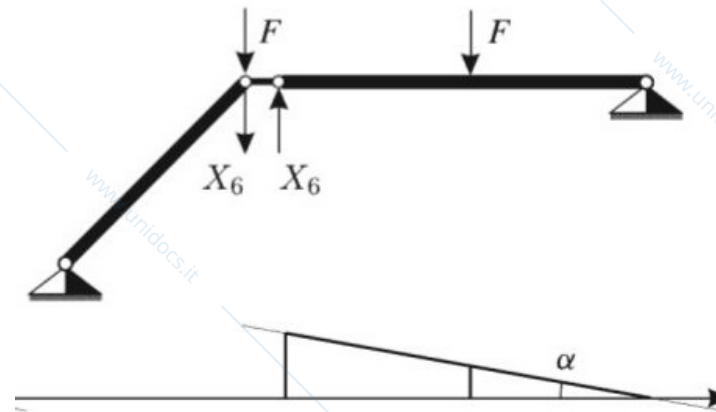
Si osservi che in figura le rette in celeste si riferiscono al diagramma di spostamento della trave BC , ed è inoltre evidenziato lo spostamento non nullo $d^*x_{B'} = -Hd^*\varphi_1$.

I diagrammi di spostamento sono ottenuti ricordando che

$$\begin{aligned} \text{asse } x : d^*y_A &= 0, & d^*y_B &= -Ld^*\varphi_2 \equiv Hd^*\varphi_1, & d^*y_C &= 0, \\ \text{asse } y : d^*x_A &= 0, & d^*x_{B'} &= -Hd^*\varphi_1 & d^*x_{B''} &= 0, & d^*x_C &= 0. \end{aligned}$$

Calcolo di Φ_{By} e Ψ_{By}

Si consideri il sistema S^* ottenuto sopprimendo la cerniera interna in B e sostituendola con un pendolo interno con direzione parallela all'asse delle x ($d^*x_{B'} = d^*x_{B''}$) e con le reazioni vincolari Φ_{By} e Ψ_{By} .



Si cominci col considerare il caso in cui la sollecitazione $(B, -F\mathbf{j})$ insista sulla trave

AB . Allora il sistema S^* è soggetto alla sollecitazione attiva

$$\Sigma^* = \{(B', -F\mathbf{j}), (\bar{P}, -F\mathbf{j}), (B', -\Psi_{By}\mathbf{j}), (B'', \Psi_{By}\mathbf{j})\}$$

$$\begin{aligned} d^*L^{(a)} &= -F\mathbf{j} \cdot d^*B' - F\mathbf{j} \cdot d^*\bar{P} - \Psi_{By}\mathbf{j} \cdot d^*B' + \Psi_{By}\mathbf{j} \cdot d^*B'' \\ &= -Fd^*y_{B'} - Fd^*y_{\bar{P}} - \Psi_{By}d^*y_{B'} + \Psi_{By}d^*y_{B''} = 0, \quad \forall d^*S^* \end{aligned}$$

dove d^*S^* è uno spostamento rigido infinitesimo per cui $d^*y_{B'} - d^*y_{B''} \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{trave } AB : \begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_1 (y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*\varphi_1 (x_P - x_A) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} d^*x_{B'} = -Hd^*\varphi_1, \\ d^*y_{B'} = Hd^*\varphi_1, \end{cases} \\ \text{trave } BC : \begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_2 (y_P - y_C) \\ d^*y_P = d^*\varphi_2 (x_P - x_C) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} d^*x_{B''} = 0, \\ d^*y_{\bar{P}} = -L/2d^*\varphi_2, \\ d^*y_{B''} = -Ld^*\varphi_2, \end{cases} \end{aligned}$$

da cui, essendo $d^*x_{B'} = d^*x_{B''}$, si ricava $d^*\varphi_1 = 0$ e quindi

$$d^*x_{B'} = d^*x_{B''} = 0, \quad d^*y_{B'} = 0, \quad d^*y_{\bar{P}} = -L/2d^*\varphi_2, \quad d^*y_{B''} = -Ld^*\varphi_2,$$

$$d^*L^{(a)} = (FL/2 - \Psi_{By}L) d^*\varphi_2 = 0, \quad \forall d^*\varphi_2 \implies \Psi_{By} = F/2.$$

Il sistema nella configurazione S^* ammette i seguenti centri di istantanea rotazione

$$C_1 = A, \quad C_{12}, \quad C_2 = C$$

dove C_{12} è improprio nella direzione parallela all'asse x .

Il diagramma di spostamento riportato lungo l'asse x è ottenuto ricordando che

$$d^*y_A = 0, \quad d^*y_{B''} = -Ld^*\varphi_2, \quad d^*y_{\bar{P}} = -L/2d^*\varphi_2, \quad d^*y_C = 0$$

laddove è nullo quello riferito all'asse y essendo

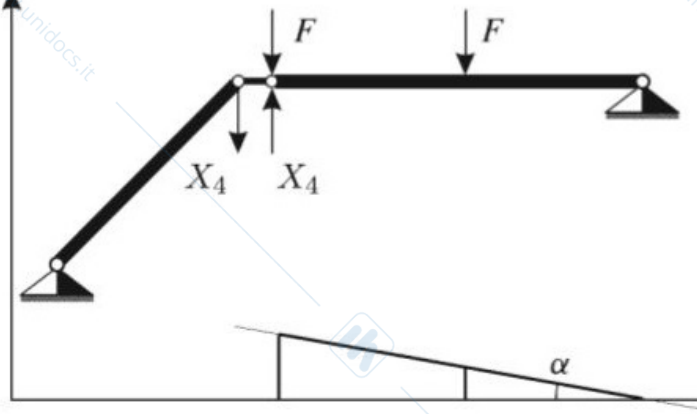
$$d^*x_A = 0, \quad d^*x_{B'} = d^*x_{B''} = 0, \quad d^*x_C = 0.$$

Si consideri il sistema S^* ottenuto sopprimendo la cerniera interna in B e sostituendola con un pendolo interno con direzione parallela all'asse delle x ($d^*x_{B'} = d^*x_{B''}$) e con le reazioni vincolari Φ_{By} e Ψ_{By} .

Si consideri il caso in cui la sollecitazione $(B, -F\mathbf{j})$ insista sulla trave BC .

Allora il sistema S^* è soggetto alla sollecitazione attiva

$$\Sigma^* = \{(B'', -F\mathbf{j}), (\bar{P}, -F\mathbf{j}), (B', \Phi_{By}\mathbf{j}), (B'', -\Phi_{By}\mathbf{j})\}.$$



Per il PLV si ha

$$d^*L^{(a)} = -F\mathbf{j} \cdot d^*B'' - F\mathbf{j} \cdot d^*\bar{P} + \Phi_{By}\mathbf{j} \cdot d^*B' - \Phi_{By}\mathbf{j} \cdot d^*B'' = 0, \quad \forall d^*S^* \text{ virtuale per } S^*$$

In particolare, si ha

$$d^*L^{(a)} = -Fd^*y_{B''} - Fd^*y_{\bar{P}} + \Phi_{By}d^*y_{B'} - \Phi_{By}d^*y_{B''} = 0, \quad \forall d^*S^*,$$

dove d^*S^* è uno spostamento rigido infinitesimo per cui $d^*y_{B'} - d^*y_{B''} \neq 0$.

Ricordando che

$$\text{trave } AB \longrightarrow \begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_1 (y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*\varphi_1 (x_P - x_A) \end{cases} \implies \begin{cases} d^*x_{B'} = -Hd^*\varphi_1, \\ d^*y_{B'} = Hd^*\varphi_1, \end{cases}$$

$$\text{trave } BC \longrightarrow \begin{cases} d^* x_P = -d^* \varphi_2 (y_P - y_C) \\ d^* y_P = d^* \varphi_2 (x_P - x_C) \end{cases} \implies \begin{cases} d^* x_{B''} = 0, \\ d^* y_{\bar{P}} = -L/2 d^* \varphi_2, \\ d^* y_{B''} = -L d^* \varphi_2, \end{cases}$$

da cui, essendo $d^* x_{B'} = d^* x_{B''}$, si ricava $d^* \varphi_1 = 0$ e inoltre

$$d^* x_{B'} = d^* x_{B''} = 0, \quad d^* y_{B'} = 0, \quad d^* y_{\bar{P}} = -L/2 d^* \varphi_2, \quad d^* y_{B''} = -L d^* \varphi_2,$$

e quindi

$$d^* L^{(a)} = (FL + FL/2 + \Phi_{By}L) d^* \varphi_2 = 0, \quad \forall d^* \varphi_2 \implies \Phi_{By} = -3F/2.$$

Il diagramma di spostamento è esattamente lo stesso del caso precedente.

Meccanica Razionale

A. Marasco

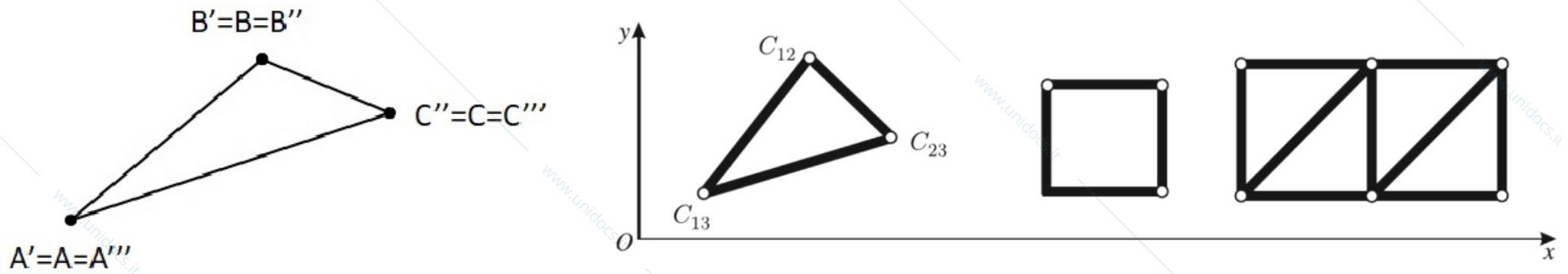
Lezione N. 18 del 19 Novembre 2020

1 Metodo dei nodi

Il **metodo dei nodi** consente il calcolo degli sforzi interni nelle aste di un sistema reticolare in equilibrio.

Una **maglia triangolare** è un sistema costituito da tre travi collegati, in generale, da cerniere interne.

Una maglia triangolare è un *sistema rigido* in quanto i tre centri relativi (C_{13}, C_{12}, C_{23}), coincidendo con le tre cerniere, sono non allineati.



Analisi cinematica

Coordinate normali: $m = 9$ $x_A, y_A, \varphi_1, \quad x_B, y_B, \varphi_2, \quad x_C, y_C, \varphi_3.$

Equazioni di vincolo: $dA' - dA''' = 0 \quad dB' - dB'' = 0 \quad dC'' - dC''' = 0$

$$\begin{cases} dx_A - [dx_C - d\varphi_3 (y_A - y_C)] = 0, \\ dy_A - [dy_C + d\varphi_3 (x_A - x_C)] = 0, \\ [dx_A - d\varphi_1 (y_B - y_A)] - dx_B = 0, \\ [dy_A + d\varphi_1 (x_B - x_A)] - dy_B = 0, \\ [dx_B - d\varphi_2 (y_C - y_B)] - dx_C = 0, \\ [dy_B + d\varphi_2 (x_C - x_B)] - dy_C = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} s = 6 & l = m - s' = 3 \\ s' = 6 & i = s - s' = 0 \end{matrix} \quad \mathbf{3 \text{ volte labile}}$$

I centri relativi non sono allineati, allora *non sono possibili spostamenti relativi tra le aste.*

La **labilità interna** l^{int} è *indice dei possibili spostamenti relativi tra i corpi costituenti il sistema*, indipendentemente dalla presenza di vincoli esterni.

Sistema meccanico piano costituito da N travi collegate mediante vincoli interni

$$l^{int} = l - 3 \tag{1}$$

$$l^{int} = 0 \equiv \text{ sistema rigido } \iff l = 3.$$

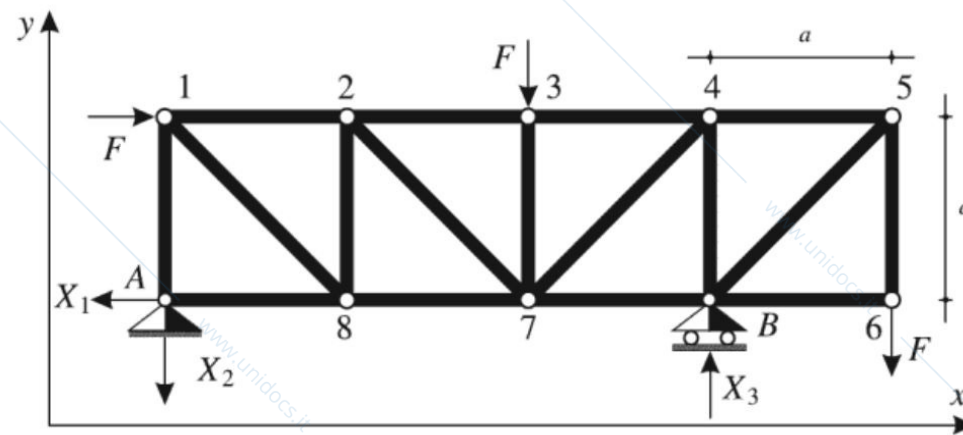
Se $l^{int} = 0$ la struttura è **internamente isostatica**, se $l^{int} > 0$ definisce una struttura **internamente iperstatica**.

Le strutture ottenute a partire dall'unione di maglie triangolari sono sistemi internamente isostatici.

Inoltre, per la (1) si ha che l'aggiunta di tre vincoli esterni semplici rendono il sistema *globalmente isostatico*.

Strutture reticolari in equilibrio

La travatura reticolare in figura è in equilibrio poichè soggetta a 3 vincoli esterni semplici



Si consideri la trave T_{ij} avente come punti estremi i e j e si indichino con

\mathbf{R}_{ij} la reazione che la trave T_{ij} esplica sul nodo i

\mathbf{R}_{ji} la reazione che la trave T_{ij} esplica sul nodo j

allora, per il *principio di azione e reazione* si ha

- \mathbf{R}_{ij} la reazione che il nodo i esplica sulla trave T_{ij}
- \mathbf{R}_{ji} la reazione che il nodo j esplica sulla trave T_{ij}

Si esaminano separatamente i seguenti casi

- *La trave T_{ij} è scarica*

Per le ECS si ha

$$\mathbf{R}_{ij} + \mathbf{R}_{ji} = \mathbf{0},$$

e posto \mathbf{u}_{hk} il versore della direzione orientata $h \mapsto k$ si ha

$$\mathbf{R}_{ij} = R_{ij}\mathbf{u}_{ij}, \quad \mathbf{R}_{ji} = -R_{ij}\mathbf{u}_{ij} = R_{ji}\mathbf{u}_{ji},$$

con $R_{ij} = R_{ji}$ **sforzo normale**.

- *La trave T_{ij} è carica*

In questo caso le ECS forniscono il legame esistente tra \mathbf{R}_{ij} e \mathbf{R}_{ji} .

1.1 Metodo dei nodi

Supposto che la struttura reticolare sia in equilibrio, allora è in equilibrio ogni sua parte. Si consideri il nodo i e siano

- \mathbf{F}_i risultante della sollecitazione attiva agente sul nodo i
- \mathbf{R}_i risultante delle reazioni vincolari esterne agenti sul nodo i
- \mathbf{R}_{ih} reazione che la trave T_{ih} esplica sul nodo i , $h = 1, \dots, M$

dove con M si è indicato il numero delle travi concorrenti nel nodo i .

Allora, le ECS per il nodo i si scrivono

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i + \sum_{h=1}^M \mathbf{R}_{ih} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} F_{ix} + R_{ix} + \sum_{h=1}^M R_{ihx} = 0, \\ F_{iy} + R_{iy} + \sum_{h=1}^M R_{ihy} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Se si suppongono *note* le reazioni vincolari esterne \mathbf{R}_i , il sistema (2) fornisce 2 equazioni per le $2M$ incognite R_{ihx} , R_{ihy} , $h = 1, \dots, M$.

Se alcune delle M travi concorrenti nel nodo i sono scariche le corrispondenti incognite

\mathbf{R}_{ik} assumono la forma

$$\mathbf{R}_{ik} = R_{ik} \mathbf{u}_{ik},$$

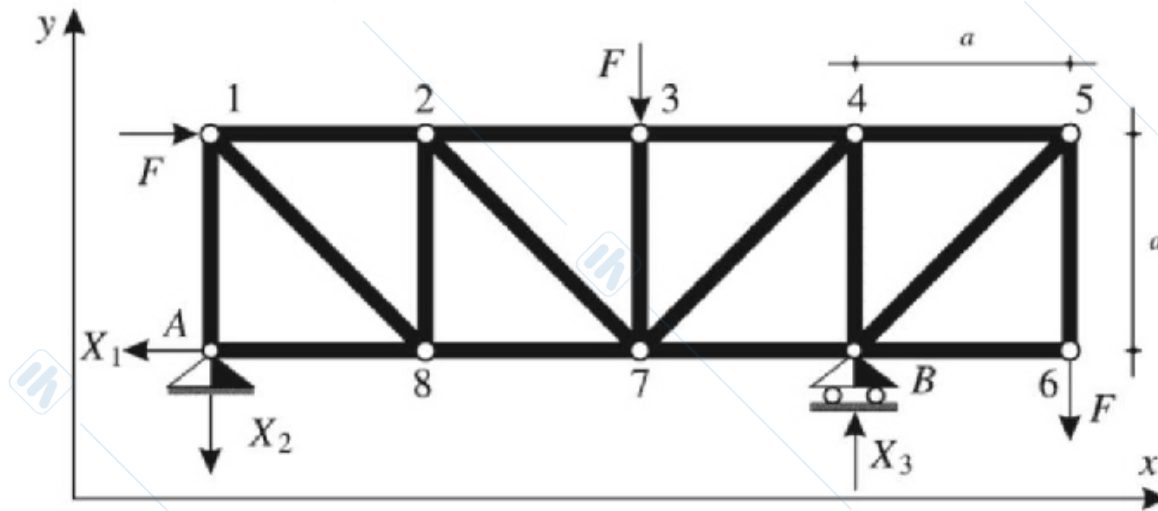
con \mathbf{u}_{ik} noto dalla geometria della struttura.

In particolare, le (2) forniscono univocamente le reazioni \mathbf{R}_{ih} nel caso in cui i sia un **nodo semplice** cioè se in esso convergono solo due aste.

Il **metodo dei nodi**, consiste nel determinare tutte le reazioni \mathbf{R}_{ih} a partire da un nodo semplice i e procedendo in sequenza all'individuazione delle \mathbf{R}_{jh} per ciascun nodo j utilizzando i risultati ottenuti nei passi precedenti.

Si illustrerà tale metodo a partire dalla sua applicazione ad una travatura reticolare in equilibrio.

Esempio 1: Travatura reticolare in equilibrio



Sollecitazioni attive: $(P_1, F\mathbf{i}), (P_3, -F\mathbf{j}), (P_6, -F\mathbf{j})$

Reazioni vincolari esterne: cerniera in A : $(A, \Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j})$, carrello in B : $(B, \Phi_{By}\mathbf{j})$

Equazione dei momenti

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A^{(a)} + \mathbf{M}_A^{(v)} &= (P_1 - A) \times F\mathbf{i} - (P_3 - A) \times F\mathbf{j} - (P_6 - A) \times F\mathbf{j} + (B - A) \times \Phi_{By}\mathbf{j} \\ &= a\mathbf{j} \times F\mathbf{i} - (2a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times F\mathbf{j} - 4a\mathbf{i} \times F\mathbf{j} + 3a\mathbf{i} \times \Phi_{By}\mathbf{j} \\ &= [-aF - 2aF - 4aF + 3a\Phi_{By}] \mathbf{k} = [-7aF + 3a\Phi_{By}] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Le ECS per l'intera travatura reticolare forniscono le reazioni vincolari esterne

$$\begin{cases} F + \Phi_{Ax} = 0, \\ -F - F + \Phi_{Ay} + \Phi_{By} = 0, \\ -7aF + 3a\Phi_{By} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \Phi_{Ax} = -F, \\ \Phi_{Ay} = -F/3, \\ \Phi_{By} = 7/3F. \end{cases}$$

NODO A

Il nodo semplice A è in equilibrio, inoltre si ha

$$\mathbf{R}_A = \Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j},$$

$$\mathbf{R}_{A8} = N_{A8}\mathbf{u}_{A8} = N_{A8}\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_{A1} = N_{A1}\mathbf{u}_{A1} = N_{A1}\mathbf{j},$$

e le ECS consentono di determinare \mathbf{R}_{A8} e \mathbf{R}_{A1}

$$\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{A8} + \mathbf{R}_{A1} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \Phi_{Ax} + N_{A8} = 0, \\ \Phi_{Ay} + N_{A1} = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} -F + N_{A8} = 0, \\ -F/3 + N_{A1} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} N_{A8} = F, \\ N_{A1} = F/3, \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{A8} = F\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_{A1} = F/3\mathbf{j}.$$

NODO 1

Avendo determinato \mathbf{R}_{A1} , il nodo 1 può considerarsi semplice e le ECS consentono di determinare \mathbf{R}_{12} e \mathbf{R}_{18} .

Osservando che

$$\mathbf{F}_1 = F\mathbf{i},$$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{R}_{1A} = -\mathbf{R}_{A1} = -F/3\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_{12} = N_{12}\mathbf{u}_{12} = N_{12}\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_{18} = N_{18}\mathbf{u}_{18} = N_{18}(\sqrt{2}/2\mathbf{i} - \sqrt{2}/2\mathbf{j}),$$

si ha

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_{1A} + \mathbf{R}_{12} + \mathbf{R}_{18} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} F + N_{12} + \sqrt{2}/2N_{18} = 0, \\ -F/3 - \sqrt{2}/2N_{18} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} N_{12} = -2/3F, \\ N_{18} = -\sqrt{2}/3F, \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{12} = -2/3F\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_{18} = -F/3\mathbf{i} + F/3\mathbf{j}.$$

NODO 8

Avendo determinato \mathbf{R}_{A8} e \mathbf{R}_{18} , il nodo 8 può considerarsi semplice e le ECS consentono di determinare \mathbf{R}_{82} e \mathbf{R}_{87} .

Osservando che

$$\mathbf{F}_8 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{R}_8 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{R}_{8A} = -F\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_{81} = F/3\mathbf{i} - F/3\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_{82} = N_{82}\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_{87} = N_{87}\mathbf{i},$$

si ha

$$\mathbf{F}_8 + \mathbf{R}_8 + \mathbf{R}_{8A} + \mathbf{R}_{81} + \mathbf{R}_{82} + \mathbf{R}_{87} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} -F + F/3 + N_{87} = 0, \\ -F/3 + N_{82} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} N_{87} = 2/3F, \\ N_{82} = F/3, \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{82} = F/3\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_{87} = 2/3F\mathbf{i}.$$

NODO 2

Avendo determinato \mathbf{R}_{12} e \mathbf{R}_{82} , il nodo 1 può considerarsi semplice e le ECS consentono di determinare \mathbf{R}_{23} e \mathbf{R}_{27} .

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{R}_{21} = 2/3F\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_{28} = -F/3\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_{23} = N_{23}\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_{27} = N_{27}(\sqrt{2}/2\mathbf{i} - \sqrt{2}/2\mathbf{j}),$$

$$\begin{cases} 2/3F + N_{23} + N_{27}\sqrt{2}/2 = 0, \\ -F/3 - N_{27}\sqrt{2}/2 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} N_{23} = -F/3, \\ N_{27} = -\sqrt{2}/3F. \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{23} = -F/3\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_{27} = -F/3\mathbf{i} + F/3\mathbf{j}.$$

Procedendo in modo analogo è possibile determinare le reazioni relative ai restanti nodi.

2 Metodo di Ritter

Il metodo di Ritter, per la determinazione delle reazioni interne di una travatura reticolare, si basa sull'applicazione delle ECS ad *opportune sezioni di una struttura reticolare* in equilibrio.

La sezione che divide la struttura in due parti S' e S'' dovrà tagliare aste scariche e tali che tutte le aste tranne una, T_{ij} , concorrano in un punto T proprio o improprio.

E' evidente che se la struttura $S = S' \cup S''$ è in equilibrio, allora lo saranno anche S' ed S'' .

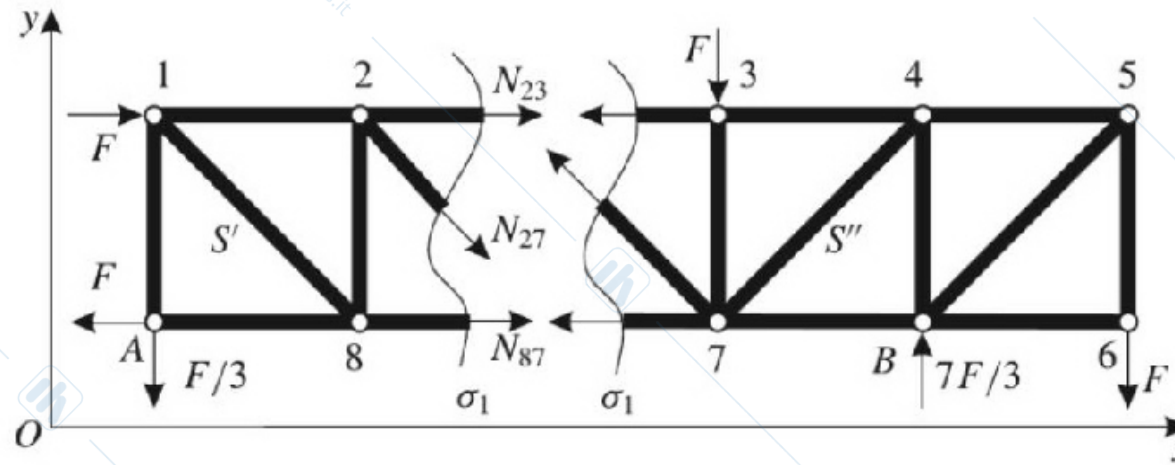
Supposto che T_{ij} sia l'unica asta che non concorra con le altre in un punto T proprio o improprio, applicando opportunamente le ECS ad S' oppure ad S'' è possibile determinare $\mathbf{R}_{ij} = N_{ij} \mathbf{u}_{ij}$.

In particolare, si ha che

- se T è un punto proprio, allora dall'equazione $\mathbf{M}_T = 0$ si ottiene un'equazione nell'incognita N_{ij} ;
- se T è un punto improprio, allora dall'equazione $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u} = 0$ con \mathbf{u} direzione ortogonale a quella individuata da T si ottiene un'equazione nell'incognita N_{ij} .

Il metodo verrà illustrato in dettaglio mediante un esempio.

Esempio 2: Struttura reticolare in equilibrio



La sezione di Ritter σ_1 in figura divide la struttura nelle due parti S' e S'' .
 Le ECS applicate all'intera struttura forniscono le reazioni dei vincoli esterni (cerniera in A e carrello in B)

$$\Phi_A = -F\mathbf{i} - F/3\mathbf{j}, \quad \Phi_B = 7/3F\mathbf{j}.$$

Si prenda in esame S' a sinistra della sezione di taglio σ_1 .
 Sollecitazioni agenti su S'

$$(P_1, F\mathbf{i}), \quad (A, \Phi_A), \quad (P_2, N_{23}\mathbf{u}_{23}), \quad (P_2, N_{27}\mathbf{u}_{27}), \quad (P_8, N_{87}\mathbf{u}_{87})$$

ASTA T_{87}

La sezione σ_1 taglia le aste scariche T_{23} e T_{27} che concorrono nel punto proprio P_2 (nodo 2) e l'asta scarica T_{87} che non concorre nel punto proprio P_2 .

Allora, imponendo che $\mathbf{M}_{P_2} = \mathbf{0}$ si potrà determinare l'incognita N_{87}

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{P_2} &= (A - P_2) \times \Phi_A + (P_1 - P_2) \times F\mathbf{i} + (P_8 - P_2) \times N_{87}\mathbf{u}_{87} \\ &= (-a\mathbf{i} - a\mathbf{j}) \times (-F\mathbf{i} - F/3\mathbf{j}) + (-a\mathbf{i}) \times F\mathbf{i} + (-a\mathbf{j}) \times N_{87}\mathbf{i} = (aF/3 - aF + aN_{87})\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{P_2} = \mathbf{0} \iff N_{87} = 2/3F \quad (\text{tirante})$$

ASTA T_{27}

La sezione σ_1 taglia le aste scariche T_{23} e T_{87} che concorrono nel punto improprio \mathbf{i} (cioè sono entrambe parallele all'asse x) e l'asta T_{27} che non è parallela all'asse x .

Allora, imponendo che $\mathbf{R} \cdot \mathbf{j} = 0$ si potrà determinare l'incognita N_{27}

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \cdot \mathbf{j} &= \Phi_A \cdot \mathbf{j} + F\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + N_{23}\mathbf{u}_{23} \cdot \mathbf{j} + N_{87}\mathbf{u}_{87} \cdot \mathbf{j} + N_{27}\mathbf{u}_{27} \cdot \mathbf{j} \\ &= -F/3 + N_{27} \left(\sqrt{2}/2\mathbf{i} - \sqrt{2}/2\mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{j} = -F/3 - \sqrt{2}/2N_{27}\end{aligned}$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{j} = 0 \iff F/3 + \sqrt{2}/2N_{27} = 0 \iff N_{27} = -\sqrt{2}/3F \quad (\text{puntone})$$

essendo $\mathbf{u}_{23} = \mathbf{u}_{87} = \mathbf{i}$, $\mathbf{u}_{27} = (\sqrt{2}/2\mathbf{i} - \sqrt{2}/2\mathbf{j})$.

ASTA T_{23}

La sezione σ_1 taglia le aste scariche T_{27} e T_{87} che concorrono nel punto proprio P_7 (nodo 7) e l'asta T_{23} che non concorre nel punto proprio P_7 .

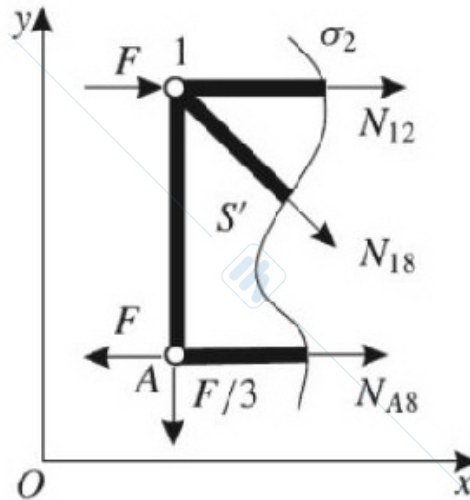
Allora, imponendo che $\mathbf{M}_{P_7} = \mathbf{0}$ si potrà determinare l'incognita N_{23} .

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{P_7} &= (A - P_7) \times \Phi_A + (P_1 - P_7) \times F\mathbf{i} + (P_2 - P_7) \times (N_{23}\mathbf{u}_{23} + N_{27}\mathbf{u}_{27}) \\ &\quad + (P_8 - P_7) \times N_{87}\mathbf{u}_{87} \\ &= (-2a\mathbf{i}) \times (-F\mathbf{i} - F/3\mathbf{j}) + (-2a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times F\mathbf{i} \\ &\quad + (-a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times \left[N_{23}\mathbf{i} + N_{27} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} \right) \right] + (-a\mathbf{i}) \times N_{87}\mathbf{i} \\ &= (2aF/3 - aF - aN_{23}) \mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{P_7} = \mathbf{0} \iff N_{23} = -F/3 \quad (\text{puntone}).$$

Agli stessi risultati si perviene considerando S'' a destra della sezione di taglio σ_1 .

La sezione di Ritter σ_2 in figura consente di individuare N_{12} , N_{18} , N_{A8}



ASTA T_{A8}

La sezione σ_2 taglia le aste scariche T_{12} e T_{18} che concorrono nel punto proprio P_1 (nodo 1) e l'asta T_{A8} che non concorre in P_1 .

Allora, imponendo che $M_{P_1} = 0$ si potrà determinare l'incognita N_{A8} .

ASTA T_{12}

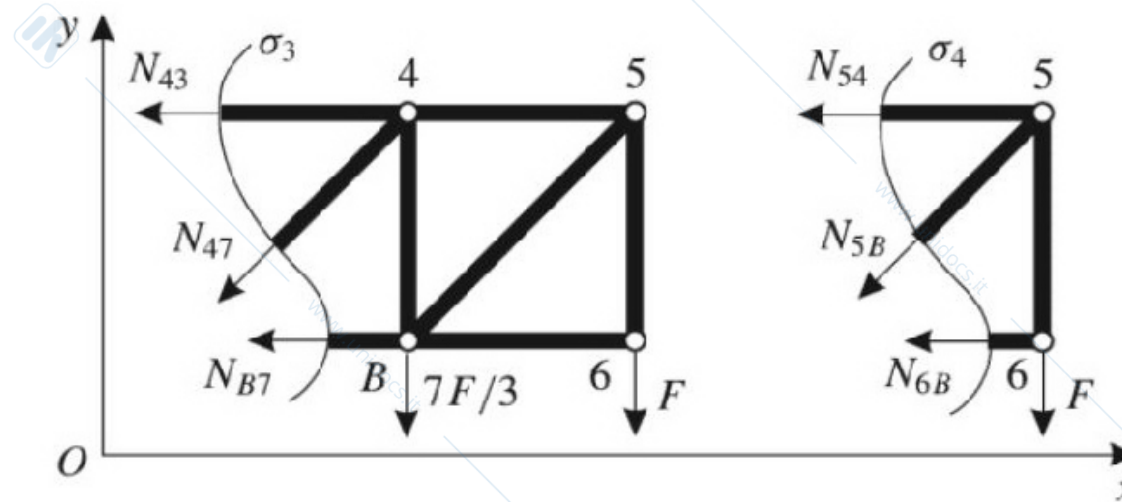
La sezione σ_2 taglia le aste scariche T_{A8} e T_{18} che concorrono nel punto proprio P_8 (nodo 8) e l'asta T_{12} che non concorre in P_8 .

Allora, imponendo che $M_{P_8} = 0$ si potrà determinare l'incognita N_{12} .

ASTA T_{18}

La sezione σ_2 taglia le aste scariche T_{12} e T_{A8} che concorrono nel punto improprio i (cioè sono entrambe parallele all'asse x) e l'asta T_{18} che non è parallela all'asse x . Allora, imponendo che $\mathbf{R} \cdot \mathbf{j} = 0$ si potrà determinare l'incognita N_{18} .

La sezione di Ritter σ_3 consente di individuare N_{43} , N_{47} , N_{B7} , laddove la sezione σ_4 consente di individuare N_{54} , N_{5B} , N_{6B}

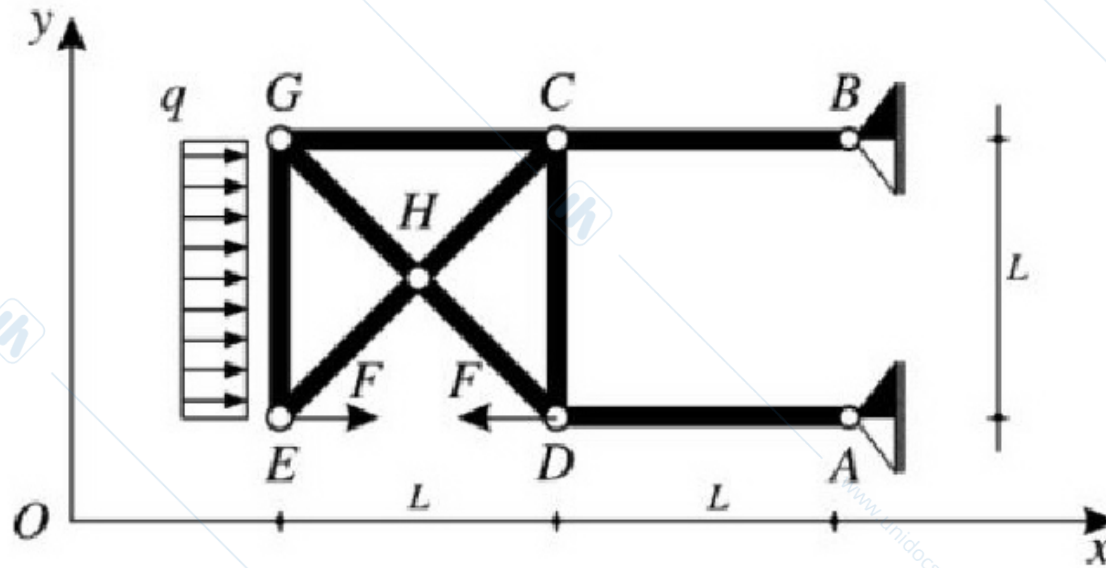


Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 19 del 24 Novembre 2020

Esercizio 1. Analisi cinematica della struttura, determinazione delle reazioni vincolari esterne ed interne



La struttura in esame è costituita da tre corpi rigidi: le aste BC e AD e la struttura reticolare $DCGEH$.

Coordinate normali $m = 9$

$S' \equiv$ asta BC x_B, y_B, φ_1

$S'' \equiv$ struttura reticolare $DCGEH$ x_C, y_C, φ_2

$S''' \equiv$ asta AD x_A, y_A, φ_3

Equazioni di vincolo: $s = 8$

cerniera in A : $dA = \mathbf{0}$

cerniera in B : $dB = \mathbf{0}$

cerniera interna in C : $dC' - dC'' = \mathbf{0}$ ($dx_{C'} - dx_{C''} = 0, dy_{C'} - dy_{C''} = 0$)

cerniera interna in D : $dD'' - dD''' = \mathbf{0}$ ($dx_{D''} - dx_{D'''} = 0, dy_{D''} - dy_{D'''} = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ dx_B = 0, \\ dy_B = 0, \\ [dx_B - d\varphi_1(y_C - y_B)] - dx_C = 0, \\ [dy_B + d\varphi_1(x_C - x_B)] - dy_C = 0, \\ [dx_C - d\varphi_2(y_D - y_C)] - [dx_A - d\varphi_3(y_D - y_A)] = 0, \\ [dy_C + d\varphi_2(x_D - x_C)] - [dy_A + d\varphi_3(x_D - x_A)] = 0, \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} dx_A = 0, \\ dy_A = 0, \\ dx_B = 0, \\ dy_B = 0, \\ dx_B - dx_C = 0, \\ dy_B + Ld\varphi_1 - dy_C = 0, \\ \underbrace{dx_C + Ld\varphi_2 - dx_A = 0,}_{dy_C - dy_A + Ld\varphi_3 = 0,} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} s = 8, \\ s' = 8, \end{array} \implies \begin{array}{l} l = m - s' = 1 \\ i = s - s' = 0, \end{array} \quad \mathbf{1 \text{ volta labile}}$$

Sollecitazioni attive e vincolari agenti sul sistema

- sollecitazioni attive $\{(E, F\mathbf{i}), (D, -F\mathbf{i}), (P, qL\mathbf{i})\}$, $P \equiv (x_E, y_E + L/2)$
- reazioni vincolari esterne $\{(A, \Phi_A = \Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j}), (B, \Phi_B = \Phi_{Bx}\mathbf{i} + \Phi_{By}\mathbf{j})\}$.

Analisi dell'equilibrio con il PLV

$$\begin{aligned} dL^{(a)} &= \underbrace{\mathbf{R}' \cdot dB}_{\mathbf{M}'_B \cdot d\varphi_1} + \mathbf{M}'_B \cdot d\varphi_1 + \mathbf{R}'' \cdot dC + \underbrace{\mathbf{M}''_C \cdot d\varphi_2}_{\mathbf{R}''' \cdot dA} + \underbrace{\mathbf{R}''' \cdot dA}_{\mathbf{M}'''_A \cdot d\varphi_3} + \mathbf{M}'''_A \cdot d\varphi_3 \\ &= \mathbf{M}'_B \cdot d\varphi_1 + \mathbf{R}'' \cdot dC + \mathbf{M}'''_A \cdot d\varphi_3 = 0, \end{aligned}$$

poichè $\mathbf{M}'_B = \mathbf{0}$ essendo la trave BC scarica, $\mathbf{R}'' \cdot dC = 0$ poichè tutte le forze agenti su $DCGEH$ sono dirette lungo l'asse delle x e $dx_C = 0$ e infine $\mathbf{M}'''_A = \mathbf{0}$

$$\mathbf{M}'''_A = (D - A) \times (-F\mathbf{i}) = -L\mathbf{i} \times F\mathbf{i} = \mathbf{0}.$$

Allora, l'intera struttura è in equilibrio in S_0 .

Calcolo delle reazioni vincolari esterne (A, Φ_A) , (B, Φ_B) con le ECS

$$\begin{aligned} A &\equiv (x_E + 2L, y_E), & B &\equiv (x_E + 2L, y_E + L), & D &\equiv (x_E + L, y_E), & P &\equiv (x_E, y_E + L/2), \\ E &\equiv (x_E, y_E), & C &\equiv (x_E + L, y_E + L), & G &\equiv (x_E, y_E + L), & H &\equiv (x_E + L/2, y_E + L/2) \end{aligned}$$

ECS per l'intera struttura

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_A = \mathbf{0} &\Leftrightarrow (E - A) \times F\mathbf{i} + (D - A) \times (-F\mathbf{i}) + (P - A) \times qL\mathbf{i} + (B - A) \times \Phi_B = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow (-2L\mathbf{i}) \times F\mathbf{i} + (-L\mathbf{i}) \times (-F\mathbf{i}) + (-2L\mathbf{i} + L/2\mathbf{j}) \times qL\mathbf{i} + (L\mathbf{j}) \times (\Phi_{Bx}\mathbf{i} + \Phi_{By}\mathbf{j}) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow -qL^2/2\mathbf{k} - L\Phi_{Bx}\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \Phi_{Bx} = -qL/2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_B = \mathbf{0} &\Leftrightarrow (E - B) \times F\mathbf{i} + (D - B) \times (-F\mathbf{i}) + (P - B) \times qL\mathbf{i} + (A - B) \times \Phi_A = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow (-2L\mathbf{i} - L\mathbf{j}) \times F\mathbf{i} + (-L\mathbf{i} - L\mathbf{j}) \times (-F\mathbf{i}) + (-L/2\mathbf{j}) \times qL\mathbf{i} + (-L\mathbf{j}) \times (\Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j}) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow LF\mathbf{k} - LF\mathbf{k} + qL^2/2\mathbf{k} + L\Phi_{Ax}\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \Phi_{Ax} = -qL/2
\end{aligned}$$

ECS per la trave AD

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_D = \mathbf{0} &\Leftrightarrow (A - D) \times (\Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow L\mathbf{i} \times (\Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j}) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow L\Phi_{Ay}\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \Phi_{Ay} = 0
\end{aligned}$$

ECS per la trave BC

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_C = \mathbf{0} &\Leftrightarrow (B - C) \times (\Phi_{Bx}\mathbf{i} + \Phi_{By}\mathbf{j}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow L\mathbf{i} \times (\Phi_{Bx}\mathbf{i} + \Phi_{By}\mathbf{j}) = \mathbf{0} \\
&\Leftrightarrow L\Phi_{By}\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \Phi_{By} = 0
\end{aligned}$$

In definitiva, si ha $(A, \Phi_A = -qL/2\mathbf{i})$, $(B, \Phi_B = -qL/2\mathbf{i})$

Metodo dei nodi per il calcolo delle reazioni vincolari interne

Si consideri il nodo i in cui concorrono M travi T_{ij} e siano

\mathbf{F}_i risultante della sollecitazione attiva agente sul nodo i

\mathbf{R}_i risultante delle reazioni vincolari esterne agenti sul nodo i

\mathbf{R}_{ih} reazione che la trave T_{ih} esplica sul nodo i , $h = 1, \dots, M$

$$ECS : \begin{cases} F_{ix} + R_{ix} + \sum_{h=1}^M R_{ihx} = 0, \\ F_{iy} + R_{iy} + \sum_{h=1}^M R_{ihy} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Se alcune delle M travi concorrenti nel nodo i sono scariche si ha

$$\mathbf{R}_{ih} = R_{ih} \mathbf{u}_{ih},$$

con \mathbf{u}_{ih} noto dalla geometria della struttura.

Le **(1)** forniscono univocamente le reazioni \mathbf{R}_{ih} nel caso in cui i sia un **nodo semplice** cioè se in esso convergono solo due aste.

NODO A

Il nodo A è in equilibrio

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_A = \Phi_A = -qL/2\mathbf{i}, \quad \Leftrightarrow -qL/2 - N_{AD} = 0 \Rightarrow N_{AD} = -qL/2$$

$$\mathbf{R}_{AD} = N_{AD}\mathbf{u}_{AD} = -N_{AD}\mathbf{i},$$

NODO D

Avendo determinato \mathbf{R}_{AD} , il nodo D può considerarsi semplice e le ECS consentono di determinare \mathbf{R}_{DH} e \mathbf{R}_{DC} .

$$\mathbf{F}_D = -F\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_{DA} = N_{AD}\mathbf{u}_{DA} = -qL/2\mathbf{i}$$

$$\mathbf{R}_{DH} = N_{DH}\mathbf{u}_{DH} = N_{DH}(-\sqrt{2}/2\mathbf{i} + \sqrt{2}/2\mathbf{j}), \quad \mathbf{R}_{DC} = N_{DC}\mathbf{u}_{DC} = N_{DC}\mathbf{j},$$

$$\begin{cases} -F - qL/2 - \sqrt{2}/2N_{DH} = 0, \\ \sqrt{2}/2N_{DH} + N_{DC} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{DH} = -\sqrt{2}(F + qL/2), \\ N_{DC} = F + qL/2. \end{cases}$$

NODO B

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_B = -qL/2\mathbf{i}, \quad \Rightarrow N_{BC} = -qL/2$$

$$\mathbf{R}_{BC} = -N_{BC}\mathbf{i},$$

NODO C

Avendo determinato \mathbf{R}_{BC} e \mathbf{R}_{DC} , il nodo C può considerarsi semplice e le ECS consentono di determinare \mathbf{R}_{CH} e \mathbf{R}_{CG} .

$$\mathbf{R}_{CB} = -qL/2\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_{CD} = -(F + qL/2)\mathbf{j},$$

$$\mathbf{R}_{CH} = N_{CH}\mathbf{u}_{CH} = N_{CH}(-\sqrt{2}/2\mathbf{i} - \sqrt{2}/2\mathbf{j}), \quad \mathbf{R}_{CG} = N_{CG}\mathbf{u}_{CG} = -N_{CG}\mathbf{i},$$

$$\begin{cases} -N_{CH}\sqrt{2}/2 - qL/2 - N_{CG} = 0, \\ -(F + qL/2) - \sqrt{2}/2N_{CH} = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} N_{CG} = F, \\ N_{CH} = -\sqrt{2}(F + qL/2). \end{cases}$$

NODO H

Avendo determinato \mathbf{R}_{CH} e \mathbf{R}_{DH} , il nodo H può considerarsi semplice e le ECS consentono di determinare \mathbf{R}_{HE} e \mathbf{R}_{HG} .

$$\mathbf{R}_{HC} = N_{CH}\mathbf{u}_{HC} = -(F + qL/2)(\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \mathbf{R}_{HD} = N_{HD}\mathbf{u}_{HD} = -(F + qL/2)(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$\mathbf{R}_{HE} = N_{HE}\mathbf{u}_{HE} = N_{HE}(-\sqrt{2}/2\mathbf{i} - \sqrt{2}/2\mathbf{j}), \quad \mathbf{R}_{HG} = N_{HG}\mathbf{u}_{HG} = N_{HG}(-\sqrt{2}/2\mathbf{i} + \sqrt{2}/2\mathbf{j})$$

$$\begin{cases} -(F + qL/2) - (F + qL/2) - \sqrt{2}/2N_{HE} - \sqrt{2}/2N_{HG} = 0, \\ -(F + qL/2) + (F + qL/2) - \sqrt{2}/2N_{HE} + \sqrt{2}/2N_{HG} = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} N_{HG} = -\sqrt{2}(F + qL/2), \\ N_{HE} = N_{HG}, \end{cases}$$

NODO E

La trave EG è carica, si indichi con \mathbf{R}_{EG}^* la reazione di EG su E

$$\mathbf{R}_{EG}^* = R_{EGx}^* \mathbf{i} + R_{EGy}^* \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_E = F \mathbf{i},$$

$$\mathbf{R}_{EH} = N_{EH} \mathbf{u}_{EH} = N_{EH} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} \right) = - (F + qL/2) (\mathbf{i} + \mathbf{j}),$$

$$\begin{cases} R_{EGx}^* + F - (F + qL/2) = 0, \\ R_{EGy}^* - (F + qL/2) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} R_{EGx}^* = qL/2, \\ R_{EGy}^* = F + qL/2, \end{cases}$$

NODO G

La trave EG è carica, si indichi con \mathbf{R}_{GE}^* la reazione di EG su G

$$\mathbf{R}_{GE}^* = R_{GEx}^* \mathbf{i} + R_{GEy}^* \mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_{GH} = N_{GH} \mathbf{u}_{GH} = - (F + qL/2) (\mathbf{i} - \mathbf{j}), \quad \mathbf{R}_{GC} = N_{GC} \mathbf{u}_{GC} = F \mathbf{i},$$

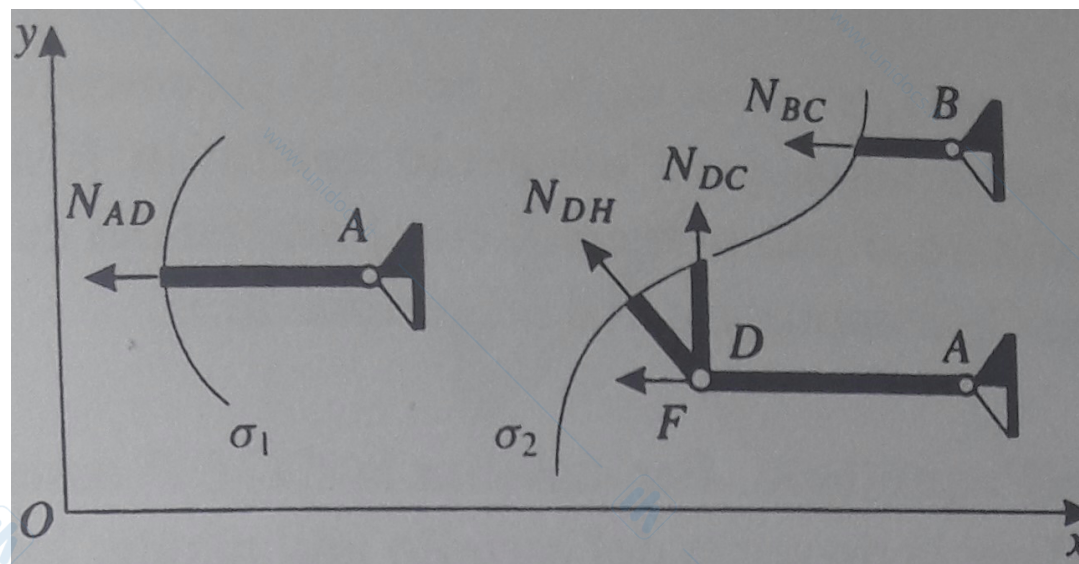
$$\begin{cases} R_{GEx}^* - (F + qL/2) + F = 0, \\ R_{GEy}^* + (F + qL/2) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} R_{GEx}^* = qL/2, \\ R_{GEy}^* = - (F + qL/2), \end{cases}$$

Metodo di Ritter

La sezione che divide la struttura in due parti S' e S'' dovrà tagliare *aste scariche* e tali che tutte le aste tranne una, T_{ij} , concorrano in un punto T proprio o improprio.

Supposto che T_{ij} sia l'unica asta che non concorra con le altre in un punto T proprio o improprio, applicando le ECS ad S' oppure ad S'' è possibile determinare $\mathbf{R}_{ij} = N_{ij} \mathbf{u}_{ij}$

- se T è un punto proprio, allora dall'equazione $\mathbf{M}_T = 0$ si ottiene l'incognita N_{ij} ;
- se T è un punto improprio, allora dall'equazione $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u} = 0$ con \mathbf{u} direzione ortogonale a quella individuata da T si ottiene l'incognita N_{ij} .



ASTA T_{AD}

La struttura S' a destra della sezione di taglio σ_1 consente di determinare \mathbf{R}_{AD} .

$$\begin{aligned}\Phi_A &= -qL/2\mathbf{i}, & \mathbf{R}_{AD} &= N_{AD}\mathbf{u}_{AD} = -N_{AD}\mathbf{i} \\ (-N_{AD}\mathbf{i} - qL/2\mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} &= 0 \iff N_{AD} &= -qL/2\end{aligned}$$

La sezione σ_2 taglia le aste scariche T_{BC} , T_{DC} e T_{DH} .

ASTA T_{DH}

Le aste T_{BC} e T_{DC} concorrono nel punto proprio C .

Allora, imponendo che $\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$ si potrà determinare l'incognita N_{DH} .

Sollecitazioni attive e vincolari esterne agenti su S'

$$(D, -F\mathbf{i}), \quad (A, \Phi_A = -qL/2\mathbf{i}), \quad (B, \Phi_B = -qL/2\mathbf{i})$$

Reazioni vincolari interne agenti su S'

$$\left(D, \mathbf{R}_{DH} = \sqrt{2}/2 N_{DH} (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \right), \quad (D, \mathbf{R}_{DC} = N_{DC}\mathbf{j}), \quad (B, \mathbf{R}_{BC} = -N_{BC}\mathbf{i})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_C &= (D - C) \times (-F\mathbf{i}) + (A - C) \times \Phi_A + (B - C) \times \Phi_B + (D - C) \times \sqrt{2}/2 N_{DH} (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ &+ (D - C) \times N_{DC}\mathbf{j} + (B - C) \times (-N_{BC}\mathbf{i})\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{0} \iff N_{DH} = -\sqrt{2}(F + qL/2)$$

ASTA T_{BC}

Le aste T_{DH} e T_{DC} concorrono nel punto proprio D .

Allora, imponendo che $\mathbf{M}_D = \mathbf{0}$ si potrà determinare l'incognita N_{BC} .

$$\mathbf{M}_D = (A - D) \times \Phi_A + (B - D) \times \Phi_B + (B - D) \times (-N_{BC}\mathbf{i}),$$

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{0} \iff N_{BC} = -qL/2.$$

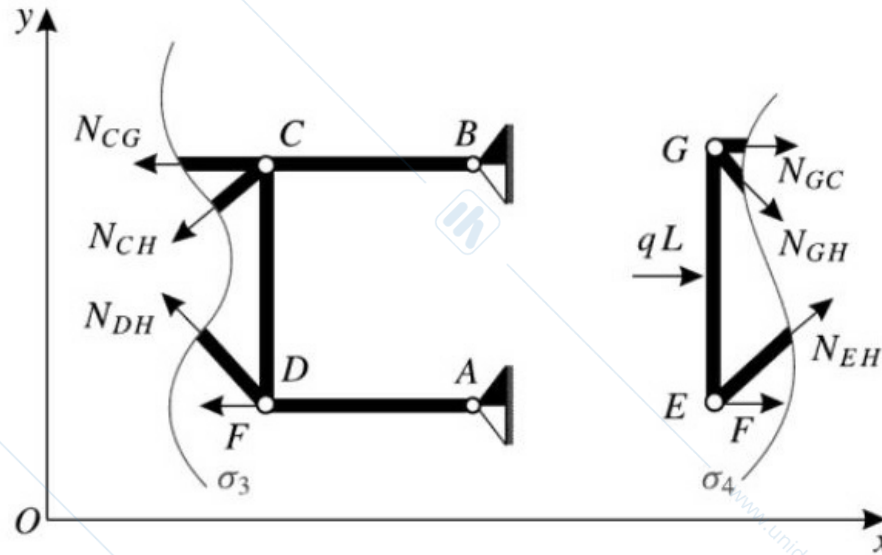
ASTA T_{DC}

Le (direzioni delle) aste T_{BC} e T_{DH} concorrono nel punto proprio G .

Imponendo che $\mathbf{M}_G = \mathbf{0}$ si ha

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{0} \iff N_{DC} = F + qL/2.$$

Quando si considerino le sezioni σ_3 e σ_4 in figura, è possibile determinare le restanti reazioni interne.



Ad esempio la sezione σ_3 taglia le travi scariche T_{CG} , T_{HC} e T_{HD} . Sarà possibile determinare R_{CG} osservando che le travi T_{HC} e T_{HD} concorrono nel punto H e imponendo che $M_H = 0$.

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 20 del 26 Novembre 2020

1 Geometria delle masse

1.1 Baricentro

Sia $S = \{(P_i, m_i), i = 1, \dots, n\}$ un sistema discreto di n punti materiali, la *massa* del sistema S è la quantità positiva

$$m = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (1)$$

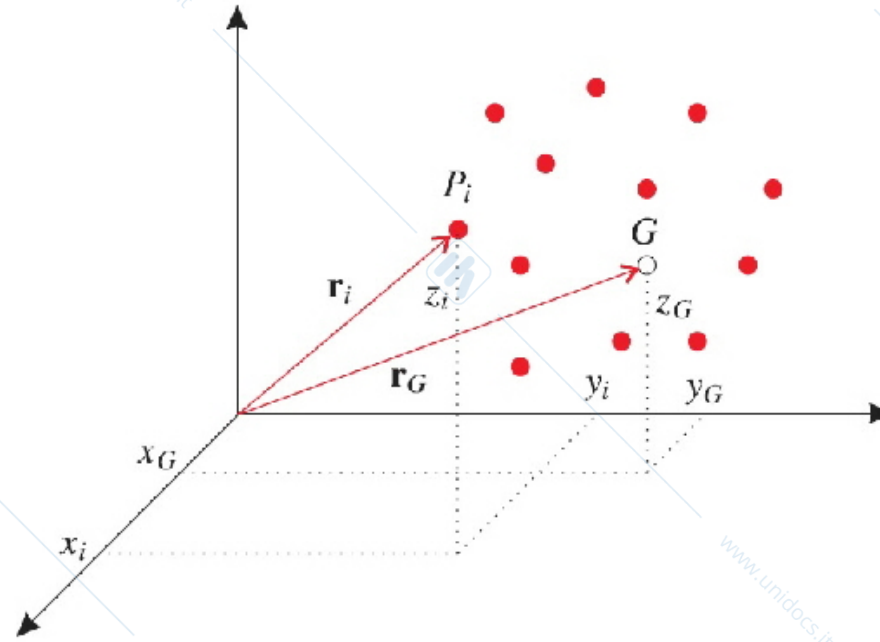
Sia \mathbf{r}_i il vettore di posizione del punto materiale P_i di massa m_i in una terna $Oxyz$. Si definisce **baricentro** o **centro di massa** il punto G tale che

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad \equiv \quad x_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i. \quad (2)$$

La posizione del baricentro G dipende solo dalle posizioni e masse dei punti P_i di S

$$OG = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i OP_i, \quad O'G' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i O'P_i \quad G \equiv G' \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i GP_i = mGG = \mathbf{0} \right).$$

1



$$OG = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i OP_i, \quad O'G' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i O'P_i \quad G \equiv G' \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i GP_i = mGG = \mathbf{0} \right).$$

$$\begin{aligned} mGG' &= m(GO + OO' + O'G') = m(OO' + O'G' - OG) = mOO' + \sum_{i=1}^n m_i O'P_i - \sum_{i=1}^n m_i OP_i = mOO' + \sum_{i=1}^n m_i (O'P_i - OP_i) \\ &= mOO' + \sum_{i=1}^n m_i (O'O) = \mathbf{0} \Leftrightarrow G \equiv G' \end{aligned}$$

Il baricentro gode di proprietà analoghe a quelle stabilite per il *centro di un sistema di vettori paralleli*.

Si consideri ad esempio un sistema Σ di n vettori paralleli e concordi aventi direzione e verso arbitrari e moduli proporzionali alle masse m_i dei punti P_i di S

$$\Sigma = \{(P_i, am_i \mathbf{u}), i = 1, \dots, n\} \quad (3)$$

dove $a > 0$ e \mathbf{u} sono uno scalare e un versore arbitrari.

Il centro C del sistema Σ è definito da

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (4)$$

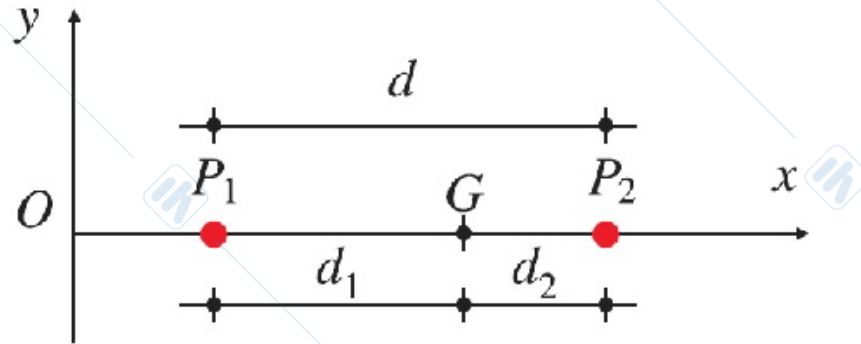
Allora, il centro di massa o baricentro G di S coincide con il centro C degli infiniti sistemi Σ rappresentati in (3).

In particolare, per il sistema delle forze peso dei singoli punti P_i di S

$$\Sigma = \{(P_i, m_i g \mathbf{k}), i = 1, \dots, n\} \quad (5)$$

si ha che il centro C coincide con G .

Esempio 1. Il baricentro G del sistema $S = \{(P_1, m_1), (P_2, m_2)\}$ è interno al segmento P_1P_2 e divide tale segmento in parti inversamente proporzionali alle masse m_1 ed m_2



$$G : \frac{|GP_1|}{|GP_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_G = 0, \quad z_G = 0 \Rightarrow mx_G = m_1x_1 + m_2x_2$$

$$\begin{matrix} mx_G = m_1x_1 + m_2x_2 \\ x_1 < x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} mx_G < m_1x_2 + m_2x_2 \\ mx_G > m_1x_1 + m_2x_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} mx_G < (m_1 + m_2)x_2 \\ mx_G > (m_1 + m_2)x_1 \end{matrix} \Leftrightarrow x_1 < x_G < x_2$$

$$\begin{matrix} x_1 = x_G - d_1 \\ x_2 = x_G + d_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} mx_G = m_1(x_G - d_1) + m_2(x_G + d_2) = mx_G - m_1d_1 + m_2d_2 \\ m_1d_1 = m_2d_2 \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1} \Leftrightarrow \frac{|GP_1|}{|GP_2|} = \frac{m_2}{m_1} \end{matrix}$$

Sia $S = \{(P, \rho(P)), P \in B\}$ un sistema continuo in cui la massa si distribuisce lungo tutta la regione B occupata dal corpo.

La distribuzione di massa in B è caratterizzata dalla **densità di massa** $\rho(P)$

$$m(c) = \int_c \rho(P) d\tau \quad c \subseteq B \quad m = \int_B \rho(P) d\tau \quad (6)$$

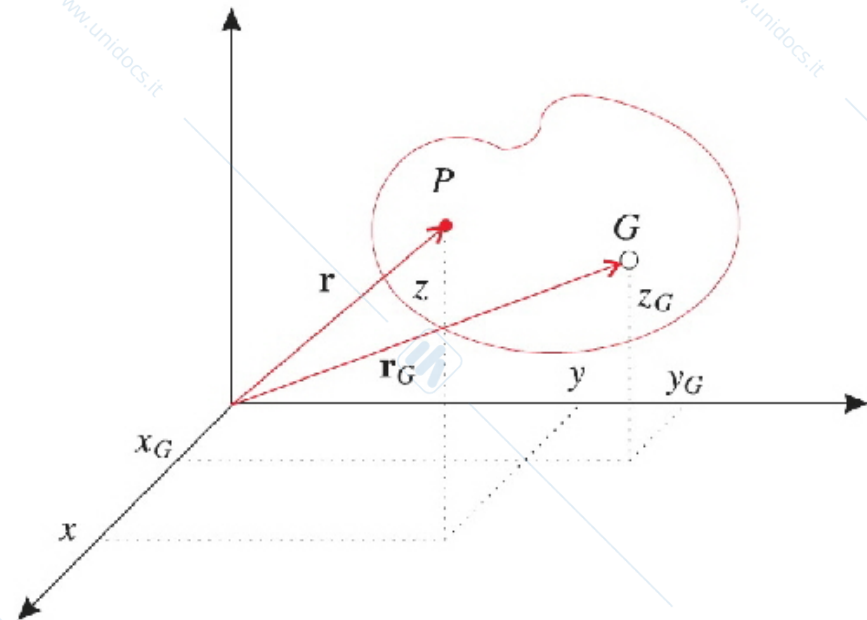
dove con $d\tau$ si intende un elemento infinitesimo di volume per corpi 3D, di superficie per quelli 2D e di linea per quelli 1D.

Sia \mathbf{r} il vettore di posizione di $P \in S$ in un riferimento $Oxyz$, il **baricentro** di S è il punto G tale che

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \int_B \rho \mathbf{r} d\tau \quad \equiv \quad x_G = \frac{1}{m} \int_B \rho x d\tau, \quad y_G = \frac{1}{m} \int_B \rho y d\tau, \quad z_G = \frac{1}{m} \int_B \rho z d\tau.$$

Il sistema S è **omogeneo** se la densità ρ è costante

$$m = \rho \text{mis} B \stackrel{\circ}{=} \rho B, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{B} \int_B \mathbf{r} d\tau \equiv x_G = \frac{1}{B} \int_B x d\tau, \quad y_G = \frac{1}{B} \int_B y d\tau, \quad z_G = \frac{1}{B} \int_B z d\tau.$$

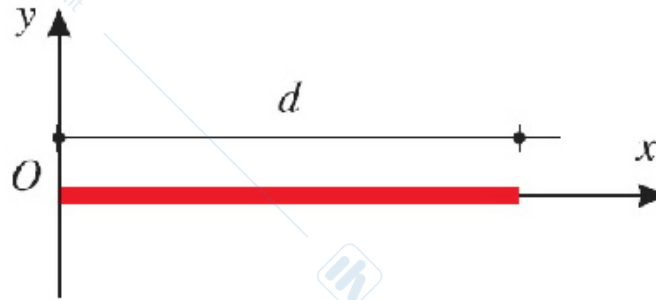


Analogamente al caso di un insieme discreto di punti materiali, il sistema continuo di vettori paralleli

$$\Sigma = \{(P, a\rho\mathbf{u}), P \in B\} \quad a > 0$$

ha il centro C coincidente col baricentro G di S .

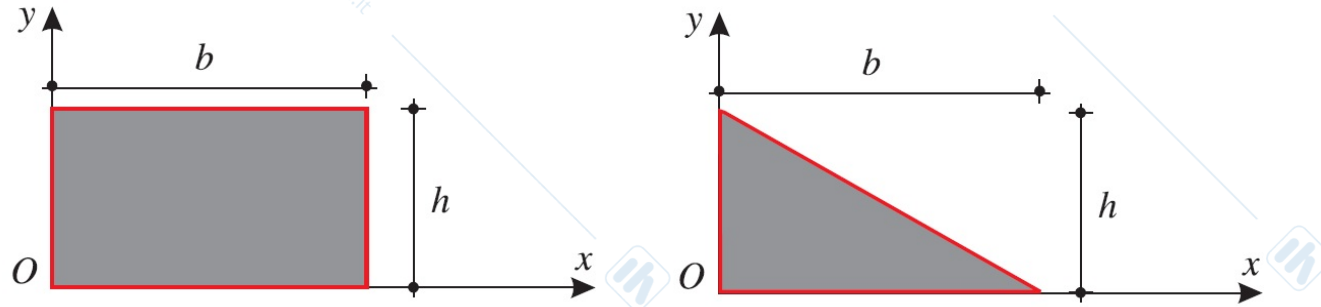
Esempio 2. Baricentro di una barretta di lunghezza d e densità $\rho = \text{cost}$, $\rho = ax$ $a > 0$



$$\rho = \text{cost} \implies m = \rho d, \quad x_G = \frac{1}{d} \int_0^d x dx = \frac{d}{2}, \quad y_G = 0, \quad z_G = 0$$

$$\rho = ax \implies m = \int_0^d ax dx = a \frac{d^2}{2}, \quad x_G = \frac{2}{ad^2} \int_0^d ax^2 dx = \frac{2d}{3}, \quad y_G = 0, \quad z_G = 0$$

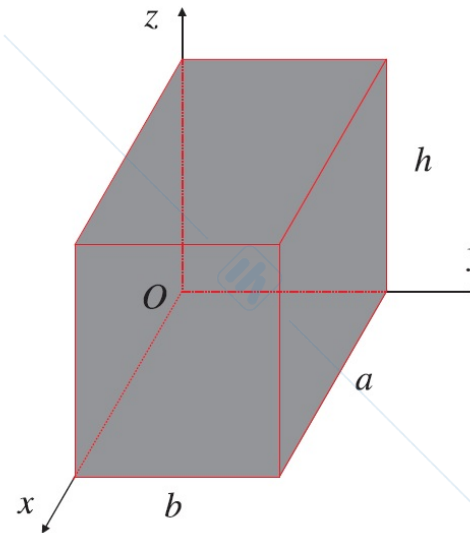
Esempio 3. Baricentro di un rettangolo e di un triangolo rettangolo omogenei



rettangolo $m = \rho bh,$ $x_G = \frac{1}{bh} \int_0^b \int_0^h x dx dy = \frac{b}{2},$ $y_G = \frac{1}{bh} \int_0^b \int_0^h y dx dy = \frac{h}{2},$ $z_G = 0$

triangolo $m = \rho \frac{bh}{2}, r_{AB} : y = h - \frac{h}{b}x,$ $x_G = \frac{2}{bh} \int_0^b \int_0^{h(1-x/b)} x dx dy = \frac{2}{b} \int_0^b \left(x - \frac{x^2}{b} \right) dx = \frac{b}{3}$

$y_G = \frac{1}{bh} \int_0^b \int_0^{h(1-x/b)} y dx dy = \frac{h}{3},$ $z_G = 0$

Esempio 4. Baricentro di un parallelepipedo omogeneo

$$m = \rho abh, \quad x_G = \frac{1}{abh} \int_0^a \int_0^b \int_0^h x dx dy dz = \frac{a}{2}, \quad y_G = \frac{1}{abh} \int_0^a \int_0^b \int_0^h y dx dy dz = \frac{b}{2},$$
$$z_G = \frac{1}{abh} \int_0^a \int_0^b \int_0^h z dx dy dz = \frac{h}{2}.$$

1.2 Proprietà dei baricentri e simmetrie materiali

$$1. \forall P \in S \quad P \in \pi \Rightarrow G \in \pi$$

$$\pi \equiv Oxy \quad \forall P \in S \quad P \in \pi \Rightarrow z_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i = 0 \quad z_G = \frac{1}{m} \int_B \rho z d\tau = 0$$

$$2. \forall P \in S \quad P \in r \Rightarrow G \in r$$

$$r \equiv Ox \quad \forall P \in S \quad P \in r \Rightarrow$$

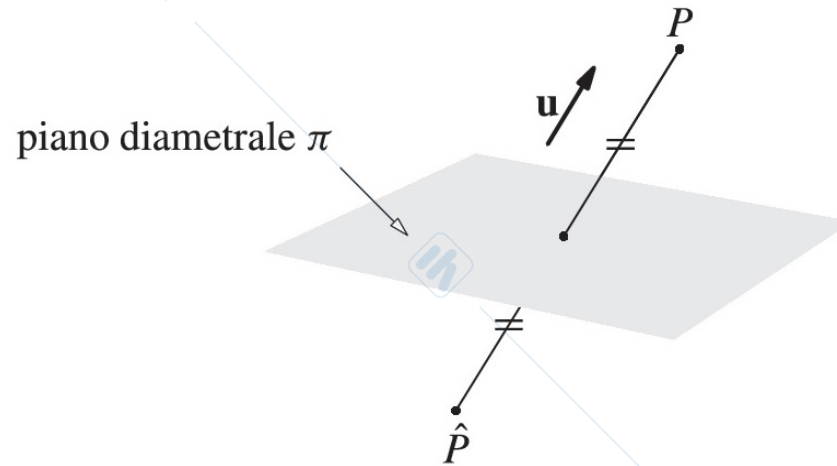
$$y_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0, \quad z_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i = 0$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int_B \rho y d\tau = 0, \quad z_G = \frac{1}{m} \int_B \rho z d\tau = 0$$

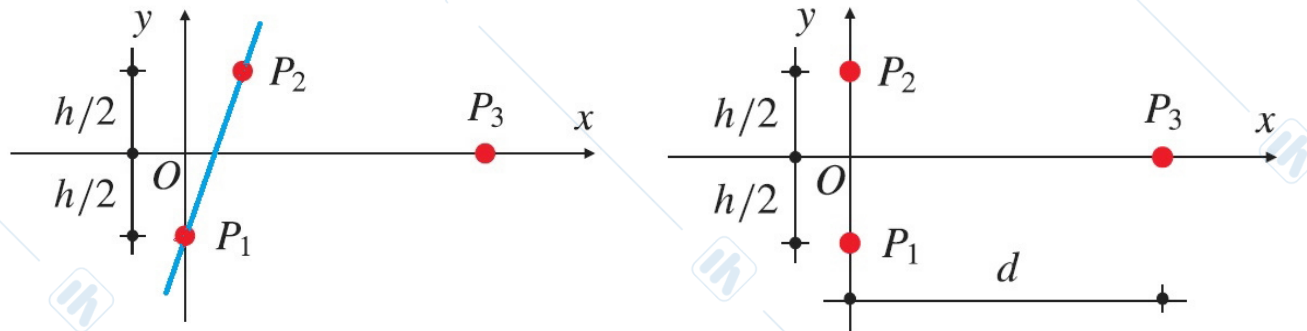
Un piano π si dice **diametricale**, *coniugato alla direzione della retta r individuata dal vettore u* , per un sistema S se ad ogni punto $P \in S$, non appartenente a π , corrisponde un altro punto $\hat{P} \in S$ tale che

- P e \hat{P} hanno uguale massa (pari densità se S è continuo)
- $P\hat{P} \parallel u$ e il punto medio di $P\hat{P}$ appartiene a π

I punti massa P e \hat{P} si definiscono **punti coniugati**.

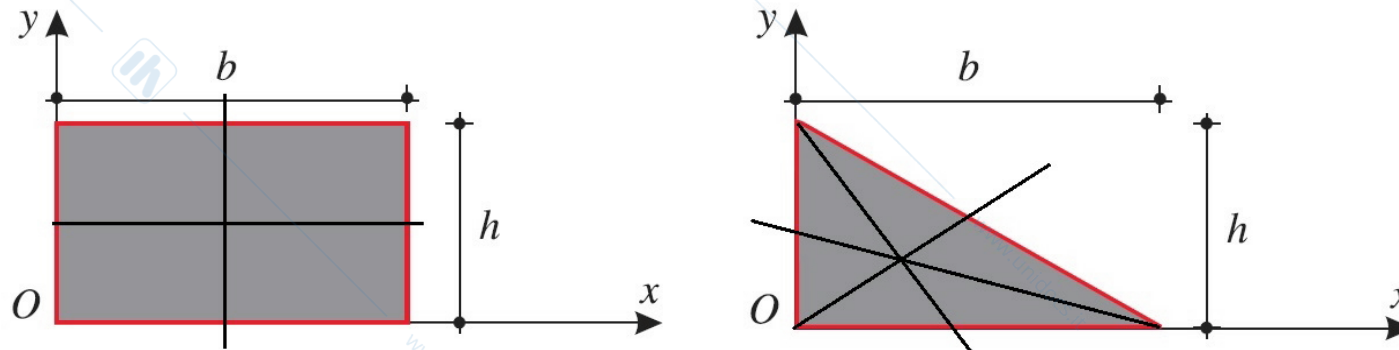


Il piano diametrale π si dirà **piano di simmetria** (materiale) per S se è ortogonale alla direzione coniugata, cioè se è diametrale coniugato ad u che risulta ortogonale a π . Per sistemi piani si definiscono le *rette diametrali coniugate* e *rette di simmetria*.



3. Il baricentro G di un sistema S appartiene ad ogni piano diametrale coniugato di S ed in particolare ad ogni piano di simmetria.

$$\pi \equiv Oxy \text{ piano diametrale} \implies z_G = \frac{1}{m} \left[\sum_h m_h z_h + \sum_h m_h (-z_h) \right] = 0 \Leftrightarrow G \in \pi$$



4. **Proprietà distributiva.** Sia S un sistema di massa m e baricentro G tale che

$S = \bigcup_{i=1}^k S_i$ e siano m_i e G_i la massa e il baricentro di ciascun sistema S_i . Allora G coincide con il baricentro del sistema di k punti materiali

$$\{(G_i, m_i), i = 1, \dots, k\}.$$

$$S : m = \int_B \rho(P) d\tau, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \int_B \rho \mathbf{r} d\tau \quad S_i : m_i = \int_{B_i} \rho(P) d\tau, \quad \mathbf{r}_{G_i} = \frac{1}{m_i} \int_{B_i} \rho \mathbf{r} d\tau$$

$$m \mathbf{r}_G = \int_B \rho \mathbf{r} d\tau = \sum_{i=1}^k \int_{B_i} \rho \mathbf{r} d\tau = \sum_{i=1}^k \left[\left(\int_{B_i} \rho d\tau \right) \mathbf{r}_{G_i} \right] = \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{r}_{G_i}$$

In particolare se $S = \{(P_i, m_i), i = 1, \dots, n\}$, $S = S' \cup S'' : S' = \{(P_i, m_i), i = 1, \dots, n'\}$, $S'' = \{(P_i, m_i), i = n' + 1, \dots, n\}$ si ha

$$m' = \sum_{i=1}^{n'} m_i, \quad m'' = \sum_{i=n'+1}^n m_i, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i = m' + m'' \quad \Rightarrow m' \mathbf{r}_{G'} + m'' \mathbf{r}_{G''} = m \mathbf{r}_G$$

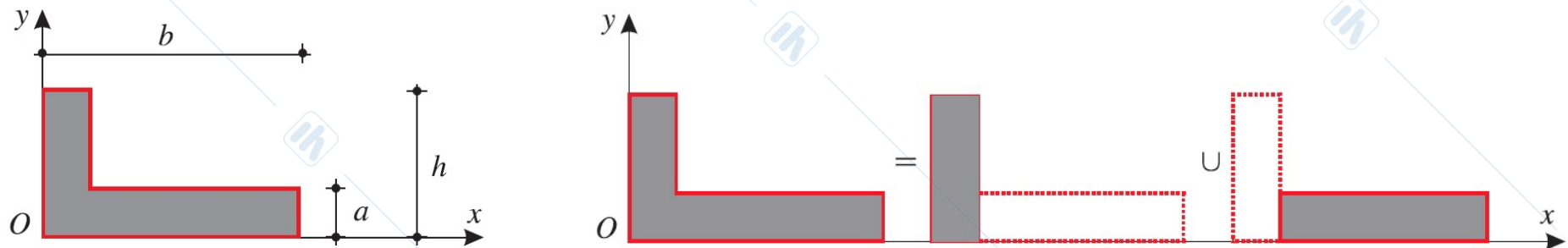
$$\mathbf{r}_{G'} = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{n'} m_i \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{r}_{G''} = \frac{1}{m''} \sum_{i=n'+1}^n m_i \mathbf{r}_i,$$

$$S = S' \cup S'' \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{m} (m' \mathbf{r}_{G'} + m'' \mathbf{r}_{G''}),$$

In modo analogo, si prova che

$$S' = S - S'' : \mathbf{r}_{G'} = \frac{1}{m - m''} (m \mathbf{r}_G - m'' \mathbf{r}_{G''}), \quad S'' = S - S' : \mathbf{r}_{G''} = \frac{1}{m - m'} (m \mathbf{r}_G - m' \mathbf{r}_{G'}).$$

Esempio 5. Baricentro di una sezione omogenea ad L

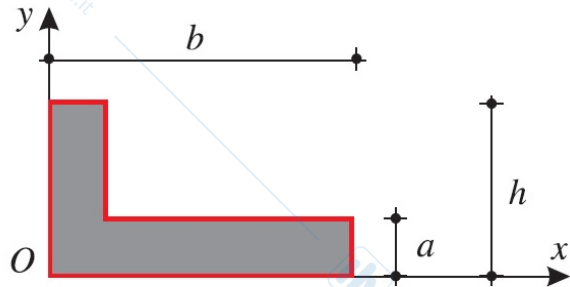


$$m = m' + m'', \quad x_G = \frac{1}{m} (m' x_{G'} + m'' x_{G''}), \quad y_G = \frac{1}{m} (m' y_{G'} + m'' y_{G''}),$$

$$m' = \rho a h, \quad G' \equiv \left(\frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right)$$

$$m'' = \rho (b - a) a, \quad G'' \equiv \left(a + \frac{b - a}{2}, \frac{a}{2} \right) \equiv \left(\frac{b + a}{2}, \frac{a}{2} \right)$$

$$m = \rho a (h + b - a), \quad x_G = \frac{b^2 + a(h - a)}{2(h + b - a)}, \quad y_G = \frac{h^2 + a(b - a)}{2(h + b - a)}$$



$$S' = S - S'' : x_{G'} = \frac{1}{m - m''} (mx_G - m''x_{G''}), \quad y_{G'} = \frac{1}{m - m''} (my_G - m''y_{G''})$$

$$m = \rho bh, \quad G \equiv \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$$

$$m'' = \rho (b - a) (h - a), \quad G'' \equiv \left(a + \frac{b - a}{2}, a + \frac{h - a}{2} \right) \equiv \left(\frac{b + a}{2}, \frac{h + a}{2} \right)$$

$$x_{G'} = \frac{b^2 + a(h - a)}{2(h + b - a)}, \quad y_{G'} = \frac{h^2 + a(b - a)}{2(h + b - a)}$$

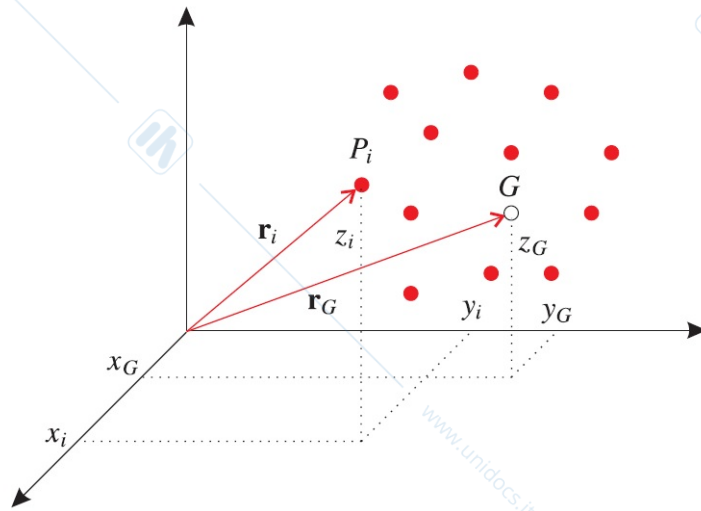
Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 21 del 01 Dicembre 2020

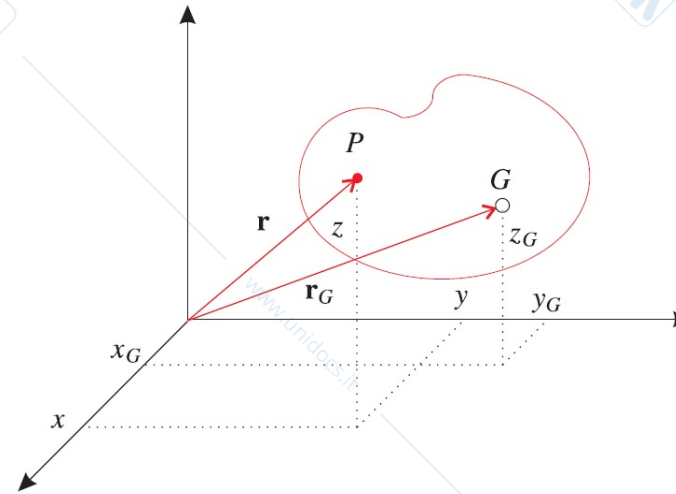
1 Geometria delle masse

1.1 Baricentro



$$S = \{(P_i, m_i), i = 1, \dots, n\}$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$



$$S = \{(P, \rho(P)), P \in B\}$$

$$m = \int_B \rho(P) d\tau, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \int_B \rho \mathbf{r} d\tau. \quad (1)$$

$$S \text{ omogeneo} \quad m = \rho \text{ mis} B \doteq \rho B, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{B} \int_B \mathbf{r} d\tau.$$

$$1. \forall P \in S \quad P \in \pi \Rightarrow G \in \pi$$

$$\forall P \in S \quad P \in r \Rightarrow G \in r$$

2. Il baricentro G di un sistema S appartiene ad ogni piano diametrale coniugato di S ed in particolare ad ogni piano di simmetria.

Proprietà distributiva.

$$S = \bigcup_{i=1}^k S_i : m = \int_B \rho(P) d\tau, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \int_B \rho \mathbf{r} d\tau \quad S_i : m_i = \int_{B_i} \rho(P) d\tau, \quad \mathbf{r}_{G_i} = \frac{1}{m_i} \int_{B_i} \rho \mathbf{r} d\tau$$

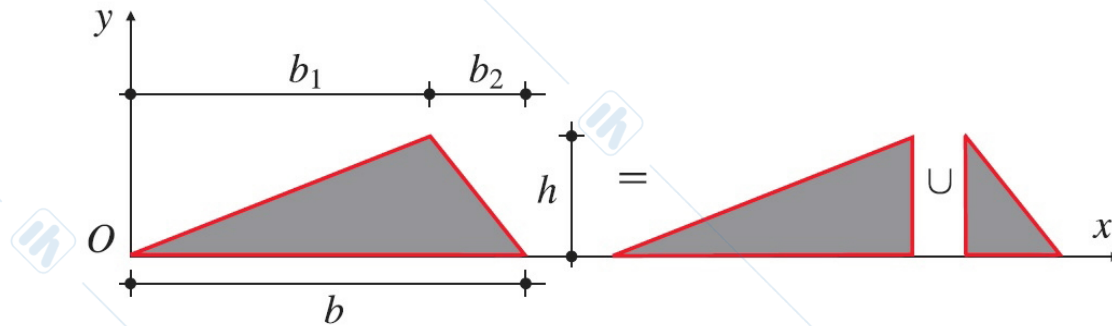
$$m = \sum_{i=1}^k m_i, \quad m \mathbf{r}_G = \int_B \rho \mathbf{r} d\tau = \sum_{i=1}^k \int_{B_i} \rho \mathbf{r} d\tau = \sum_{i=1}^k \int_{B_i} \rho d\tau \mathbf{r}_{G_i} = \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{r}_{G_i}$$

$$S = \{(P_i, m_i), i = 1, \dots, n\}, S' = \{(P_i, m_i), i = 1, \dots, n'\}, S'' = \{(P_i, m_i), i = n' + 1, \dots, n\}$$

$$S = S' \cup S'' \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{m} (m' \mathbf{r}_{G'} + m'' \mathbf{r}_{G''}), \quad m = m' + m''$$

$$S' = S - S'' : \mathbf{r}_{G'} = \frac{1}{m - m''} (m \mathbf{r}_G - m'' \mathbf{r}_{G''}), \quad S'' = S - S' : \mathbf{r}_{G''} = \frac{1}{m - m'} (m \mathbf{r}_G - m' \mathbf{r}_{G'})$$

Esempio 1. Determinare il baricentro del *triangolo omogeneo* in figura



Per il baricentro G_i di ciascun *triangolo rettangolo* T_1 e T_2 di altezza h e base b_i si ha

$$x_{G_1} = \frac{2}{hb_1} \int_0^{b_1} \int_0^{h/b_1 x} x dx dy = \frac{2}{hb_1} \int_0^{b_1} \frac{h}{b_1} x^2 dx = \frac{2b_1}{3}, \quad y_{G_1} = \frac{2}{hb_1} \int_0^{b_1} \int_0^{h/b_1 x} y dx dy = \frac{2}{hb_1} \int_0^{b_1} \frac{h^2}{2b_1^2} x^2 dx = \frac{h}{3},$$

$$x_{G_2} = b_1 + \frac{b_2}{3}, \quad y_{G_2} = \frac{h}{3}, \quad z_{G_1} = z_{G_2} = 0,$$

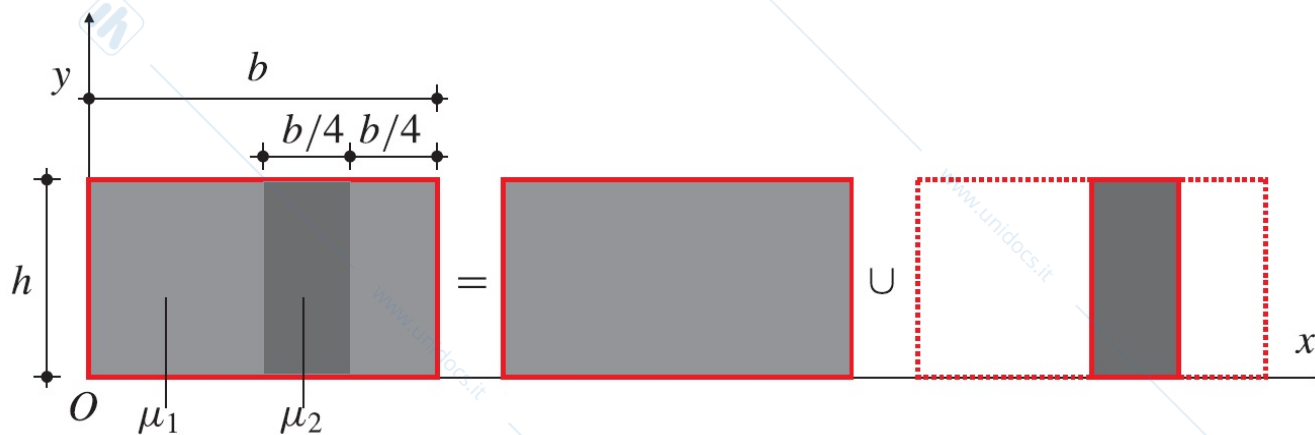
$$m = m' + m'' = \rho b h / 2, \quad m' = \rho b_1 h / 2, \quad m'' = \rho b_2 h / 2.$$

Per la proprietà distributiva si ottiene

$$x_G = \frac{1}{m} (m' x_{G'} + m'' x_{G''}) = \frac{1}{b} \left[\frac{2b_1^2}{3} + b_2 \left(b_1 + \frac{b_2}{3} \right) \right] = \frac{1}{b} \left[\frac{2b_1^2}{3} + \frac{2b_2 b_1}{3} + \frac{b_2 b_1}{3} + \frac{b_2^2}{3} \right]$$

$$x_G = \frac{2b_1}{3} + \frac{b_2}{3}, \quad y_G = \frac{1}{b} \frac{h}{3} (b_1 + b_2) = \frac{h}{3}, \quad z_G = 0,$$

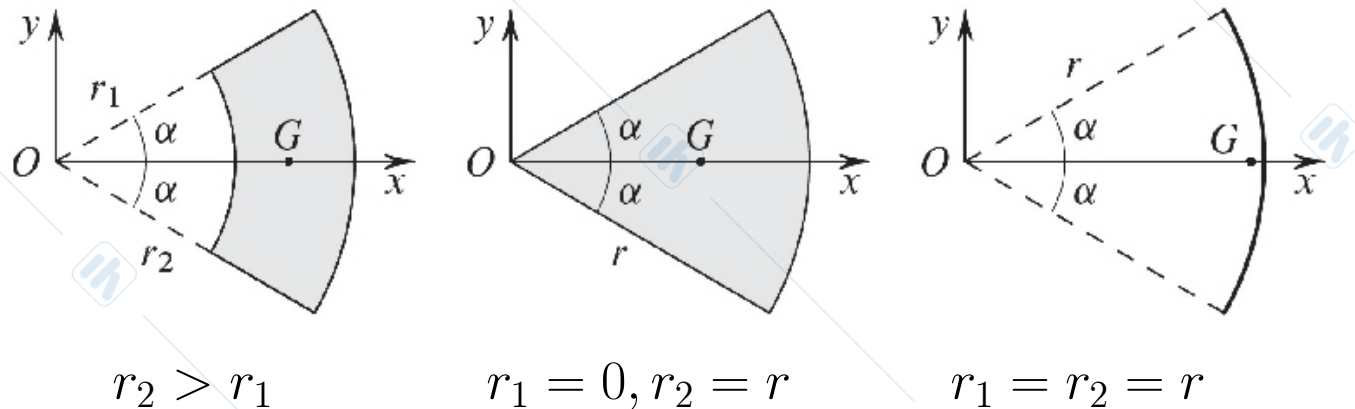
Esempio 2. Sezione rettangolare non omogenea con densità $\mu_1 = \mu, \mu_2 = 5\mu$



$$S' : m' = \mu b h, G' \equiv (b/2, h/2), \quad S'' : m'' = (\mu_2 - \mu_1) h b / 4 = \mu b h, G'' \equiv (b/2 + b/8, h/2)$$

$$S = S' \cup S'' : m = 2\mu b h, \quad x_G = \frac{1}{2\mu b h} \left(\mu b h \frac{b}{2} + \mu b h \frac{5b}{8} \right) = \frac{9}{16} b, \quad y_G = \frac{h}{2}.$$

Esempio 3. Baricentro di un settore di corona circolare omogenea di apertura angolare 2α e compreso tra i raggi r_1 ed r_2 .



L'asse Ox è di simmetria per il settore, pertanto il baricentro G appartiene alla bisettrice, cioè $y_G = z_G = 0$, inoltre $m = \rho (r_2^2 - r_1^2) \alpha$

$$x_G = \frac{1}{m} \int_{r_1}^{r_2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho (r \cos \theta) r dr d\theta = \frac{1}{(r_2^2 - r_1^2) \alpha} \int_{r_1}^{r_2} r^2 (2 \sin \alpha) dr = \frac{2 \sin \alpha}{(r_2^2 - r_1^2) \alpha} \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{3} \quad (2)$$

$$x_G = \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} \frac{(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)}{(r_2 + r_1)}, \quad y_G = z_G = 0.$$

- Per $2\alpha = 2\pi$ si ha che il baricentro di una *corona circolare* è posto nel centro della corona (anche l'asse y è di simmetria materiale).

$$x_G = y_G = z_G = 0.$$

- Per $r_1 = 0$ e $r_2 = r$ si ha che il baricentro di un *settore di cerchio* di ampiezza 2α e raggio r è dato da

$$x_G = \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} r, \quad y_G = z_G = 0.$$

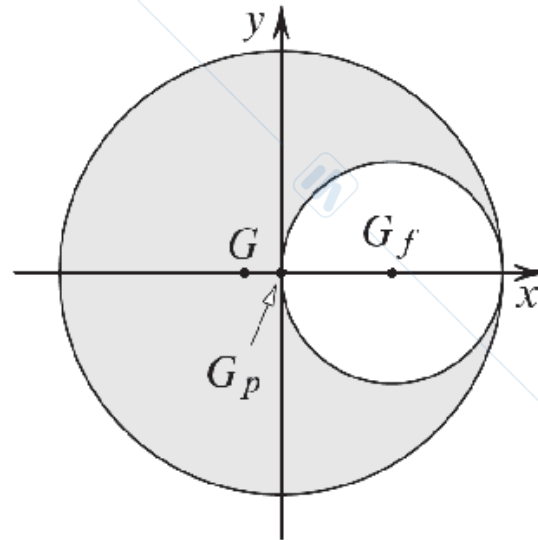
- Per $r_1 = 0, r_2 = r$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ dalla (2) si ricava il baricentro di un *quarto di cerchio* e di un *semicerchio*

$$x_G = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r, \quad y_G = z_G = 0 \quad x_G = \frac{4}{3\pi} r, \quad y_G = z_G = 0.$$

- Per $r_1 = r_2 = r$ si ha che il baricentro di un *settore di circonferenza* di ampiezza 2α e raggio r è dato da

$$x_G = \frac{\sin \alpha}{\alpha} r, \quad y_G = z_G = 0.$$

Esempio 4. Baricentro di una lamina piana circolare omogenea di raggio R nella quale sia stato praticato un foro circolare di raggio $R/2$



L'asse x è di simmetria materiale pertanto $y_G = z_G = 0$.

Utilizzando la proprietà distributiva si ha

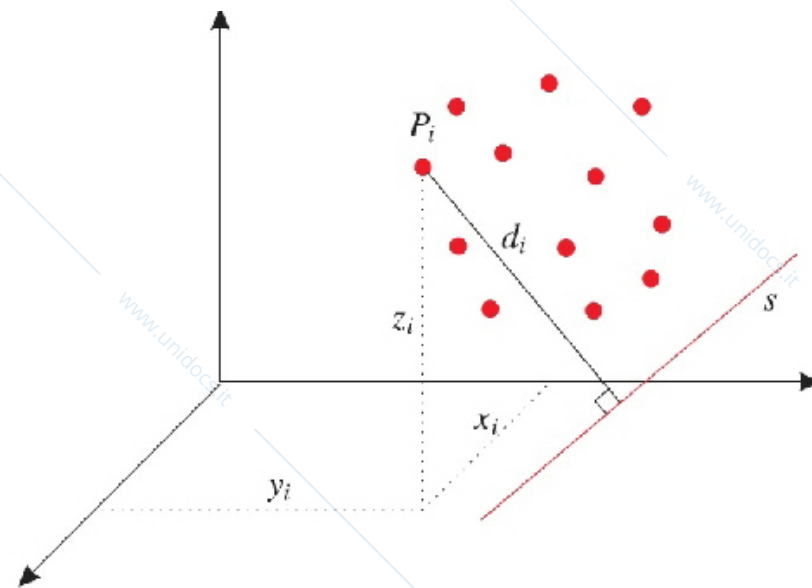
$$S_p : m_p = \rho\pi R^2, \quad G_p \equiv (0, 0) \quad S_f : m_f = \rho\pi R^2/4, \quad G_f \equiv (R/2, 0)$$

$$S = S_p - S_f : x_G = \frac{1}{m_p - m_f} (m_p x_{G_p} - m_f x_{G_f}) = \frac{4}{3\rho\pi R^2} \left(-\frac{1}{4}\rho\pi R^2 \frac{R}{2} \right) = -\frac{R}{6}.$$

1.2 Momenti d'inerzia

Si consideri un sistema (discreto) di punti materiali $S = \{(P_i, m_i), \quad i = 1, \dots, n\}$ e una retta s , si definisce **momento d'inerzia di S rispetto alla retta s**

$$I_s = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2, \quad d_i = d(P_i, s). \quad (3)$$



$$I_s \geq 0, \quad I_s = 0 \iff P_i \in s \quad \forall i.$$

Fissato un sistema di assi cartesiani $Oxyz$, si hanno i seguenti *momenti d'inerzia di S rispetto agli assi*

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (4)$$

Per un *sistema piano* ($z = 0$) si ha

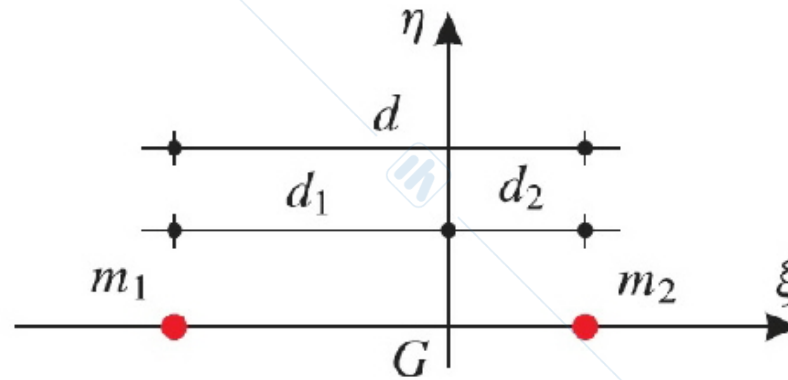
$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2, \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \quad I_z = I_x + I_y. \quad (5)$$

Si definisce **raggio d'inerzia di S rispetto alla retta s**

$$\rho_s = \sqrt{\frac{I_s}{m}}, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (6)$$

e rappresenta la distanza dall'asse s a cui va concentrata la massa m per ottenere il medesimo momento di inerzia del sistema S .

Esempio 5. Calcolare i momenti d'inerzia di $S = \{(P_1, m_1), (P_2, m_2)\}$ rispetto agli assi baricentrali $G\xi\eta$

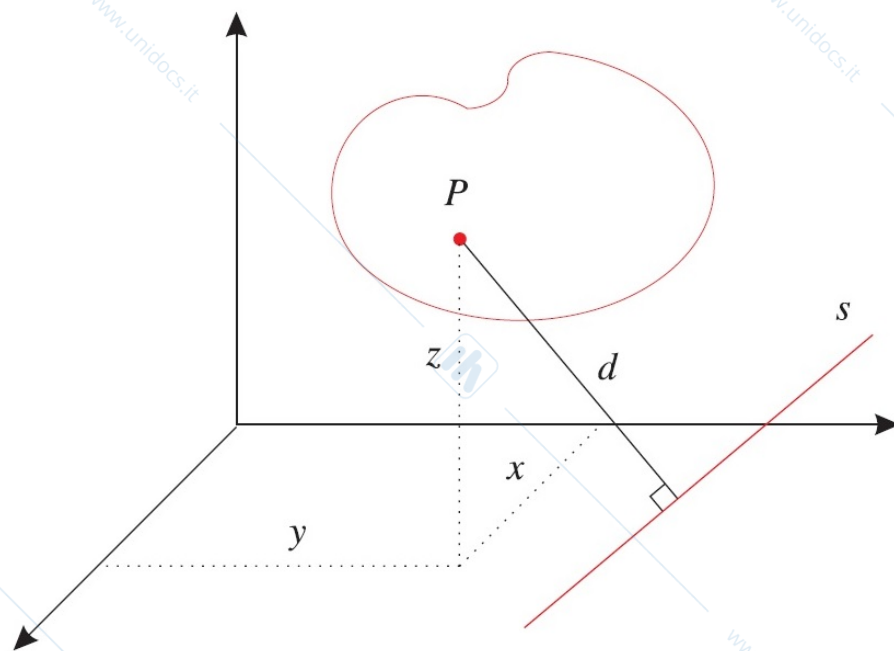


$$m\xi_G = m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = m_1(\xi_G - d_1) + m_2(\xi_G + d_2) \Leftrightarrow m_1d_1 = m_2d_2$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{m_2}{m_1}d_2 \quad \Rightarrow d = d_1 + d_2 = \frac{m}{m_1}d_2 \quad \Rightarrow d_2 = \frac{m_1}{m}d$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{m_1}{m_2}d_1 \quad \Rightarrow d = d_1 + d_2 = \frac{m}{m_2}d_1 \quad \Rightarrow d_1 = \frac{m_2}{m}d$$

$$I_\xi = 0, \quad I_\eta = m_1d_1^2 + m_2d_2^2 = m_1\left(\frac{m_2}{m}d\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{m}d\right)^2 = \frac{m_1m_2}{m}d^2$$



Per un sistema continuo $S = \{(P, \mu), P \in C\}$ di densità μ si ha

$$I_s = \int_C \mu(P) d^2(P) dc, \quad \rho_s = \sqrt{\frac{I_s}{m}}, \quad m = \int_C \mu(P) dc, \quad (7)$$

$$I_x = \int_C \mu(P) (y^2 + z^2) dc, \quad I_y = \int_C \mu(P) (x^2 + z^2) dc, \quad I_z = \int_C \mu(P) (x^2 + y^2) dc,$$

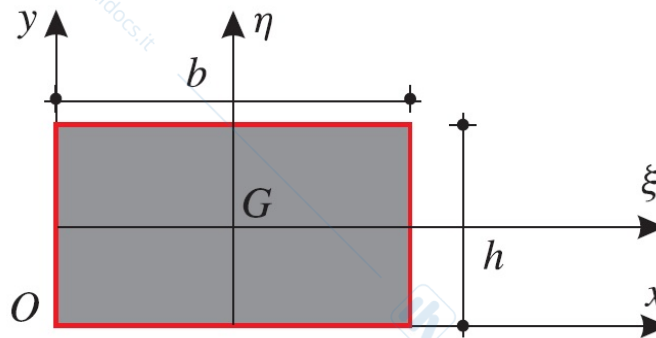
sistema piano
$$I_x = \int_C \mu(P) y^2 dc, \quad I_y = \int_C \mu(P) x^2 dc, \quad I_z = I_x + I_y. \quad (8)$$

Proprietà distributiva

$$S' = \{(P, \mu), P \in C'\}, \quad S'' = \{(P, \mu), P \in C''\}, \quad S = \{(P, \mu), P \in C = C' \cup C''\}$$

$$I_s = \int_C \mu(P) d^2(P) dc = \int_{C'} \mu(P) d^2(P) dc + \int_{C''} \mu(P) d^2(P) dc = I'_s + I''_s. \quad (9)$$

Esempio 6. Calcolare i momenti d'inerzia di un *rettangolo omogeneo* rispetto agli assi $Oxyz$ e $G\xi\eta$



$$I_x = \int_0^h \int_0^b \mu y^2 dx dy = \frac{\mu b h^3}{3}, \quad I_y = \int_0^h \int_0^b \mu x^2 dx dy = \frac{\mu b^3 h}{3}, \quad I_z = I_x + I_y = \frac{\mu b h}{3} (b^2 + h^2).$$

$$I_\xi = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \mu \eta^2 d\xi d\eta = \frac{\mu b h^3}{12}, \quad I_\eta = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \mu \xi^2 d\xi d\eta = \frac{\mu b^3 h}{12}, \quad I_\zeta = I_\xi + I_\eta = \frac{\mu b h}{12} (b^2 + h^2)$$

$$I_x = I_\xi + \mu b h \frac{h^2}{4} = I_\xi + m \left(\frac{h}{2} \right)^2, \quad I_y = I_\eta + \mu b h \frac{b^2}{4} = I_\eta + m \left(\frac{b}{2} \right)^2, \quad I_z = I_\zeta + m \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_x = I_\xi + m d_{G_x}^2, \quad I_y = I_\eta + m d_{G_y}^2, \quad I_z = I_\zeta + m d_{G_z}^2,$$

dove

$$d_{G_x}^2 = y_G^2 + z_G^2, \quad d_{G_y}^2 = x_G^2 + z_G^2, \quad d_{G_z}^2 = x_G^2 + y_G^2$$

sono i quadrati delle distanze del baricentro dagli assi della terna $Oxyz$.

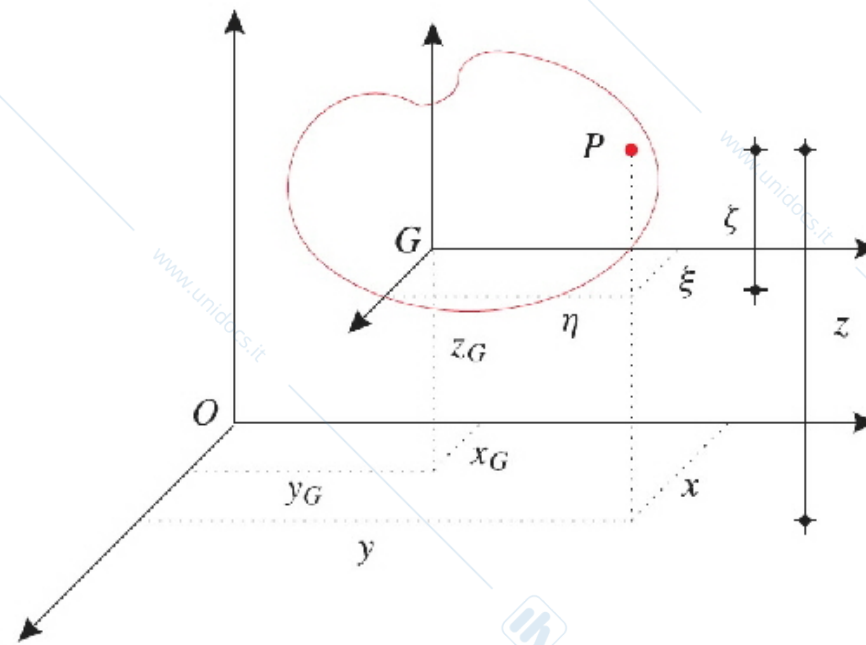
Teorema degli assi paralleli

Siano $Oxyz$ e $G\xi\eta\zeta$ due terne di riferimento con assi paralleli e concordi, allora

$$I_x = I_\xi + md_{G,x}^2, \quad I_y = I_\eta + md_{G,y}^2, \quad I_z = I_\zeta + md_{G,z}^2, \quad (10)$$

dove

$$d_{G,x}^2 = (y_G^2 + z_G^2), \quad d_{G,y}^2 = (x_G^2 + z_G^2), \quad d_{G,z}^2 = (x_G^2 + y_G^2).$$

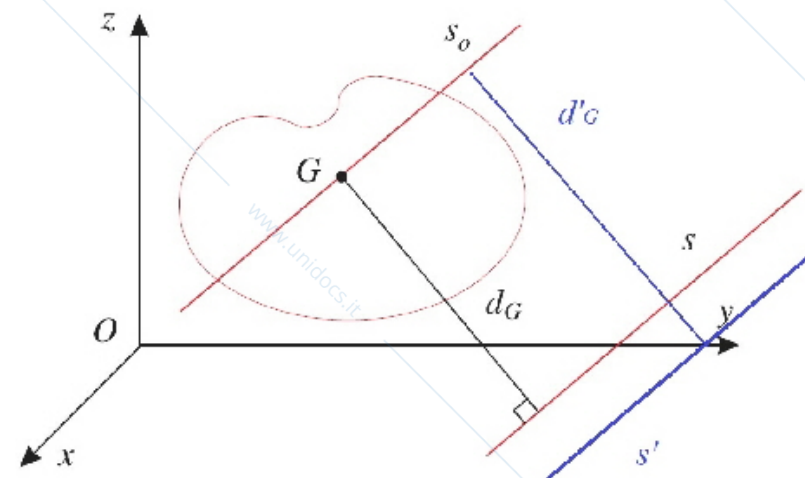
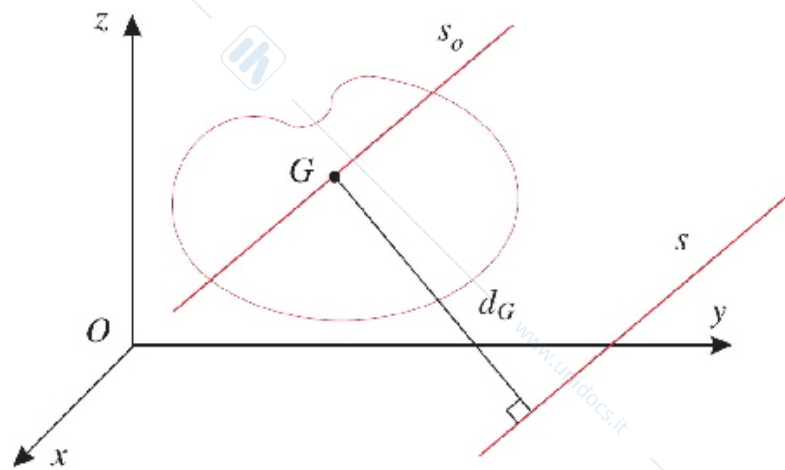


Teorema di Huyghens-Steiner

Siano s_0 ed s due rette parallele e $G \in s_0$, allora si ha

$$I_s = I_{s_0} + md_G^2, \quad d_G = d(G, s) \equiv d(s_0, s). \quad (11)$$

$$s \parallel s' \quad I_{s'} = I_s + m(d_G'^2 - d_G^2), \quad d_G' = d(G, s'), \quad d_G = d(G, s). \quad (12)$$



$$I_s \geq I_{s_0} \quad I_s = I_{s_0} \Leftrightarrow d_G = 0 \quad I_s \geq md_G^2 \quad I_s = md_G^2 \Leftrightarrow I_{s_0} = 0 \quad (13)$$

Fra tutte le rette parallele ad s quella che passa per G rende minimo il momento d'inerzia (cfr (13)₁).

Escluso il caso in cui tutti i punti di S siano allineati su s_0 , considerando la massa di S concentrata in G si commette un errore per difetto nella valutazione di I_s (cfr (13)₂).

La (12) è una diretta conseguenza della (11)

$$\begin{aligned} I_s &= I_{s_0} + md_G^2, & d_G &= d(G, s) \\ I_{s'} &= I_{s_0} + md_{G'}^2, & d_{G'} &= d(G, s') \end{aligned} \Rightarrow I_{s'} = I_s + m(d_{G'}^2 - d_G^2).$$

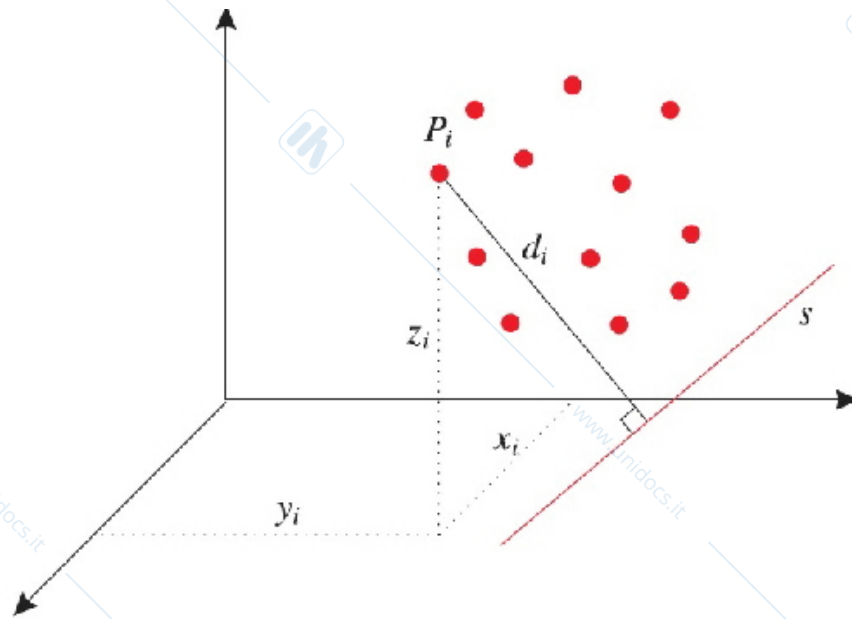
Meccanica Razionale

A. Marasco

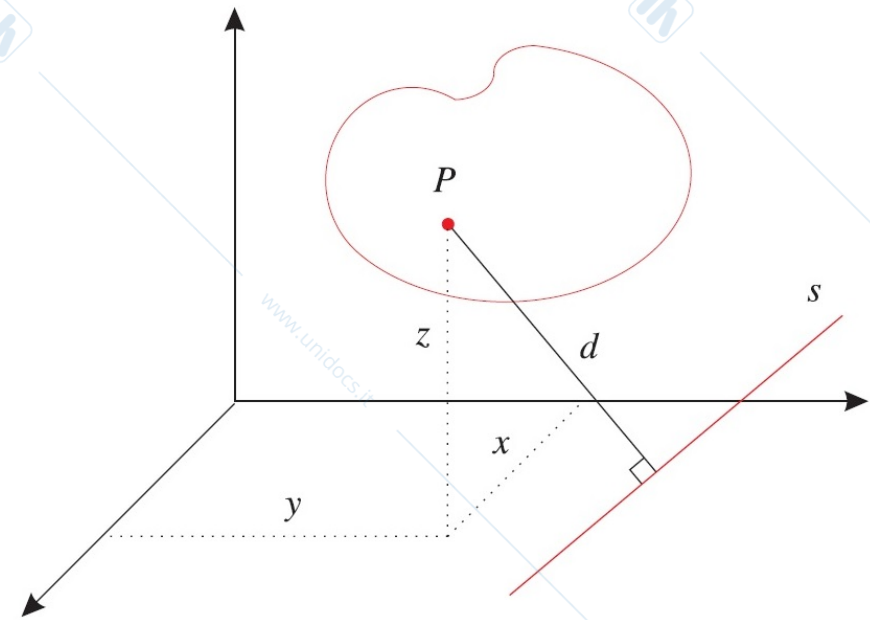
Lezione N. 22 del 03 Dicembre 2020

1 Geometria delle masse

1.1 Momenti d'inerzia



$$I_s = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$$



$$I_s = \int_C \mu(P) d^2(P) dc$$

Momenti d'inerzia di S rispetto agli assi

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (1)$$

$$I_x = \int_C \mu(P) (y^2 + z^2) dc, \quad I_y = \int_C \mu(P) (x^2 + z^2) dc, \quad I_z = \int_C \mu(P) (x^2 + y^2) dc,$$

Sistema piano ($z = 0$) si ha

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2, \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \quad I_z = I_x + I_y, \quad (2)$$

$$I_x = \int_C \mu(P) y^2 dc, \quad I_y = \int_C \mu(P) x^2 dc, \quad I_z = I_x + I_y.$$

Raggio d'inerzia di S rispetto alla retta s

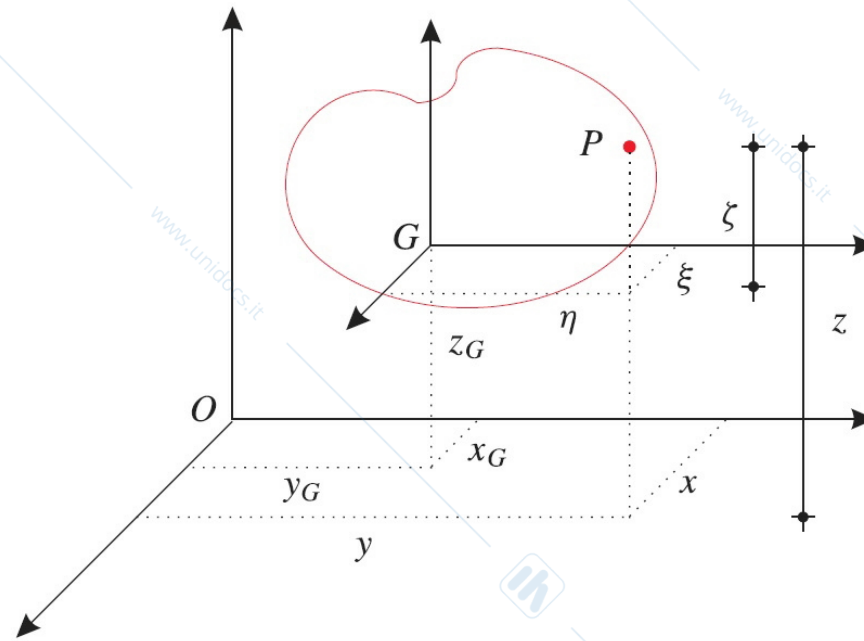
$$\rho_s = \sqrt{\frac{I_s}{m}}, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad m = \int_C \mu(P) dc, \quad (3)$$

Proprietà distributiva: $S = S' \cup S'' \quad I_s = I'_s + I''_s$.

Teorema degli assi paralleli: Siano $Oxyz$ e $G\xi\eta\zeta$ due terne di riferimento con assi paralleli e concordi, allora

$$I_x = I_\xi + md_{G,x}^2, \quad I_y = I_\eta + md_{G,y}^2, \quad I_z = I_\zeta + md_{G,z}^2 \quad (4)$$

$$d_{G,x}^2 = (y_G^2 + z_G^2), \quad d_{G,y}^2 = (x_G^2 + z_G^2), \quad d_{G,z}^2 = (x_G^2 + y_G^2).$$



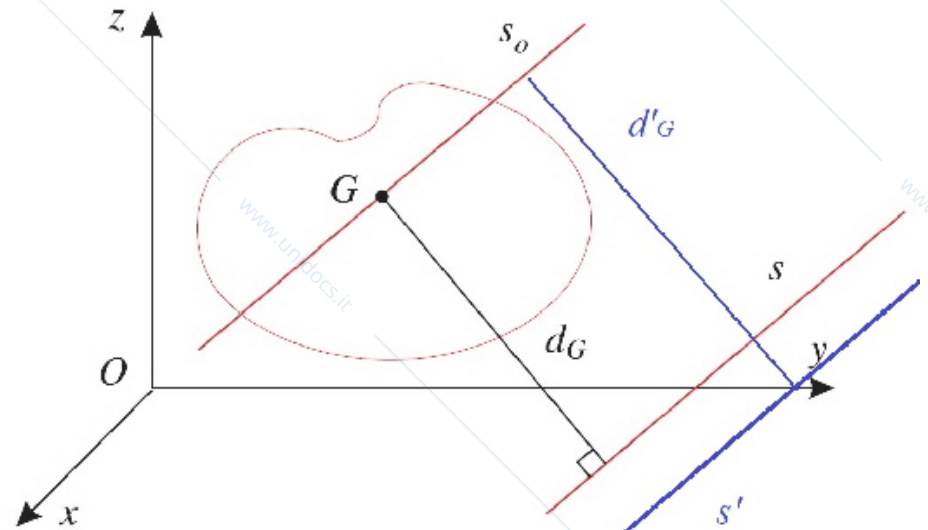
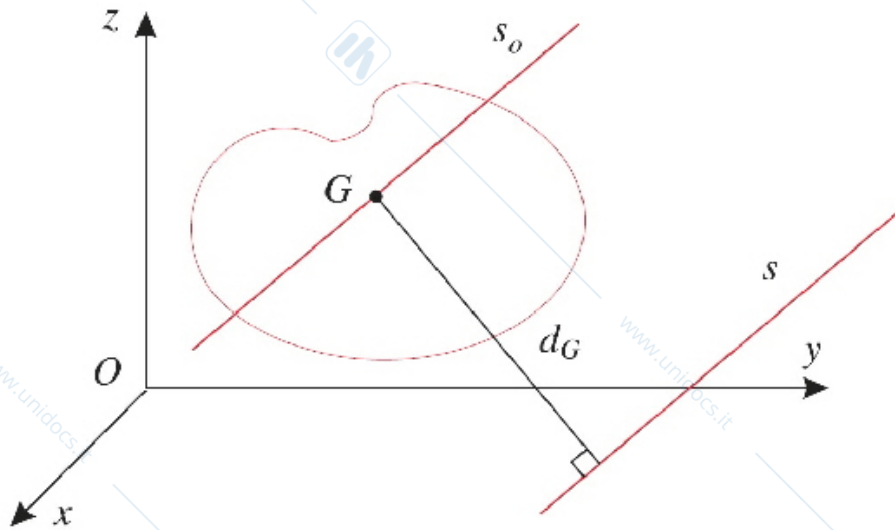
$$\forall P \in S \quad x = \xi + x_G, \quad y = \eta + y_G, \quad z = \zeta + z_G$$

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C \mu (y^2 + z^2) dc = \int_C \mu \left[(\eta + y_G)^2 + (\zeta + z_G)^2 \right] dc \\ &= \int_C \mu \left[\eta^2 + 2\eta y_G + y_G^2 + \zeta^2 + 2\zeta z_G + z_G^2 \right] dc \\ &= \int_C \mu (\eta^2 + \zeta^2) dc + (y_G^2 + z_G^2) \int_C \mu dc + 2y_G \left(\int_C \mu \eta dc \right) + 2z_G \left(\int_C \mu \zeta dc \right) \\ &= I_\xi + m (y_G^2 + z_G^2) + 2y_G (m\eta_G) + 2z_G (m\zeta_G) \\ &= I_\xi + m (y_G^2 + z_G^2) \end{aligned}$$

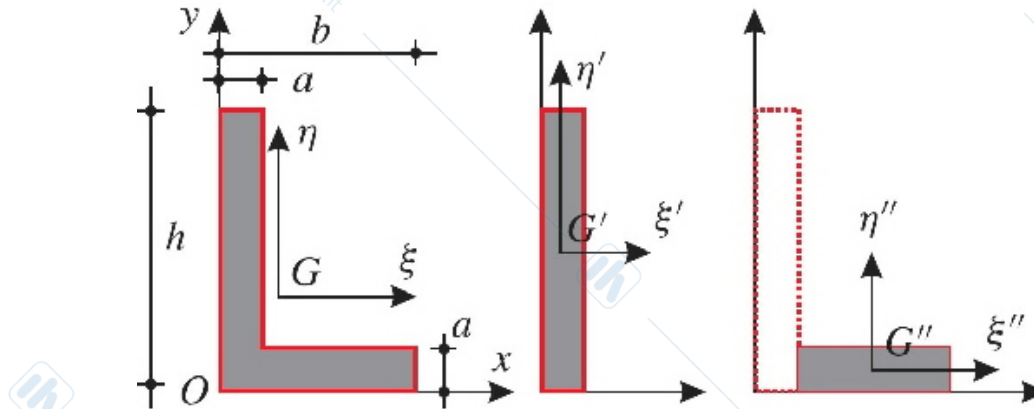
Teorema di Huyghens-Steiner: Siano s_0 ed s due rette parallele e $G \in s_0$, allora si ha

$$I_s = I_{s_0} + md_G^2, \quad d_G = d(G, s) \equiv d(s_0, s). \quad (5)$$

$$s \parallel s' \quad I_{s'} = I_s + m(d_G'^2 - d_G^2), \quad d_G' = d(G, s'), \quad d_G = d(G, s). \quad (6)$$



Esempio 1. Calcolare i momenti d'inerzia rispetto agli assi $G\xi\eta\zeta$ della sezione ad L



$$I_{\xi} \stackrel{D}{=} I'_{\xi} + I''_{\xi} \stackrel{H-S}{=} I'_{\xi'} + m' (y_{G'} - y_G)^2 + I''_{\xi''} + m'' (y_{G''} - y_G)^2,$$

$$I_{\eta} \stackrel{D}{=} I'_{\eta} + I''_{\eta} \stackrel{H-S}{=} I'_{\eta'} + m' (x_{G'} - x_G)^2 + I''_{\eta''} + m'' (x_{G''} - x_G)^2,$$

$$S' : m' = \rho a h, \quad G' \equiv \left(\frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right) \quad S'' : m'' = \rho (b - a) a, \quad G'' \equiv \left(\frac{b + a}{2}, \frac{a}{2} \right),$$

$$S = S' \cup S'' : m = \rho a (h + b - a), \quad G \equiv \left(\frac{b^2 + a (h - a)}{2 (h + b - a)}, \frac{h^2 + a (b - a)}{2 (h + b - a)} \right),$$

$$I'_{\xi} = \rho a h^3 / 12, \quad I'_{\eta} = \rho (b - a) a^3 / 12, \quad I''_{\xi} = \rho a^3 h / 12, \quad I''_{\eta} = \rho (b - a)^3 a / 12.$$

1.2 Prodotti d'inerzia

In una terna di riferimento $Oxyz$, i **prodotti d'inerzia** di un sistema S sono

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i, \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad (7)$$

$$I_{xy} = \int_C \rho(P) xy dc, \quad I_{xz} = \int_C \rho(P) xz dc, \quad I_{yz} = \int_C \rho(P) yz dc.$$

sistema piano ($z = 0$) $I_{xz} = I_{yz} = 0.$

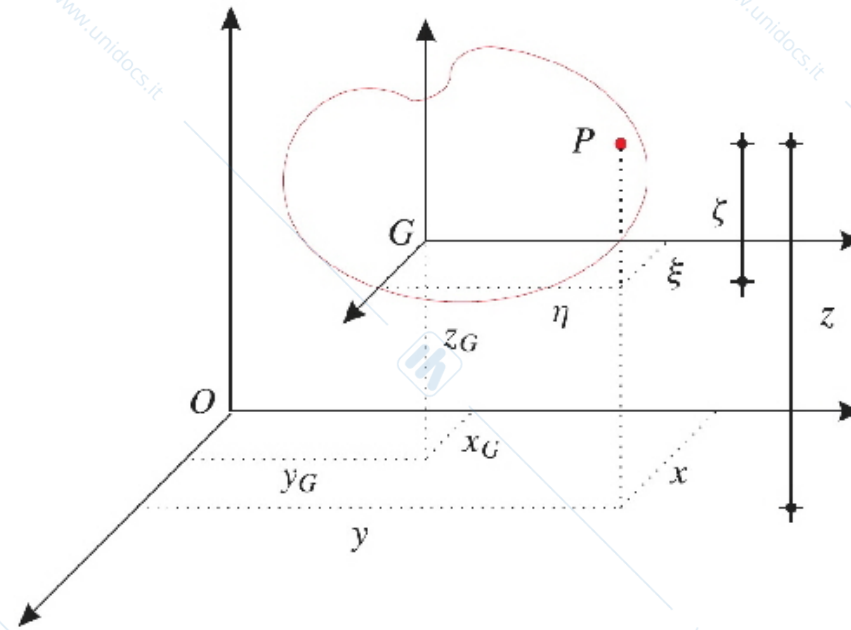
Proprietà distributiva

$$S = S' \cup S'' \quad I_{xy} = I'_{xy} + I''_{xy}, \quad I_{xz} = I'_{xz} + I''_{xz}, \quad I_{yz} = I'_{yz} + I''_{yz}.$$

Teorema degli assi paralleli

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + m x_G y_G, \quad I_{xz} = I_{\xi\zeta} + m x_G z_G, \quad I_{yz} = I_{\eta\zeta} + m y_G z_G. \quad (8)$$

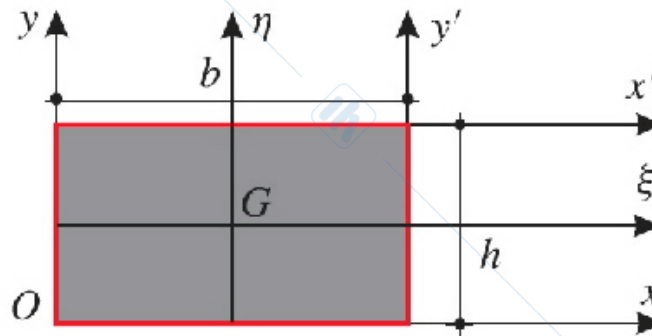
$$\forall P \in S \quad x = \xi + x_G, \quad y = \eta + y_G, \quad z = \zeta + z_G$$



$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int_C \mu x y d c = \int_C \mu (\xi + x_G) (\eta + y_G) d c \\
 &= \int_C \mu \xi \eta d c + x_G y_G \int_C \mu d c + y_G \int_C \mu \xi d c + x_G \int_C \mu \eta d c \\
 &= I_{\xi \eta} + m x_G y_G + y_G m \xi_G + x_G m \eta_G = I_{\xi \eta} + m x_G y_G.
 \end{aligned}$$

$$G \in Ox, Oy, Oz \Rightarrow I_{xy} = I_{\xi\eta}, \quad I_{xz} = I_{\xi\zeta}, \quad I_{yz} = I_{\eta\zeta}$$

Esempio 2. Calcolare i prodotti d'inerzia del rettangolo omogeneo rispetto agli assi $xy, \xi\eta, x'y'$



$$I_{xy} = \rho \int_0^b \int_0^h xy dx dy = \rho \frac{b^2 h^2}{4}, \quad I_{xz} = I_{yz} = 0,$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - m x_G y_G = \rho \frac{b^2 h^2}{4} - \rho b h \frac{b h}{2 \cdot 2} = 0, \quad I_{\xi\zeta} = I_{\eta\zeta} = 0$$

$$I_{x'y'} = I_{\xi\eta} + m x'_G y'_G = \rho b h \frac{b h}{2 \cdot 2} = \frac{\rho b^2 h^2}{4}, \quad I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0$$

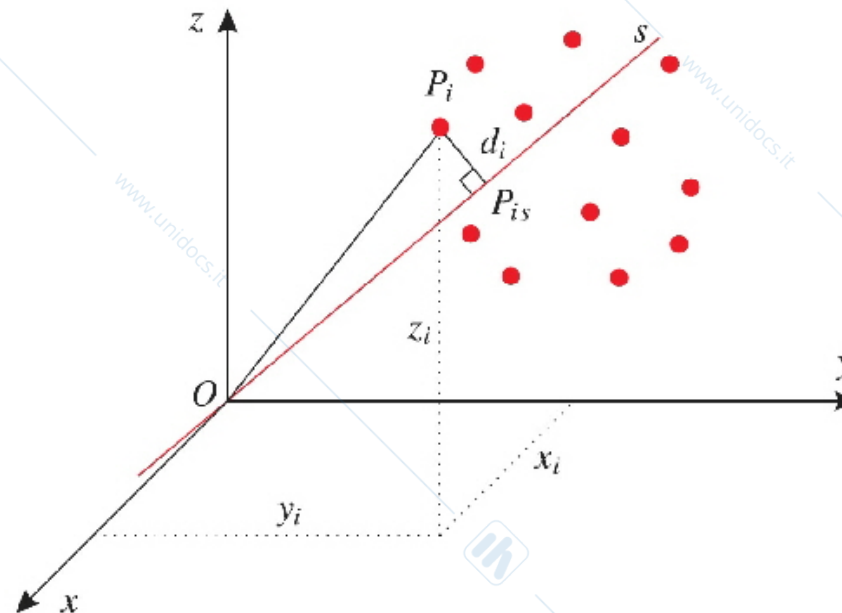
1.3 Momenti principali d'inerzia

Si considerino un sistema S di punti materiali e una retta s per l'origine O in un sistema di assi $Oxyz$, siano α, β, γ i coseni direttori di s

$$\mathbf{s} = \text{ver } s = (\alpha, \beta, \gamma), \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (9)$$

Sia \mathbf{r}_i il vettore di posizione di P_i rispetto ad O e

$$|\mathbf{r}_i|^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad |OP_{is}|^2 = (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s})^2 = (x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma)^2.$$



Il momento d'inerzia di S rispetto ad s può esprimersi in funzione di α, β, γ

$$I_s = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \beta - 2I_{xz} \alpha \gamma - 2I_{yz} \beta \gamma \quad (10)$$

e consente di valutare I_s rispetto ad una qualsiasi retta s uscente da O quando si siano calcolati i momenti I_x, I_y, I_z e i prodotti d'inerzia I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} di S .

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} d_i^2 &= \left(|\mathbf{r}_i|^2 - |OP_{is}|^2 \right) = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i \alpha + y_i \beta + z_i \gamma)^2 \\ &= x_i^2 (\beta^2 + \gamma^2) + y_i^2 (\alpha^2 + \gamma^2) + z_i^2 (\alpha^2 + \beta^2) - 2x_i y_i \alpha \beta - 2x_i z_i \alpha \gamma - 2y_i z_i \beta \gamma \\ &= \alpha^2 (x_i^2 + y_i^2) + \beta^2 (x_i^2 + z_i^2) + \gamma^2 (x_i^2 + y_i^2) - 2\alpha \beta x_i y_i - 2\alpha \gamma x_i z_i - 2\beta \gamma y_i z_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_s &= \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) + \beta^2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) + \gamma^2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ &\quad - 2\alpha \beta \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i - 2\alpha \gamma \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i - 2\beta \gamma \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \\ &= I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \beta - 2I_{xz} \alpha \gamma - 2I_{yz} \beta \gamma \end{aligned}$$

Per ogni retta s uscente da O , supposto $I_s > 0$, si consideri il luogo (geometrico) dei punti $Q(x, y, z) \in s$ tali che

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{I_s}}, \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{I_s}}, \quad z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_s}} \quad (11)$$

$$E_O = \left\{ Q(x, y, z) \in s : \mathbf{r}_Q = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{I_s}} \right\} \quad \forall s : \mathbf{s} = \text{ver } s = (\alpha, \beta, \gamma). \quad (12)$$

Sostituendo le (11) nella (10) si ottiene l'equazione dell'**ellissoide di inerzia** E_O

$$E_O : \quad I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz}yz = 1. \quad (13)$$

Se $O \equiv G$ si ottiene l'**ellissoide centrale d'inerzia** E_G .

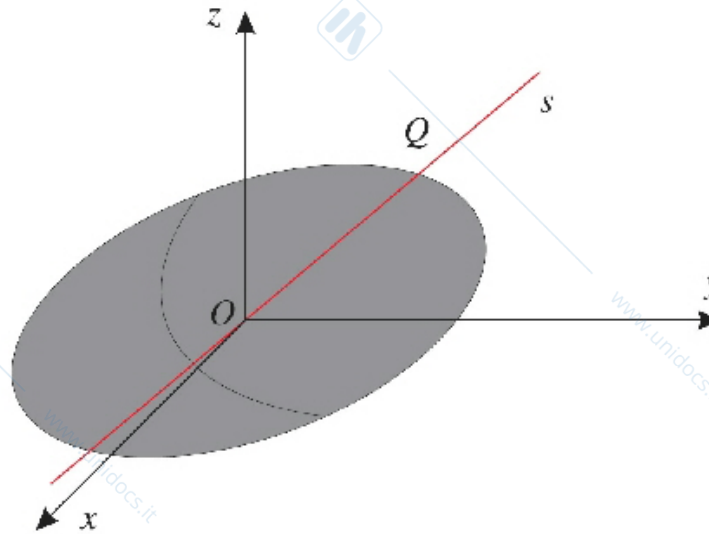
*I momenti d'inerzia relativi ai tre assi dell'ellissoide si definiscono **momenti principali d'inerzia**, e gli assi dell'ellissoide d'inerzia sono **assi principali d'inerzia**.*

Si osservi che *determinato l'ellissoide d'inerzia E_O è noto il momento d'inerzia relativo ad ogni retta s uscente da O .*

Infatti, se $Q \in s \cap E_O$ allora si ha

$$|OQ| = \frac{1}{\sqrt{I_s}} \iff I_s = \frac{1}{|OQ|^2}, \quad (14)$$

e quindi *agli assi principali d'inerzia competono momenti d'inerzia minimo o massimo.*



In particolare, dalla (14) risulta evidente che all'asse maggiore dell'ellissoide compete momento minimo e a quello minore il momento d'inerzia massimo.

Se esiste una retta \bar{s} passante per $O : I_{\bar{s}} = 0$, allora i punti del sistema S sono tutti allineati su \bar{s} .

Si consideri il sistema di assi $Oxyz$ con l'asse z coincidente con \bar{s} , allora

$$\forall P_i \in S \quad x_i = y_i = 0 \implies I_x = I_y = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2, \quad I_z = I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad (15)$$

e il luogo dei punti (13) si riduce ad un *cilindro (rotondo)* il cui asse di simmetria z è asse principale d'inerzia

$$C_O : \quad I_x x^2 + I_y y^2 = 1, \quad I_x = I_y. \quad (16)$$

Per l'ellissoide d'inerzia valgono le seguenti proprietà

1. L'asse z sia un asse di simmetria per l'ellissoide d'inerzia (asse principale), allora

$$(x, y, z) \in E_O \implies (x, y, -z) \in E_O \quad (17)$$

e l'equazione dell'ellissoide (14), essendo $I_{xz} = I_{yz} = 0$, diventa

$$E_O : \quad I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy = 1,$$

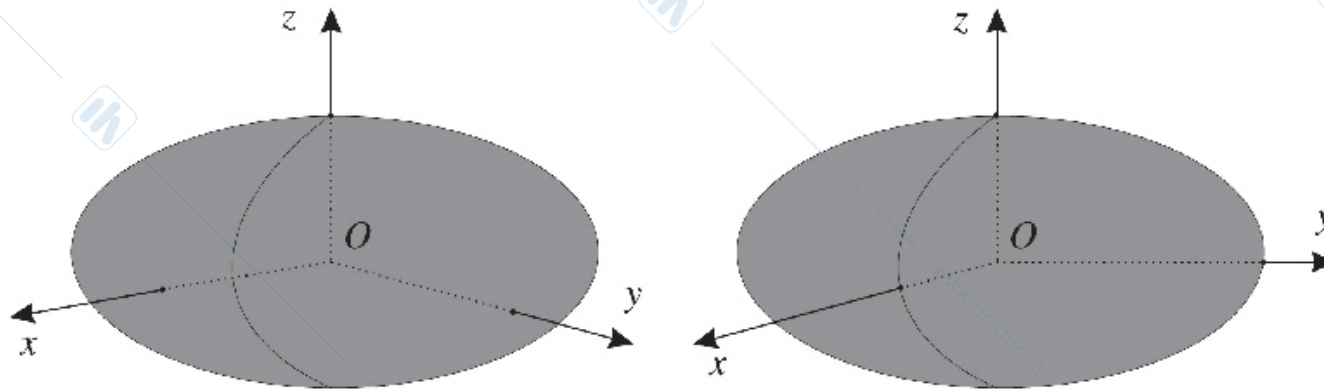
e vale anche il viceversa, cioè si è dimostrato che

$$z \text{ è asse principale d'inerzia} \iff I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

2. *Se due assi del sistema sono principali d'inerzia, allora lo è anche il terzo.*
 Si supponga che gli assi x e y siano principali d'inerzia, allora

$$I_{xy} = I_{xz} = 0, \quad I_{yx} = I_{yz} = 0$$

e quindi anche l'asse z è principale d'inerzia ($I_{xz} = I_{yz} = 0$).



3. *Una terna è principale d'inerzia se e solo se $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$*

In una terna principale d'inerzia l'ellissoide d'inerzia assume la *forma canonica*

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \quad (18)$$

4. Se $\pi = xy$ è un piano di simmetria per il sistema S , allora $I_{xz} = I_{yz} = 0$ e quindi

$$E_O : \quad I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy = 1 \quad \forall O \in \pi. \quad (19)$$

Inoltre, poichè il baricentro G appartiene al piano π di simmetria per S , si ha

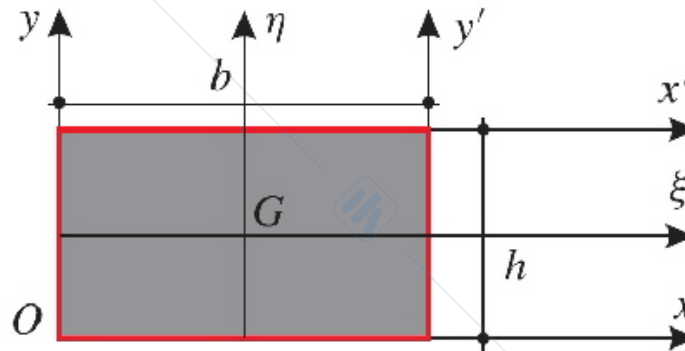
$$E_G : \quad I_\xi \xi^2 + I_\eta^2 \eta + I_\zeta^2 \zeta - 2I_{\xi\eta} \xi \eta = 1$$

5. Per un *sistema piano* S i cui punti appartengono al piano $\pi = xy$ si ha $I_{xz} = I_{yz} = 0$ e quindi

$$E_O : \quad I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy = 1 \quad I_z = I_x + I_y \quad \forall O \in \pi$$

e anche per E_G si ottiene un'equazione del tutto analoga.

Esempio 3. Si determinino gli ellissoidi d'inerzia relativi alle origini dei riferimenti $Oxy, G\xi\eta\zeta$ di un rettangolo omogeneo di lati b ed h .



Ricordando che per un sistema piano risulta

$$I_x = \int_C \mu(P) y^2 dc, \quad I_y = \int_C \mu(P) x^2 dc, \quad I_{xy} = \int_C \mu(P) xy dc, \quad I_z = I_x + I_y, \quad I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$E_O : \quad I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1 \quad \forall O \in \pi$$

$$I_x = \mu \int_0^h dy \int_0^b y^2 dx = \frac{\mu b h^3}{3}, \quad I_y = \mu \int_0^h dy \int_0^b x^2 dx = \frac{\mu b^3 h}{3}, \quad I_z = \frac{\mu b h}{3} (h^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = \mu \int_0^h dy \int_0^b xy dx = \frac{\mu b^2 h^2}{4}, \quad I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$E_O : \quad \frac{\mu b h^3}{3} x^2 + \frac{\mu b^3 h}{3} y^2 + \frac{\mu b h}{3} (h^2 + b^2) z^2 - 2 \frac{\mu b^2 h^2}{4} xy = 1 \quad \forall O \in \pi$$

L'asse z è un asse principale d'inerzia ($I_{xz} = I_{yz} = 0$).

$$m = \mu b h, \quad G = (b/2, h/2)$$

$$I_x = I_\xi + m y_G^2, \quad I_y = I_\eta + m x_G^2, \quad I_z = I_\zeta + I_\eta, \quad I_{xy} = I_{\xi\eta} + m x_G y_G, \quad I_{xz} = I_{\xi\zeta},$$

$$I_{yz} = I_{\eta\zeta}, \quad E_G : \quad I_\xi \xi^2 + I_\eta \eta^2 + I_\zeta \zeta^2 - 2 I_{\xi\eta} \xi \eta = 1$$

$$I_\xi = I_x - m y_G^2 = \frac{\mu b h^3}{3} - \mu b h \frac{h^2}{4} = \frac{\mu b h^3}{12}, \quad I_\eta = \frac{\mu b^3 h}{12}, \quad I_\zeta = \frac{\mu b h}{12} (h^2 + b^2)$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - m x_G y_G = 0, \quad I_{\xi\zeta} = I_{\eta\zeta} = 0$$

$$E_G : \quad \frac{\mu b h^3}{12} \xi^2 + \frac{\mu b^3 h}{12} \eta^2 + \frac{\mu b h}{12} (h^2 + b^2) \zeta^2 = 1.$$

Si osservi che la terna baricentrale è principale d'inerzia ($I_{\xi\eta} = I_{\xi\zeta} = I_{\eta\zeta} = 0$).

Determinazione degli assi principali d'inerzia di un sistema piano

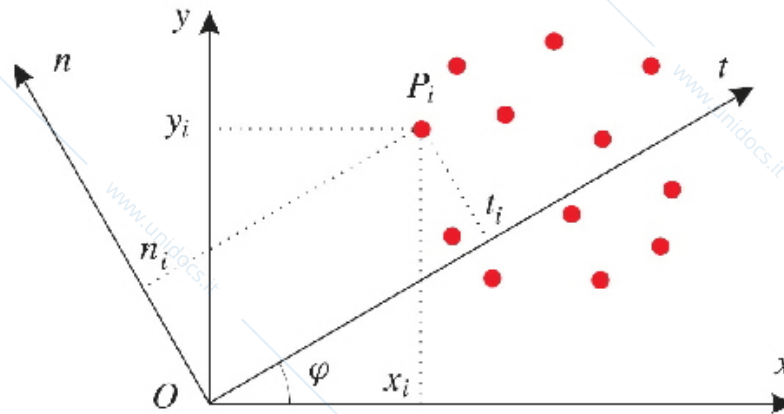
Si consideri un sistema S i cui punti appartengono al piano $\pi = xy$.

Poichè l'asse z è principale d'inerzia, la ricerca di una terna principale d'inerzia è limitata alla determinazione di due assi nel piano xy .

Si consideri una retta s del piano xy

$$\mathbf{s} = \text{ver } s = (\alpha, \beta, 0) \equiv (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (20)$$

dove φ è l'angolo che la retta s forma con l'asse x .



Il momento d'inerzia di S rispetto ad s è

$$I_s = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \cos \varphi \sin \varphi \quad (21)$$

e l'ellissoide d'inerzia

$$E_O : I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy = 1 \quad \forall O \in \pi$$

interseca il piano xy in un'ellisse di equazione

$$E_O \cap \pi : I_x x^2 + I_y y^2 - 2I_{xy}xy = 1 \quad \forall O \in \pi. \quad (22)$$

Sono possibili, allora i due seguenti casi

- gli assi x ed y sono principali d'inerzia.

Allora, in questo caso l'ellisse (22) assume la forma canonica

$$E_O \cap \pi : I_x x^2 + I_y y^2 = 1 \quad \forall O \in \pi. \quad (23)$$

- gli assi x ed y non sono principali d'inerzia.

Allora, è possibile individuare gli assi principali d'inerzia r_1 ed r_2 imponendo che ad essi competa momento d'inerzia minimo o massimo.

Siano r_1 ed r_2 detti assi e si supponga che φ_1 e φ_2 siano gli angoli formati dalle rette con l'asse delle x .

Per determinare il minimo e il massimo di I_s si cominci con l'imporre che tali rette siano punti di stazionarietà per $I_s(\varphi)$

$$\frac{dI_s(\varphi)}{d\varphi} = 0 \iff \frac{d}{d\varphi} (I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \cos \varphi \sin \varphi) = 0$$

$$\iff (I_x - I_y) \sin 2\varphi + 2I_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

allora si ha

– se $\cos 2\varphi = 0$ si ha $\varphi = \pi/4 + k\pi/2$ da cui si ottiene

$$\varphi_1 = -\pi/4 \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2 = \pi/4$$

– se $I_x = I_y$ allora $\cos 2\varphi = 0$ e ci si riconduce al caso precedente in cui

$$\varphi_1 = -\pi/4 \quad \varphi_2 = \pi/4$$

– se $I_x \neq I_y$ e $\cos 2\varphi \neq 0$ si ha

$$\sin 2\varphi = -\frac{2I_{xy} \cos 2\varphi}{I_x - I_y} \iff \tan 2\varphi = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

da cui a meno della periodicità si ottengono due valori per l'angolo φ che differiscono per $\pi/2$.

Meccanica Razionale

A. Marasco

Lezione N. 23 del 10 Dicembre 2020

1 Geometria delle masse

1.1 Momenti principali ed ellissoide d'inerzia

In un sistema di assi $Oxyz$, siano S un sistema discreto o continuo di punti materiali ed s una retta per l'origine O

$$\mathbf{s} = \text{ver } s = (\alpha, \beta, \gamma), \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (1)$$

Il momento d'inerzia di S rispetto ad s può esprimersi in funzione di α, β, γ , dei momenti I_x, I_y, I_z e dei prodotti d'inerzia I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}

$$I_s = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \beta - 2I_{xz} \alpha \gamma - 2I_{yz} \beta \gamma. \quad (2)$$

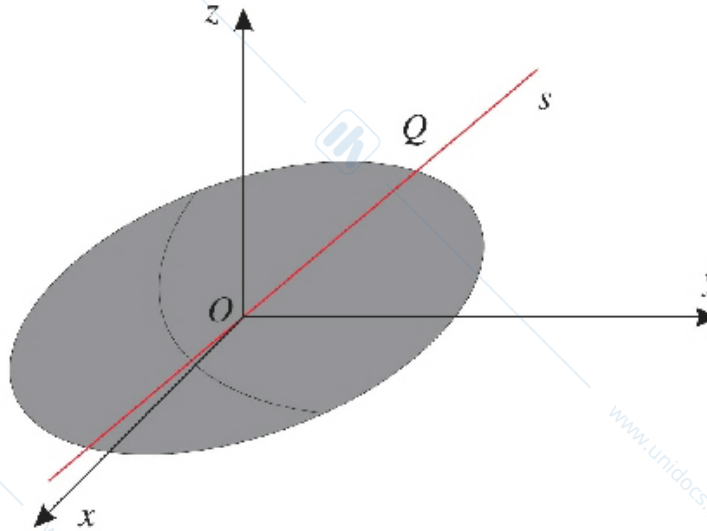
Per ogni retta s uscente da O , supposto $I_s > 0$, si definisce **ellissoide di inerzia** relativo ad O il luogo (geometrico)

$$E_O = \left\{ Q(x, y, z) \in s : \mathbf{r}_Q = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{I_s}} \right\} \quad \forall s : \mathbf{s} = \text{ver } s = (\alpha, \beta, \gamma) \quad (3)$$

$$E_O : I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{xz} xz - 2I_{yz} yz = 1. \quad (4)$$

Se $O \equiv G$ si ottiene l'**ellissoide centrale d'inerzia** E_G .

*I momenti d'inerzia relativi ai tre assi dell'ellissoide si definiscono **momenti principali d'inerzia**, e gli assi dell'ellissoide d'inerzia sono **assi principali d'inerzia**.*



Determinato l'ellissoide d'inerzia E_O è noto il momento d'inerzia relativo ad ogni retta s uscente da O

$$P \in s \cap E_O \quad |OP| = \frac{1}{\sqrt{I_s}} \iff I_s = \frac{1}{|OP|^2}, \quad (5)$$

e quindi agli assi principali d'inerzia competono momenti d'inerzia minimo o massimo.

Se esiste una retta \bar{s} passante per O : $I_{\bar{s}} = 0$, allora i punti del sistema S sono tutti allineati su \bar{s} .

Si consideri il sistema di assi $Oxyz$ con l'asse z coincidente con \bar{s} , allora

$$\forall P_i \in S \quad x_i = y_i = 0 \implies I_x = I_y = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2, \quad I_z = I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad (6)$$

e il luogo dei punti (4) si riduce ad un *cilindro* il cui asse di simmetria z è asse principale d'inerzia

$$C_O : \quad I_x x^2 + I_y y^2 = 1, \quad I_x = I_y. \quad (7)$$

Per l'ellissoide d'inerzia valgono le seguenti proprietà

1. L'asse z sia un asse di simmetria per l'ellissoide d'inerzia, allora

$$z \text{ è asse principale d'inerzia} \iff I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

2. Se due assi del sistema sono principali d'inerzia, allora lo è anche il terzo.

3. Una terna è principale d'inerzia se e solo se $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$, in questa terna

l'ellissoide d'inerzia assume la *forma canonica*

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \quad (8)$$

4. Se $\pi = xy$ è un piano di simmetria, allora $G \in \pi$ e

$$E_O : I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy = 1 \quad \forall O \in \pi. \quad (9)$$

$$E_G : I_\xi \xi^2 + I_\eta^2 \eta + I_\zeta^2 \zeta - 2I_{\xi\eta} \xi \eta = 1$$

5. Per un *sistema piano* S i cui punti appartengono al piano $\pi = xy$ si ha

$$E_O : I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy = 1 \quad I_z = I_x + I_y \quad \forall O \in \pi$$

e anche per E_G si ottiene un'equazione del tutto analoga.

Determinazione degli assi principali d'inerzia di un sistema piano

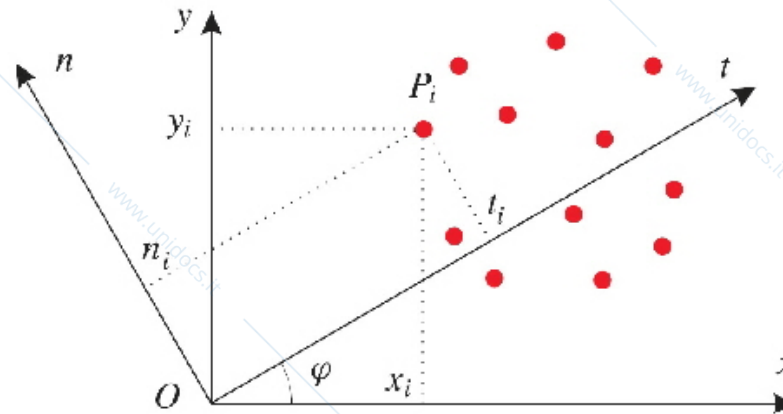
Si consideri un sistema S i cui punti appartengono al piano $\pi = xy$.

Poichè l'asse z è principale d'inerzia, la ricerca di una terna principale d'inerzia è limitata alla determinazione di due assi nel piano xy .

Si consideri una retta s del piano xy

$$\mathbf{s} = \text{ver } s = (\alpha, \beta, 0) \equiv (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (10)$$

dove φ è l'angolo che la retta s forma con l'asse x .



Il momento d'inerzia di S rispetto ad s è

$$I_s = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \cos \varphi \sin \varphi \quad (11)$$

e l'ellissoide d'inerzia

$$E_O : I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1 \quad \forall O \in \pi$$

interseca il piano xy in un'ellisse di equazione

$$E_O \cap \pi : I_x x^2 + I_y y^2 - 2I_{xy} xy = 1 \quad \forall O \in \pi. \quad (12)$$

Sono possibili, allora i due seguenti casi

- gli assi x ed y sono principali d'inerzia.

Allora, in questo caso l'ellisse (12) assume la forma canonica

$$E_O \cap \pi : I_x x^2 + I_y y^2 = 1 \quad \forall O \in \pi. \quad (13)$$

- gli assi x ed y non sono principali d'inerzia.

Allora, è possibile individuare gli assi principali d'inerzia r_1 ed r_2 imponendo che ad essi competa momento d'inerzia minimo o massimo.

Siano r_1 ed r_2 detti assi e si supponga che φ_1 e φ_2 siano gli angoli formati dalle rette con l'asse delle x .

Per determinare il minimo e il massimo di I_s si cominci con l'imporre che tali rette

siano punti di stazionarietà per $I_s(\varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{dI_s(\varphi)}{d\varphi} = 0 &\iff \frac{d}{d\varphi} (I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \cos \varphi \sin \varphi) = 0 \\ &\iff (I_x - I_y) \sin 2\varphi + 2I_{xy} \cos 2\varphi = 0 \end{aligned}$$

allora si ha

– se $\cos 2\varphi = 0$ si ha $\varphi = \pi/4 + k\pi/2$ da cui si ottiene

$$\varphi_1 = -\pi/4 \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2 = \pi/4$$

– se $I_x = I_y$ allora $\cos 2\varphi = 0$ e ci si riconduce al caso precedente in cui

$$\varphi_1 = -\pi/4 \quad \varphi_2 = \pi/4$$

– se $I_x \neq I_y$ e $\cos 2\varphi \neq 0$ si ha

$$\sin 2\varphi = -\frac{2I_{xy} \cos 2\varphi}{I_x - I_y} \iff \tan 2\varphi = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

da cui a meno della periodicità si ottengono due valori per l'angolo φ che differiscono per $\pi/2$.

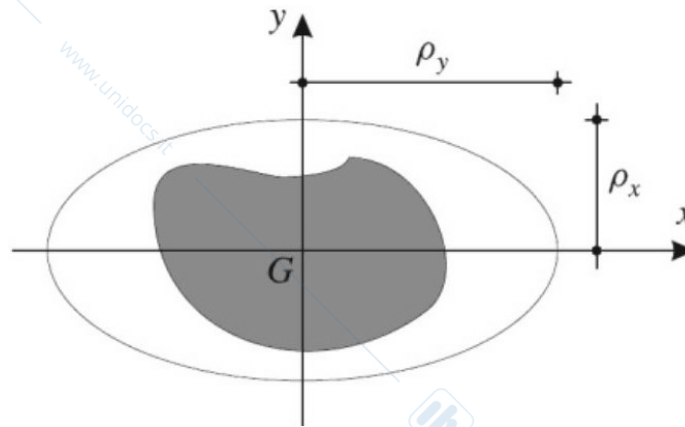
1.2 Ellisse di Culmann e antipolarità

Si consideri un *sistema piano* S e un riferimento baricentrale Gxy principale d'inerzia. Allora, se m è la massa di S , i due raggi d'inerzia sono

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}}, \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}}. \quad (14)$$

Si definisce **ellisse di Culmann** l'ellisse di semiassi ρ_x e ρ_y , cioè la conica di equazione

$$\frac{x^2}{\rho_y^2} + \frac{y^2}{\rho_x^2} = 1. \quad (15)$$



Si consideri la seguente corrispondenza tra punti e rette del piano ad esclusione del baricentro G del sistema S e delle rette da esso uscenti

$$A = (x_A, y_A) \longrightarrow \frac{x_A}{\rho_y^2}x + \frac{y_A}{\rho_x^2}y + 1 = 0 \quad \forall A \neq G \quad (16)$$

$$r : px + qy + 1 = 0 \longrightarrow A = (x_A, y_A) : x_A = p\rho_y^2, \quad y_A = q\rho_x^2 \quad \forall r : G \notin r \quad (17)$$

La corrispondenza definita nelle (16) e (17) è detta **antipolarità**, la retta associata ad ogni punto $A \neq G$ è detta **antipolare**, laddove il punto A associato alla retta r mediante la (17) è detto **antipolo**.

Esempio 1. *Determinare gli antipoli delle rette parallele agli assi e delle seguenti rette*

$$a_1 : x = -\rho_y \quad a_2 : x = \rho_y \quad a_3 : x = -\rho_y/2 \quad a_4 : a = 2\rho_y$$

$$px + qy + 1 = 0 \longrightarrow A = (x_A, y_A) : x_A = p\rho_y^2, \quad y_A = q\rho_x^2 \quad \forall r : G \notin r$$

$$a_1 : \frac{1}{\rho_y}x + 1 = 0 \longrightarrow A_1 = (\rho_y, 0)$$

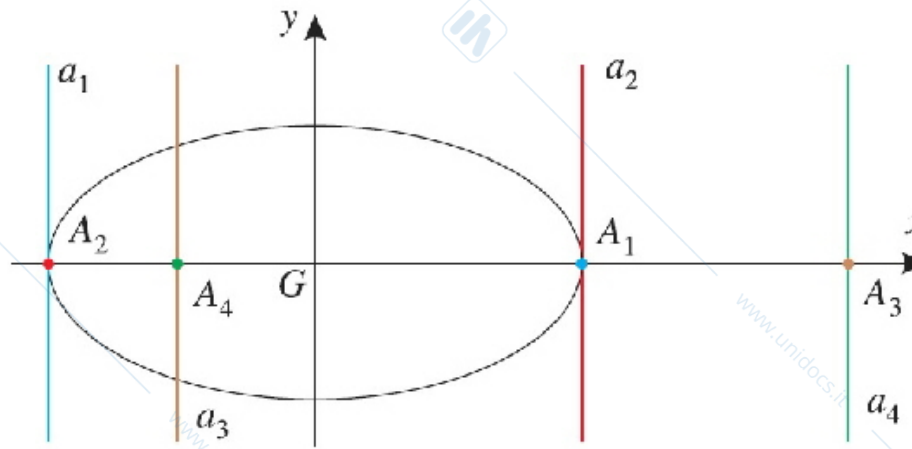
$$a_2 : -\frac{1}{\rho_y}x + 1 = 0 \longrightarrow A_2 = (-\rho_y, 0)$$

$$a_3 : \frac{2}{\rho_y}x + 1 = 0 \longrightarrow A_3 = (2\rho_y, 0)$$

$$a_4 : -\frac{1}{2\rho_y}x + 1 = 0 \longrightarrow A_4 = \left(-\frac{\rho_y}{2}, 0\right)$$

rette $\parallel x$ $qy+1 = 0 \longrightarrow A_x = (0, q\rho_x^2)$

rette $\parallel y$ $px+1 = 0 \longrightarrow A_y = (p\rho_y^2, 0)$



Teorema di reciprocità. *Siano A e B gli antipoli delle retta a e b, allora*

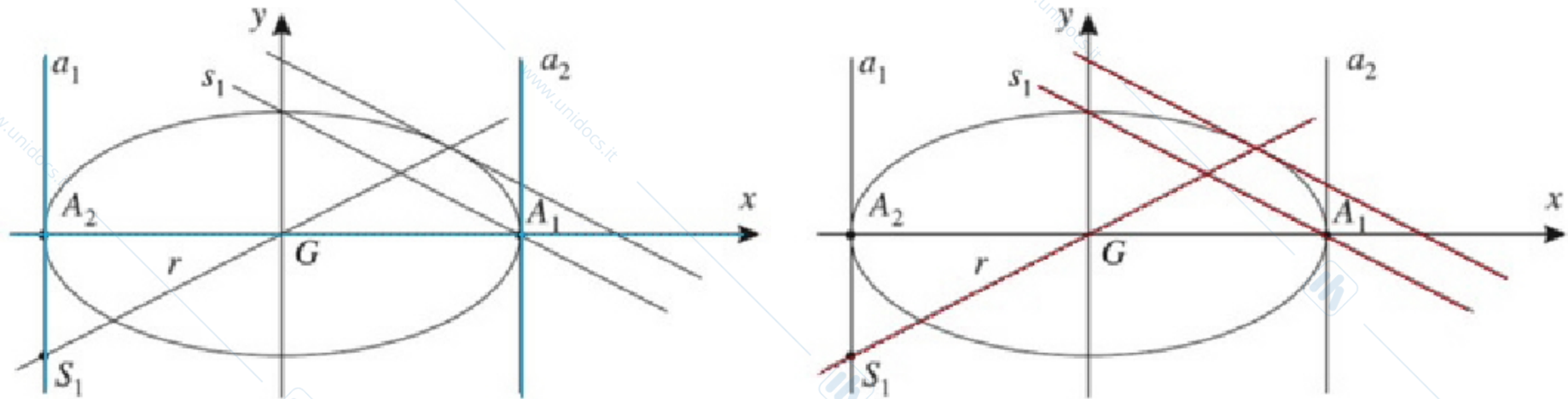
$$A \in \text{retta } b \implies B \in \text{retta } a$$

- Sia A l'antipolo della retta a , allora ogni retta s_A di centro A ha l'antipolo $S_A \in a$
 $(A, a), \quad \forall s_A \text{ di centro } A \implies S_A \in a$
- Gli antipoli di un fascio di rette parallele appartengono alla stessa retta r_G passante per il baricentro, detta **diametro coniugato** alla direzione del fascio di rette parallele

$$\forall a, b : a \parallel b \implies A, B \in r_G$$

Costruzione del diametro coniugato

Dato un fascio di rette parallele, si consideri la retta del fascio tangente all'ellisse di Culmann. Il diametro coniugato è la retta passante per il punto di tangenza e per G



Si consideri un fascio di rette parallele e siano a e b due rette del fascio e A e B i corrispondenti antipoli, allora A e B appartengono allo stesso diametro (retta per G). I punti A e B sono detti **punti coniugati nell'antipolarità** e si ha

$$|AG| |BG| = \text{cost}$$

dove la costante dipende dal diametro.

Nell'Esempio 1. poichè le rette a_1, \dots, a_4 sono parallele gli antipoli appartengono allo stesso diametro e risulta

$$|A_1G| |A_2G| = |A_3G| |A_4G| = \rho_y^2.$$

Antipolarità per G e per le rette passanti per G

retta r per G \longrightarrow punto improprio della direzione del fascio di cui r è diametro coniugato

G \longrightarrow retta impropria

In particolare, la retta impropria contiene tutte le direzioni dei fasci di rette parallele di cui una retta per G è il diametro coniugato.

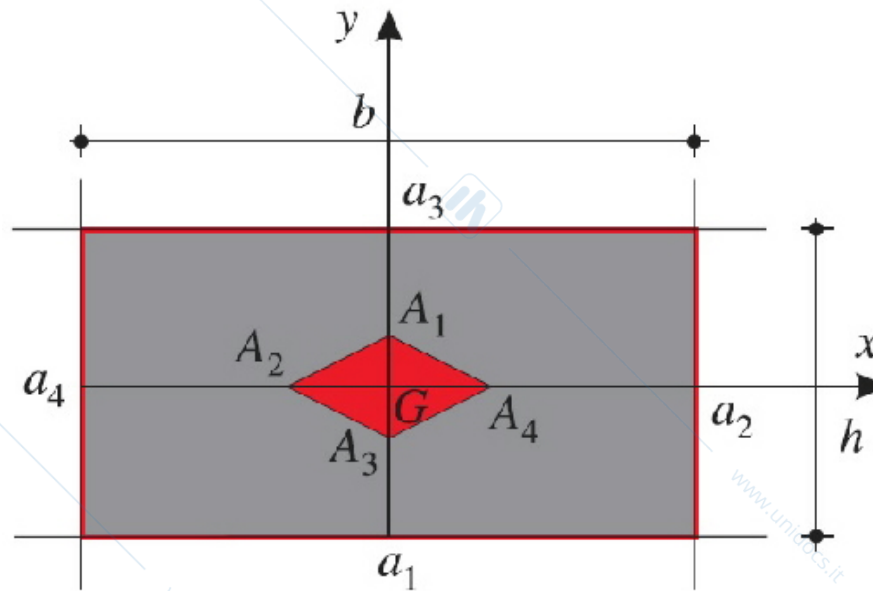
1.3 Nocciolo (centrale) d'inerzia

Sia S un sistema continuo piano.

Il **nocciolo d'inerzia** è il luogo dei punti formato dagli antipoli, rispetto all'ellisse di Culmann, delle rette che non tagliano il sistema S , cioè delle rette esterne o tangenti ad S .

- Il baricentro G di S appartiene al nocciolo d'inerzia.
- Poichè maggiore è la distanza di una retta r da G minore è quella del suo antipolo R , la *frontiera del nocciolo d'inerzia* è individuata degli antipoli delle rette che hanno qualche punto in comune con S ma senza intersecarlo.
- Gli antipoli di rette esterne al sistema S sono punti interni al nocciolo d'inerzia.
- Il nocciolo d'inerzia è sempre un dominio convesso.

Esempio 2. Determinare l'ellisse di Culmann e il nocciolo d'inerzia di un rettangolo omogeneo



Osservando che gli assi sono centrali d'inerzia, per determinare l'ellisse di Culmann è sufficiente calcolare i raggi d'inerzia

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{\mu b h^3}{12} \frac{1}{\mu b h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}}, \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} = \sqrt{\frac{\mu b^3 h}{12} \frac{1}{\mu b h}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}}$$

$$\frac{x^2}{\rho_y^2} + \frac{y^2}{\rho_x^2} = 1 \iff \frac{x^2}{b^2/12} + \frac{y^2}{h^2/12} = 1.$$

Per determinare il nocciolo d'inerzia è sufficiente individuare gli antipoli delle rette passanti per i vertici e i lati del rettangolo

$$r : px + qy + 1 = 0 \longrightarrow A = (x_A, y_A) : x_A = p\rho_y^2, \quad y_A = q\rho_x^2 \quad \forall r \neq r_G$$

$$A = (x_A, y_A) \longrightarrow \frac{x_A}{\rho_y^2}x + \frac{y_A}{\rho_x^2}y + 1 = 0 \quad \forall A \neq G$$

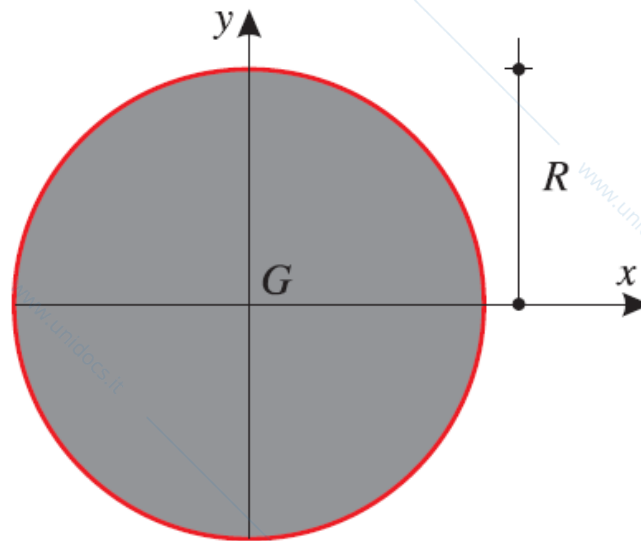
$$\left[\begin{array}{l} a_1 : y = -\frac{h}{2} \quad \left(\frac{2}{h}y + 1 = 0 \right) \longrightarrow A_1 = \left(0, \frac{h}{6} \right) \\ a_2 : x = \frac{b}{2} \quad \left(-\frac{2}{b}x + 1 = 0 \right) \longrightarrow A_2 = \left(-\frac{b}{6}, 0 \right) \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{l} a_3 : y = \frac{h}{2} \longrightarrow A_3 = \left(0, -\frac{h}{6} \right) \\ a_4 : x = -\frac{b}{2} \longrightarrow A_4 = \left(\frac{b}{6}, 0 \right) \end{array} \right]$$

$$V_{12} = \left(\frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) \longrightarrow r_{12} : \frac{6}{b}x - \frac{6}{h}y + 1 = 0 \quad V_{34} = \left(-\frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \longrightarrow r_{34} : -\frac{6}{b}x + \frac{6}{h}y + 1 = 0$$

$$V_{23} = \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \longrightarrow r_{23} : \frac{6}{b}x + \frac{6}{h}y + 1 = 0 \quad V_{14} = \left(-\frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) \longrightarrow r_{14} : -\frac{6}{b}x - \frac{6}{h}y + 1 = 0$$

Osservando che le rette della stella di centro V_{ij} hanno l'antipolo sulla retta r_{ij} passante per A_i e A_j si ottiene il segmento di estremi $A_i A_j$.

Esempio 3. Determinare l'ellisse di Culmann e il nocciolo d'inerzia di un disco omogeneo di raggio R .



I raggi d'inerzia di un disco omogeneo sono $\rho_x = \rho_y = R/2$ e quindi l'ellisse di Culmann è una circonferenza di raggio $R/2$.

Il nocciolo d'inerzia può facilmente ottenersi considerando che la sua frontiera è determinata dagli antipoli delle rette tangenti al disco.

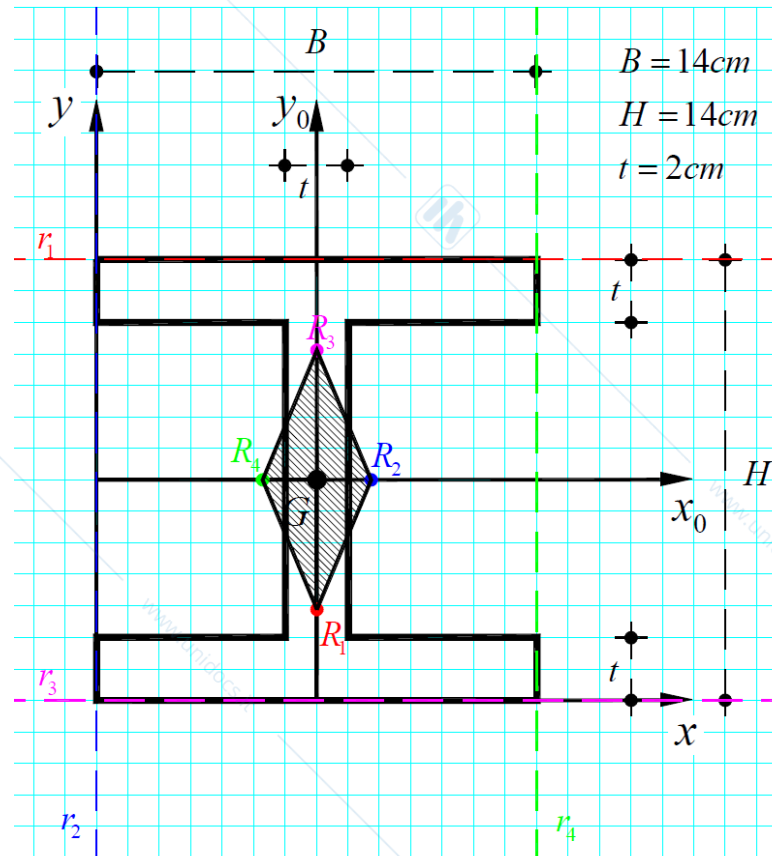
D'altra parte, per la simmetria, è facile convincersi che il nocciolo d'inerzia è un disco di raggio $R/4$.

Infatti, si considerino ad esempio le rette tangenti al disco e parallele agli assi x e y

$$\begin{aligned} a_1 : -\frac{y}{R} + 1 = 0 &\longrightarrow A_1 = \left(0, -\frac{R}{4}\right) & a_2 : \frac{y}{R} + 1 = 0 &\longrightarrow A_2 = \left(0, \frac{R}{4}\right) \\ a_3 : -\frac{x}{R} + 1 = 0 &\longrightarrow A_3 = \left(-\frac{R}{4}, 0\right) & a_4 : \frac{x}{R} + 1 = 0 &\longrightarrow A_4 = \left(\frac{R}{4}, 0\right) \end{aligned}$$

I punti A_i rappresentano i punti d'intersezione del disco di raggio $R/4$ con gli assi.

Esercizio. Determinare l'ellisse di Culmann e il nocciolo d'inerzia della sezione a doppio T in figura



Meccanica Razionale

A. Marasco

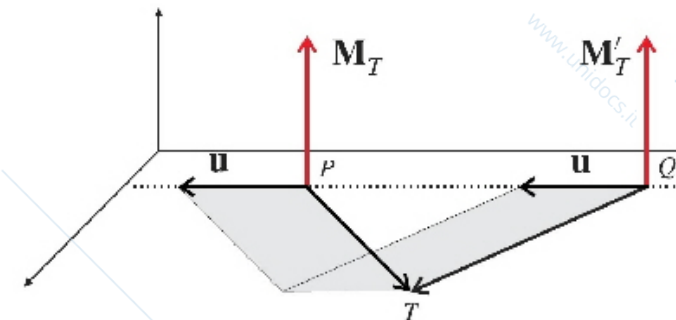
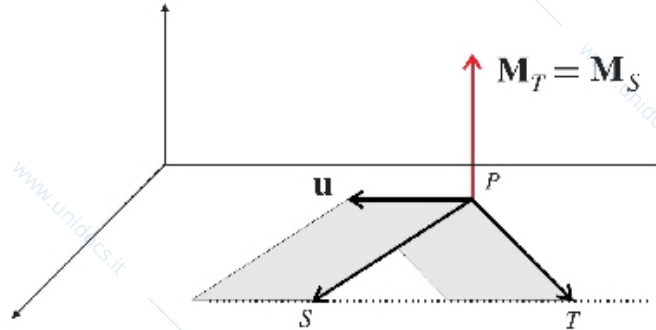
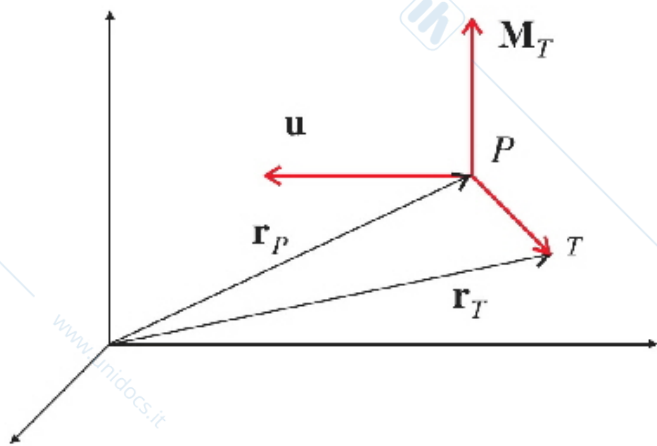
Lezione N. 24 del 17 Dicembre 2020

1 Calcolo vettoriale

1.1 Momento polare

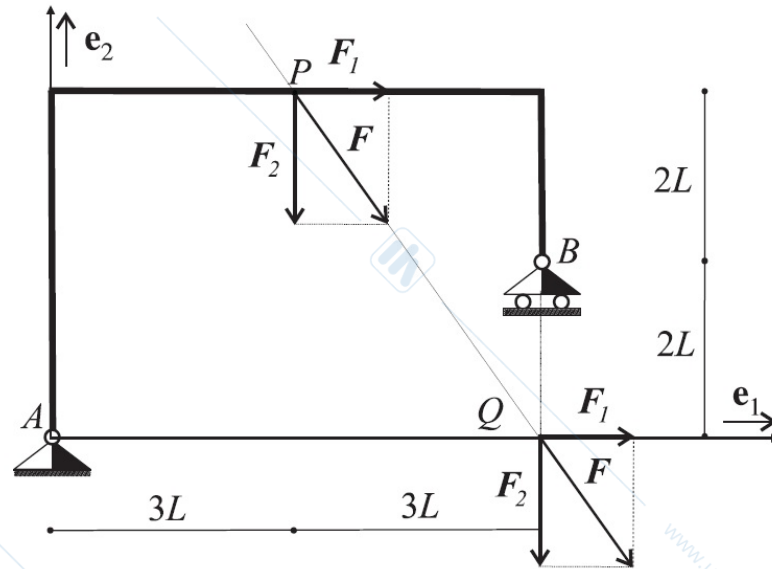
Momento del vettore applicato (P, \mathbf{u}) rispetto al polo T

$$\mathbf{M}_T = (P - T) \times \mathbf{u} = (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_T) \times \mathbf{u} \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{M}_S + \mathbf{u} \times (T - S)$$



- Il momento di (P, \mathbf{u}) non varia se si sposta il polo lungo una retta parallela ad \mathbf{u}
- Il momento non varia se si sposta il vettore \mathbf{u} lungo la sua retta di applicazione

Esempio 1.1.1. Calcolare il momento del vettore (P, \mathbf{F}) rispetto ad A



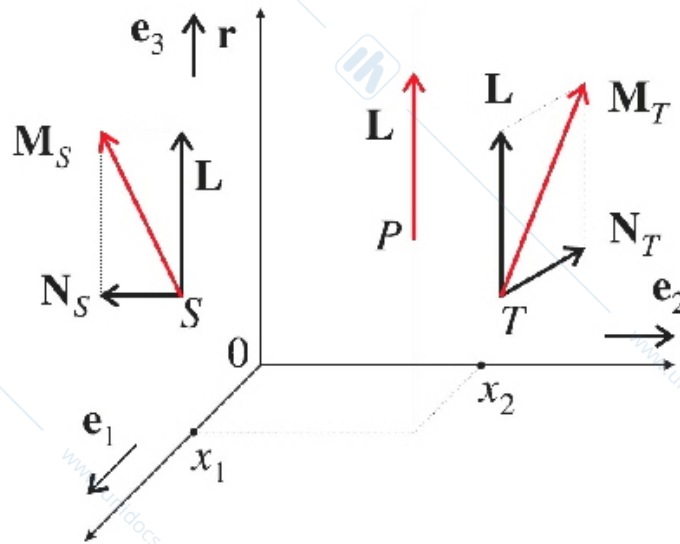
$$\mathbf{F} = \frac{3F}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{4}{5}F\mathbf{e}_2 \quad \mathbf{M}_A = (Q - A) \times \mathbf{F}_2 = 6L\mathbf{e}_1 \times \frac{4}{5}F\mathbf{e}_2 = -\frac{24}{5}F\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{M}_A = (P - A) \times \mathbf{F} = (3L\mathbf{e}_1 + 4L\mathbf{e}_2) \times \left(\frac{3F}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{4}{5}F\mathbf{e}_2 \right) = -\frac{12}{5}LF - \frac{12F}{5} = -\frac{24}{5}F\mathbf{e}_3$$

1.2 Asse centrale

La componente \mathbf{L} del momento parallela al risultante \mathbf{R} non dipende dal polo

$$\mathbf{M}_T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{R}, \quad \forall T, S \qquad \mathbf{M}_T = \mathbf{L} + \mathbf{N}_T \qquad \mathbf{L} \parallel \mathbf{R} \quad \mathbf{N}_T \perp \mathbf{R}$$



asse centrale

$$\mathcal{A} = \left\{ P : |\mathbf{M}_P| = \min_T |\mathbf{M}_T| \right\} = \{ P : \mathbf{N}_P = \mathbf{0} \} = \{ P : \mathbf{M}_P = \mathbf{L} \}$$

$$\mathbf{R} \parallel Ox_3 \quad \mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{M_{O2}}{R_3}, x_2 = \frac{M_{O1}}{R_3}, x_3 \in \mathfrak{R} \right\}$$

In generale, per un sistema S di vettori applicati con risultante \mathbf{R} e momento \mathbf{M}_O si ha

asse centrale $\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3) : (P - O) = \lambda \mathbf{R} + \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{R^2}, \lambda \in \mathfrak{R} \right\},$

$$\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3) : \frac{x_1 - x'_1}{R_1} = \frac{x_2 - x'_2}{R_2} = \frac{x_3 - x'_3}{R_3} \right\}, (Q - O) = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{R^2} \equiv (x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times (T - O) \Leftrightarrow \mathbf{L} + \mathbf{N}_T = \mathbf{L} + \mathbf{N}_O + \mathbf{R} \times (T - O)$$

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{A} &\Leftrightarrow \mathbf{N}_P = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{N}_O + \mathbf{R} \times (P - O) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{N}_O = (P - O) \times \mathbf{R} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{N}_O \times \mathbf{R} = [(P - O) \times \mathbf{R}] \times \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{N}_O \times \mathbf{R} = [(P - O) \cdot \mathbf{R}] \mathbf{R} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} (P - O) \end{aligned}$$

$$(P - O) = \frac{[(P - O) \cdot \mathbf{R}] \mathbf{R}}{R^2} - \frac{\mathbf{N}_O \times \mathbf{R}}{R^2} \equiv \lambda \mathbf{R} + \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{R^2},$$

$$\begin{aligned} (Q - O) = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{R^2} &\Rightarrow (P - O) = \lambda \mathbf{R} + (Q - O) \Leftrightarrow (P - Q) = \lambda \mathbf{R} \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3) = \lambda (R_1, R_2, R_3). \end{aligned}$$

Esercizio 1.2.1. Nel riferimento $Oxyz$, determinare l'asse centrale per il sistema di vettori applicati $S = \{(A_i, \mathbf{v}_i), i = 1, 2, 3\}$:

$$A_1 \equiv (2, 0, 0), \mathbf{v}_1 \equiv (1, 0, 0), \quad A_2 \equiv (0, 0, 2), \mathbf{v}_2 \equiv (1, 0, 1), \quad A_3 \equiv (0, 1, 0), \mathbf{v}_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i \equiv \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^3 (A_i - O) \times \mathbf{v}_i \equiv \left(0, 2, -\frac{1}{2}\right),$$

$$R^2 = \frac{15}{2}, \quad \mathbf{R} \times \mathbf{M}_O \equiv \left(-\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, 5\right)$$

$$\mathcal{A} : (P - O) = \lambda \mathbf{R} + \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{R^2} \iff (P - O) \equiv \lambda \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) + \frac{2}{15} \left(-\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, 5\right) \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$

$$\mathcal{A} : \begin{cases} x = -\frac{7}{30} + \frac{5}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \frac{2}{3} + \lambda \end{cases} \quad \frac{2}{5} \left(x + \frac{7}{30}\right) = 2 \left(\frac{1}{6} - y\right) = z - \frac{2}{3} \quad \lambda \in \mathfrak{R}.$$

Determinare i valori di α e β tali che il punto $P \equiv (\alpha, \alpha + 1/6, \beta)$ appartenga all'asse centrale \mathcal{A} .

1.3 Sistemi equivalenti

Si considerino due sistemi \mathcal{S} e \mathcal{S}' di vettori applicati

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(P_i, \mathbf{u}_i), i = 1, \dots, n\}, & (\text{risp. } \mathcal{S} &= \{(P, \mathbf{u}(P)) : P \in \Omega\}) & \mathbf{R}, \quad \mathbf{M}_T \quad \forall T \\ \mathcal{S}' &= \{(Q_j, \mathbf{v}_j), j = 1, \dots, m\} & (\text{risp. } \mathcal{S}' &= \{(P, \mathbf{v}(P)) : P \in \Omega'\}) & \mathbf{R}', \quad \mathbf{M}'_T \quad \forall T \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \text{ e } \mathcal{S}' \text{ sono equivalenti} \iff \mathbf{R} = \mathbf{R}', \quad \mathbf{M}_T = \mathbf{M}'_T \quad \forall T.$$

$$\mathcal{S} \text{ e } \mathcal{S}' \text{ sono equivalenti} \iff \mathbf{R} = \mathbf{R}', \quad \exists O : \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O.$$

Tabella di "massima riduzione"

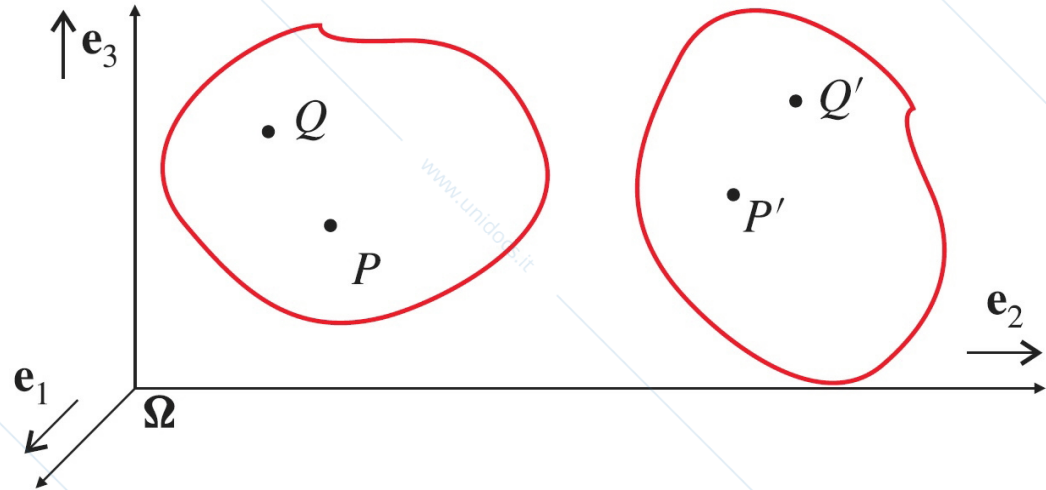
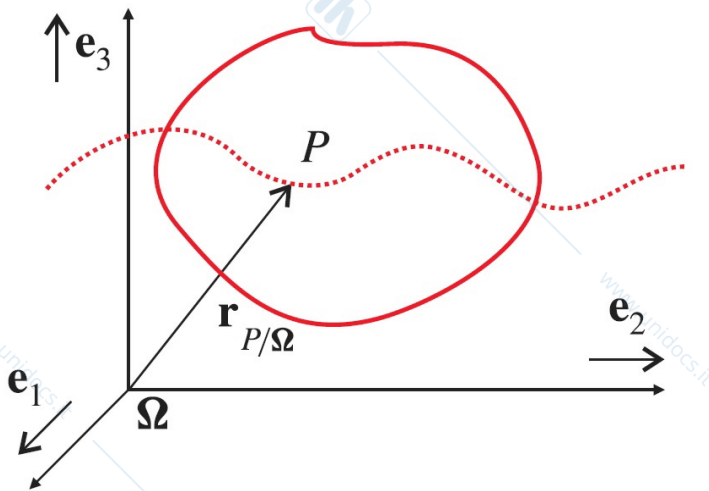
- $\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \Rightarrow$ zero
- $I = 0 \quad \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_O \neq \mathbf{0} \Rightarrow$ coppia di momento \mathbf{M}_O
- $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \Rightarrow$ \mathbf{R} applicato in un punto dell'asse centrale
- $I \neq 0 \quad \mathbf{R}$ applicato in un punto O più una coppia di momento \mathbf{M}_O

2 Cinematica

2.1 Moti rigidi

S **corpo rigido**

$$|PQ| = \text{cost} \quad \forall P, Q \in S \quad \forall t$$



spostamento rigido

$$|PQ| = |P'Q'| \quad \forall P, Q \in S \text{ (rigido o non rigido)}$$

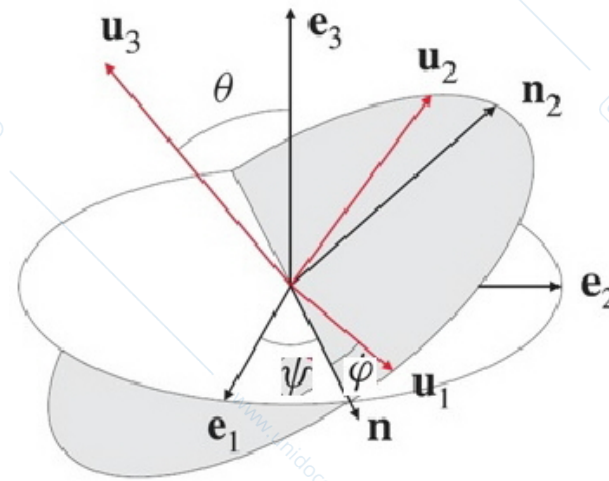
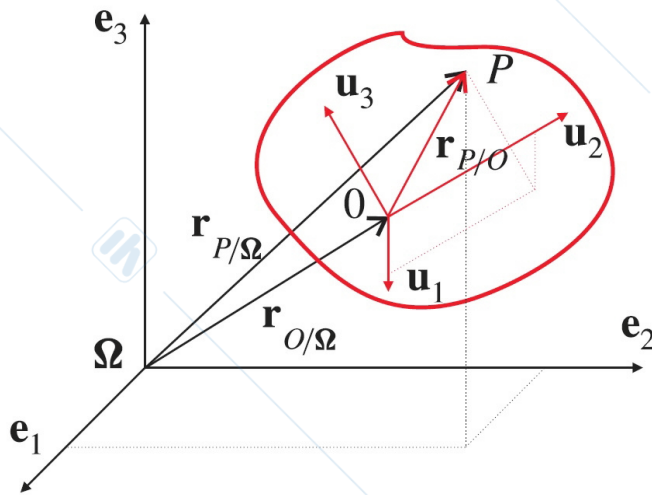
moto rigido

$$\forall t : |PQ| = \text{cost} \quad \forall P, Q \in S \text{ (rigido o non rigido)}$$

Configurazione di un corpo rigido

$\Omega x_1 x_2 x_3$ terna fissa o di laboratorio di versori (e_i) [$P \equiv (x_1, x_2, x_3)$]

$O y_1 y_2 y_3$ terna mobile **solidale** ad S di versori (u_i) : $O \in S$ [$P \equiv (y_1, y_2, y_3)$]



$$O \in S \quad \mathbf{r}_{P/\Omega}(t) = \mathbf{r}_{O/\Omega}(t) + \mathbf{r}_{P/O}(t) \quad \forall P \in S$$

$$\mathbf{r}_{O/\Omega}(t) = x_{O1}(t) \mathbf{e}_1 + x_{O2}(t) \mathbf{e}_2 + x_{O3}(t) \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_{P/O}(t) = y_1 \mathbf{u}_1(t) + y_2 \mathbf{u}_2(t) + y_3 \mathbf{u}_3(t),$$

$$\mathbf{u}_i(t) = A_{i1}(t) \mathbf{e}_1 + A_{i2}(t) \mathbf{e}_2 + A_{i3}(t) \mathbf{e}_3, \quad i = 1, 2, 3 \quad (A_{ij} \text{ coseni direttori})$$

$$\mathbf{u}_i(t) \cdot \mathbf{u}_i(t) = 1, \quad \forall i \quad \mathbf{u}_i(t) \cdot \mathbf{u}_j(t) = 0, \quad \forall i \neq j,$$

$$\mathbf{r}_{P/\Omega}(t) = x_{O1}(t) \mathbf{e}_1 + x_{O2}(t) \mathbf{e}_2 + x_{O3}(t) \mathbf{e}_3 + y_1 (A_{11}(t) \mathbf{e}_1 + A_{12}(t) \mathbf{e}_2 + A_{13}(t) \mathbf{e}_3) + y_2 (A_{21}(t) \mathbf{e}_1 + A_{22}(t) \mathbf{e}_2 + A_{23}(t) \mathbf{e}_3) + y_3 (A_{31}(t) \mathbf{e}_1 + A_{32}(t) \mathbf{e}_2 + A_{33}(t) \mathbf{e}_3)$$

Le configurazioni di un sistema rigido S dipendono da 6 funzioni del tempo

- $x_{O1}(t), x_{O2}(t), x_{O3}(t)$ che definiscono la posizione del punto O nel riferimento fisso;
- 3 coseni direttori indipendenti A_{ij} che definiscono l'orientazione della terna solidale rispetto a quella fissa.

$\Omega x_1 x_2 x_3$ terna fissa o di laboratorio di versori (\mathbf{e}_i)

$O x_1 x_2 x_3$ terna con centro in $O \in S$ e assi di versori (\mathbf{e}_i)

$O y_1 y_2 y_3$ terna mobile con centro in $O \in S$ **solidale** ad S di versori (\mathbf{u}_i)

linea dei nodi $n = O x_1 x_2 \cap O y_1 y_2$ $\mathbf{n} = \text{vers } n$

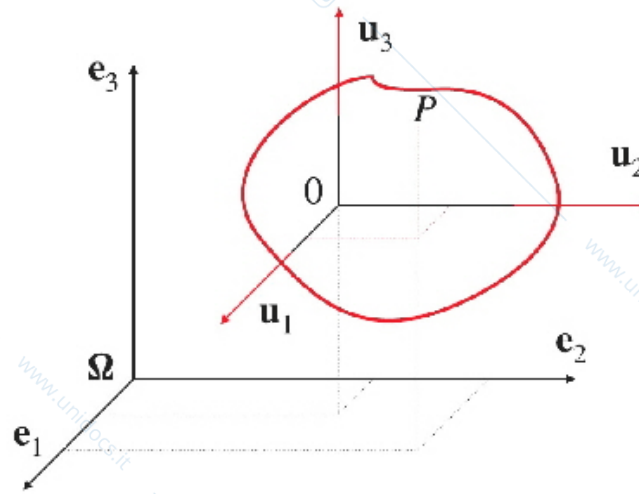
angoli di Eulero: ψ **precessione** φ **rotazione propria** ϑ **nutazione**

Le configurazioni di un sistema rigido S dipendono da 6 funzioni del tempo

- $x_{O1}(t), x_{O2}(t), x_{O3}(t)$ che definiscono la posizione del punto O nel riferimento fisso;
- 3 angoli di Eulero che definiscono l'orientazione della terna solidale rispetto a quella fissa.

atto di moto rigido $\forall P \in S \quad \mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (P - O) \quad \forall t$
spostamento elementare $dP = dO + d\varphi \times (P - O), \quad d\varphi = \boldsymbol{\omega} dt$
vettore di rotazione elementare $d\varphi = \boldsymbol{\omega} dt$

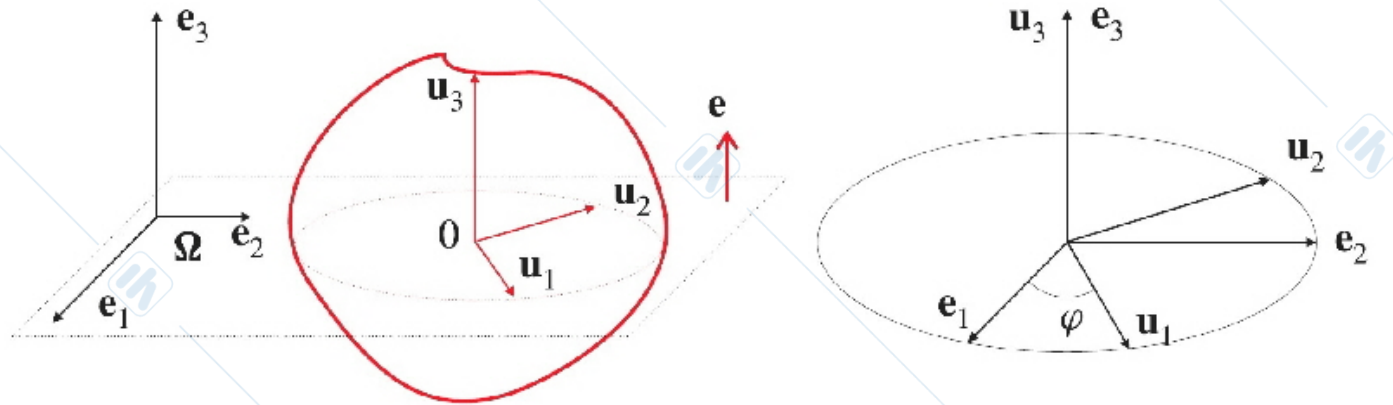
Moti traslatori



equazioni cartesiane dei moti traslatori $x_i(t) = x_{0i}(t) + y_i, \quad i = 1, 2, 3$
spostamento elementare $\forall P \in S \quad dP = dO$
atto di moto traslatorio $\forall P_1, P_2 \in S \quad \mathbf{v}_{P_1}(t) = \mathbf{v}_{P_2}(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad \forall t$

- **Moti rotatori attorno ad un asse fisso a**
- **Moti rototraslatori**
- **Moti rigido sferici**
- **Moti con asse scorrevole su se stesso e moti elicoidali**
- **Teorema di Mozzi e invariante cinematico**

2.2 Moti rigidi piani



$Ox_1x_2x_3$ (e_i) (fisso) : $\pi \equiv Ox_1x_2$

$Oy_1y_2y_3$ (u_i) (solidale) : $\pi_S \equiv Oy_1y_2$

$\pi \parallel \pi_S, Ox_3 \parallel Oy_3$ ($e_3 = u_3$)

$\varphi \in (-\pi, \pi) = \widehat{x_1y_1}, x_{O,3}(t) = 0$

atto di moto piano $v_P(t) = v_O(t) + \omega(t) \times (P - O)$ $v_O(t) \parallel \pi, \omega(t) = \dot{\varphi}e_3$

spostamento elementare piano $dP = dO + d\varphi \times (P - O)$ $dO \parallel \pi, \varphi = \varphi e_3 \quad \forall P$

Ogni atto di moto rigido piano o è traslatorio parallelamente al piano π oppure è rotatorio attorno ad un asse ortogonale a π .

- Se $d\varphi \neq 0$ si hanno spostamenti elementari rotatori attorno ad un asse $a \perp \pi$

centro istantaneo di rotazione $\exists C \in \pi_S : dC = \mathbf{0} \Leftrightarrow C \equiv \left(x_{O1} - \frac{dx_{O2}}{d\varphi}, x_{O2} + \frac{dx_{O1}}{d\varphi}, 0 \right)$

$$d\varphi \neq 0 \implies dP = d\varphi \times (P - C) \quad dC = \mathbf{0}, \varphi = \varphi \mathbf{e}_3 \quad \forall P$$

Se a è una retta dello spazio solidale passante per C e ortogonale a π_S si ha

asse istantaneo di rotazione $\forall A \in a \quad dA = d\varphi \times (A - C) \implies \forall A \in a \quad dA = \mathbf{0}$

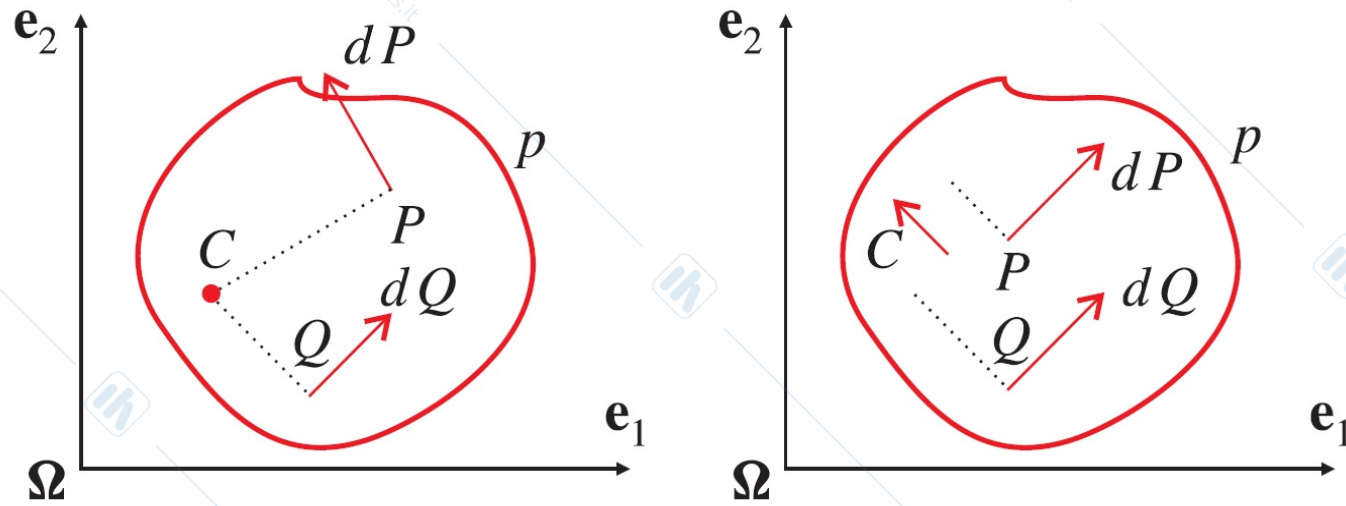
$$dP = d\varphi \times (P - A) \quad A \in a, \varphi = \varphi \mathbf{e}_3 \quad \forall P$$

- Se $d\varphi = 0$ si hanno spostamenti elementari traslatori (parallelam. a π)

$$d\varphi = 0 \implies dP = dO \quad \forall P$$

Teorema di Chasles

In un moto rigido piano le perpendicolari agli spostamenti elementari passano per il centro istantaneo di rotazione C che è un punto proprio se $d\varphi \neq 0$ e improprio nel caso in cui $d\varphi = 0$.



Proprietà dei centri istantanei di rotazione

1. Se $\exists O : dO = \mathbf{0} \implies O \equiv C$
2. Se $\exists P_1, P_2 : dP_1 = dP_2 = \mathbf{0} \implies dP = \mathbf{0} \quad \forall P$
3. Se $\forall P_1, P_2 : dP_1 = dP_2, \exists P_3 : dP_3 = \mathbf{0} \implies dP = \mathbf{0} \quad \forall P$

- Diagrammi di spostamento
- Centri assoluti e centri relativi

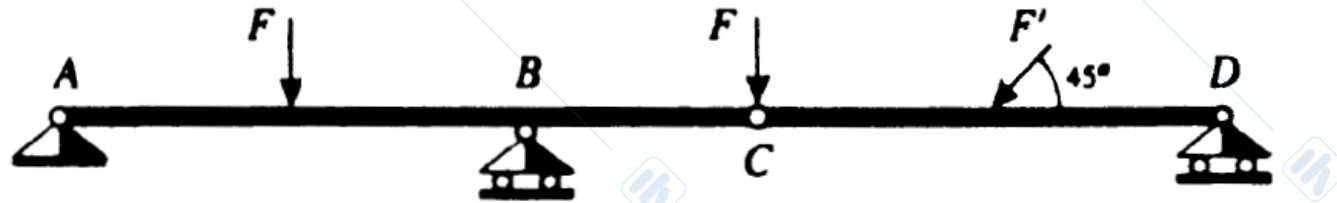
3 Sistemi vincolati

- Vincoli olonomi, lisci, fissi, unilaterali e bilaterali
- Equazioni e disequazioni di vincolo
- Coordinate lagrangiane e gradi di libertà
- Spostamenti elementari e spostamenti virtuali
- Equazioni di vincolo e gradi di libertà
- Sistemi isostatici, i -volte iperstatici e l -volte labili con i vincoli dipendenti
- Analisi cinematica di un sistema vincolato piano
- Matrice cinematica
- Vincoli nel piano esterni e interni: pendolo, cerniera, carrello, doppio pendolo, doppio-doppio pendolo, incastro.

4 Statica

- Equazioni cardinali della statica (ECS).
- Analisi statica di un sistema: matrice statica e relazione tra i modelli cinematico e statico.
- Reazioni vincolari della cerniera, del carrello, del pendolo, del doppio pendolo, del doppio-doppio pendolo e dell'incastro.
- Maglie triangolari e strutture reticolari. Labilità, isostaticità e iperstaticità interne.
- Metodo dei nodi. Metodo di Ritter.
- Principio dei lavori virtuali (PLV)
- Principio di Torricelli.
- Condizioni di equilibrio per un corpo rigido.
- Analisi dell'equilibrio con il PLV e condizioni generali di equilibrio.
- Determinazione delle reazioni vincolari con il PLV. Diagrammi di spostamento.

Esercizio 4.1. Si effettui l'analisi cinematica della **trave Gerber a due campate** (AC e CD) e si determinino le reazioni vincolari con le ECS.



Analisi cinematica

$m = 6 \quad x_A, y_A, \varphi_1, \quad x_D, y_D, \varphi_2$

cerniera in A : $dA = \mathbf{0} \quad (dx_A = 0, dy_A = 0)$

carrello in B : $dB \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad (dy_B = 0)$

cerniera interna in C : $dC' - dC'' = \mathbf{0} \quad (dx_{C'} - dx_{C''} = 0, dy_{C'} - dy_{C''} = 0)$

carrello in D : $dD \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad (dy_D = 0)$

$$\begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, \\ dy_A + d\varphi_1(x_B - x_A) = 0, \\ [dx_A - d\varphi_1(y_C - y_A)] - [dx_D - d\varphi_2(y_C - y_D)] = 0, \\ [dy_A + d\varphi_1(x_C - x_A)] - [dy_D + d\varphi_2(x_C - x_D)] = 0, \\ dy_D = 0. \end{cases} \equiv \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, \\ dy_A + 2ad\varphi_1 = 0, \\ dx_A - dx_D = 0, \\ dy_A + 3ad\varphi_1 - dy_D + 2ad\varphi_2 = 0, \\ dy_D = 0. \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_1 & dx_D & dy_D & d\varphi_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3a & 0 & -1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s = 6 & l = 0 \\ s' = 6 & i = 0 \end{matrix} \quad \text{isostatico}$$

Calcolo delle reazioni vincolari con le ECS

Si osservi che *la cerniera interna in C è carica*, pertanto conviene scrivere le ECS per le travi AC e CD e per il punto materiale C

Reazioni vincolari e sollecitazioni attive

- cerniera esterna in A : $\Phi_A = \Phi_{Ax}\mathbf{i} + \Phi_{Ay}\mathbf{j}$,
- trave AC \longrightarrow carrello esterno in B : $\Phi_B = \Phi_{By}\mathbf{j}$.
- cerniera interna in C : $\Phi_C = \Phi_{Cx}\mathbf{i} + \Phi_{Cy}\mathbf{j}$.
- punto materiale C \longrightarrow $-\Phi_C, \quad -\Psi_C$,
- trave CD \longrightarrow cerniera interna in C : $\Psi_C = \Psi_{Cx}\mathbf{i} + \Psi_{Cy}\mathbf{j}$,
- carrello esterno in D : $\Phi_D = \Phi_{Dy}\mathbf{j}$.

Sollecitazioni attive

$$(P_1, \mathbf{F}_1) : P_1 \equiv (x_A + a, y_A), \mathbf{F}_1 = -F\mathbf{j} \quad (C, \mathbf{F}_C) : C \equiv (x_A + 3a, y_A), \mathbf{F}_C = -F\mathbf{j}$$

$$(P_2, \mathbf{F}_2) : P_2 \equiv (x_A + 4a, y_A), \mathbf{F}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(F'\mathbf{i} + F'\mathbf{j})$$

ECS

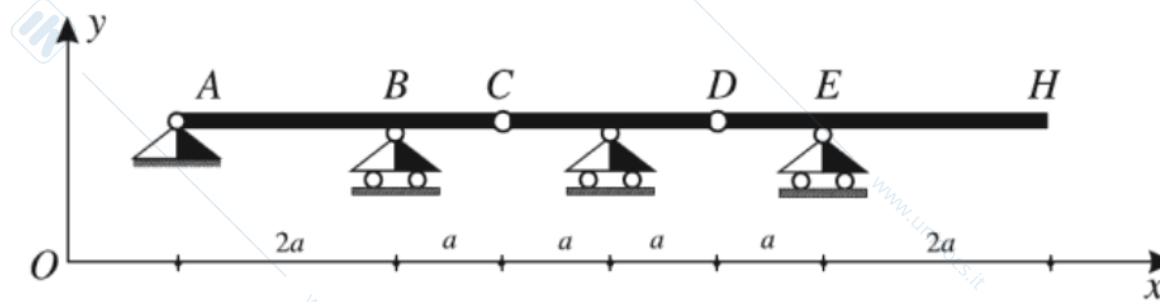
$$\text{ECS trave } AC \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{R}_1^{(a)} + \mathbf{R}_1^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{1A}^{(a)} + \mathbf{M}_{1A}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \equiv \begin{cases} \Phi_{Ax} + \Phi_{Cx} = 0, \\ \Phi_{Ay} + \Phi_{By} + \Phi_{Cy} - F = 0, \\ 2a\Phi_{By} + 3a\Phi_{Cy} - aF = 0, \end{cases}$$

$$\text{ECS punto materiale } C \longrightarrow \mathbf{R}_1^{(a)} + \mathbf{R}_1^{(v)} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\Phi_{Cx} - \Psi_{Cx} = 0, \\ -\Phi_{Cy} - \Psi_{Cy} - F = 0, \end{cases}$$

$$\text{ECS trave } CD \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{R}_2^{(a)} + \mathbf{R}_2^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{2D}^{(a)} + \mathbf{M}_{2D}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Psi_{Cx} - \frac{\sqrt{2}}{2}F' = 0, \\ \Phi_{Dy} + \Psi_{Cy} - \frac{\sqrt{2}}{2}F' = 0, \\ -2a\Psi_{Cy} + a\frac{\sqrt{2}}{2}F' = 0, \end{cases}$$

$$\Phi_A = \frac{\sqrt{2}}{2}F'\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{8}F'\mathbf{j}, \quad \Phi_B = \left(2F + \frac{3\sqrt{2}}{8}F'\right)\mathbf{j},$$

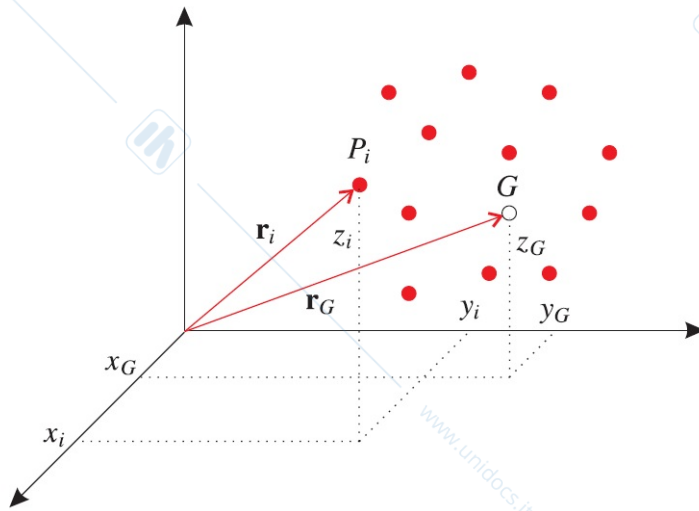
$$\Psi_C = \frac{\sqrt{2}}{2}F'\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{4}F'\mathbf{j}, \quad \Phi_C = -\frac{\sqrt{2}}{2}F'\mathbf{i} + \left(-F - \frac{\sqrt{2}}{4}F'\right)\mathbf{j}.$$



Trave Gerber a tre campate

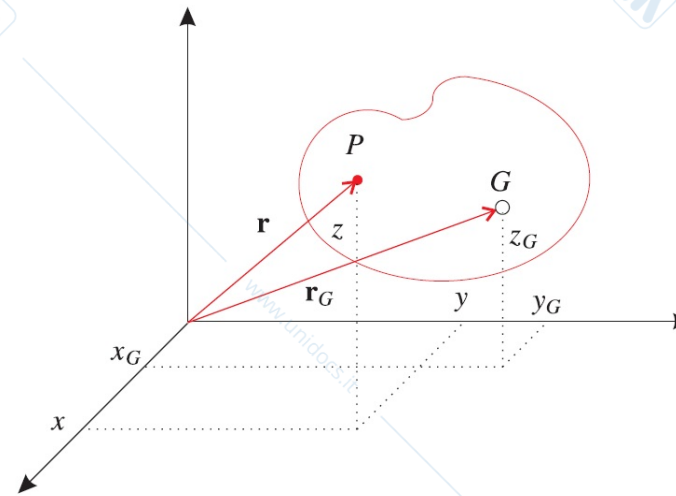
5 Geometria delle masse

5.1 Massa e baricentro



$$S = \{(P_i, m_i), i = 1, \dots, n\}$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$



$$S = \{(P, \rho(P)), P \in B\}$$

$$m = \int_B \rho(P) d\tau, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \int_B \rho \mathbf{r} d\tau. \quad (1)$$

- $\forall P \in S \quad P \in \pi \Rightarrow G \in \pi \qquad \forall P \in S \quad P \in r \Rightarrow G \in r$
- Il baricentro G di un sistema S appartiene ad ogni piano diametrale coniugato di S ed in particolare ad ogni piano di simmetria.

- **Proprietà distributiva** $S = \bigcup_{i=1}^k S_i \qquad m = \sum_{i=1}^k m_i, \qquad m \mathbf{r}_G = \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{r}_{G_i}$

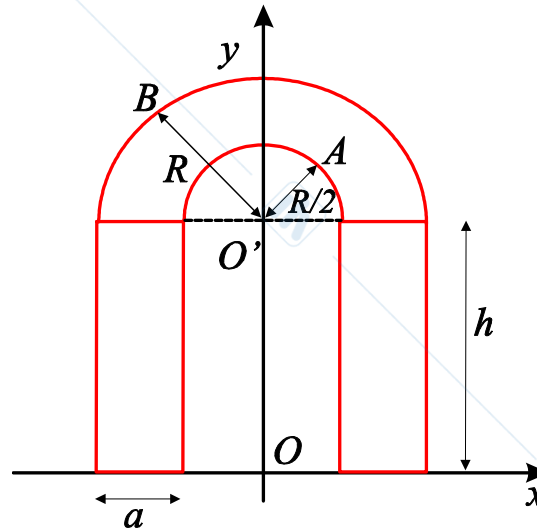
Esercizio 5.1. Calcolare la massa e il baricentro di un'asta AB non omogenea di lunghezza L , supponendo che la densità in un suo generico punto P sia

$$(1) \rho(P) = \frac{2m}{L^2} |AP|, \qquad (2) \rho(P) = \frac{3m}{L^3} |AP|^2.$$

$$M = \int_0^L \frac{2m}{L^2} x \, dx = \frac{2m}{L^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = m, \qquad x_G = \frac{1}{M} \int_0^L \left(\frac{2m}{L^2} x \right) x \, dx = \frac{1}{m} \frac{2m}{L^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{2}{3} L.$$

$$M = \int_0^L \frac{3m}{L^3} x^2 \, dx = \frac{3m}{L^3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = m, \qquad x_G = \frac{1}{M} \int_0^L \left(\frac{3m}{L^3} x^2 \right) x \, dx = \frac{1}{m} \frac{3m}{L^3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^L = \frac{3}{4} L.$$

Esercizio 5.2. Si determini il baricentro G della sezione piana e omogenea in figura, sapendo che $|O'A| = R/2$, $|O'B| = R$, $|OO'| = h$.



L'asse delle y è di simmetria e quindi $x_G = 0$.

Sia $S = S' \cup S''$ dove S' è formato dai due rettangoli di base a e altezza h , ed S'' è la semicorona circolare delimitata dalle circonferenze di raggio R ed $R/2$. Per la *proprietà distributiva del baricentro* si ha

$$m = m' + m'', \quad y_G = \frac{m'y_{G'} + m''y_{G''}}{m}.$$

$$S' : \quad m' = 2\rho ah, \quad y_{G'} = h/2,$$

Poichè per una corona circolare simmetrica rispetto all'asse Oy e delimitata da circonferenze di centro l'origine e raggi R ed r risulta

$$m'' = \rho \frac{\pi}{2} [R^2 - r^2], \quad y_{G''} = \frac{4}{3\pi} \frac{[R^3 - r^3]}{[R^2 - r^2]},$$

nel caso in esame

$$S'' : \quad m'' = \rho \frac{\pi}{2} [R^2 - (R/2)^2] = \rho \frac{3\pi}{8} R^2, \quad y_{G''} = h + \frac{4}{3\pi} \frac{[R^3 - (R/2)^3]}{[R^2 - (R/2)^2]} = h + \frac{14}{9\pi} R.$$

In definitiva, si ottiene

$$y_G = \frac{ah^2 + \frac{3\pi}{8} R^2 \left[h + \frac{14}{9\pi} R \right]}{2ah + \frac{3\pi}{8} R^2}.$$

Per i sistemi piani, si definiscono i **momenti statici** rispetto agli assi S_x e S_y (o momenti

del primo ordine)

$$m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad S_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i = m y_G, \quad S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i = m x_G,$$

$$m = \int_B \rho(P) d\tau, \quad S_x = \int_B \rho y d\tau = m y_G, \quad S_y = \int_B \rho x d\tau = m x_G,$$

allora il baricentro G è il punto in cui concentrare l'intera massa del sistema S per ottenere i momenti statici S_x e S_y .

Esercizio 5.3. Determinare i momenti statici per i sistemi degli esercizi 5.1 e 5.2

asta (1) $S_x = 0, S_y = \frac{2}{3}mL,$ (2) $S_x = 0, S_y = \frac{3}{4}mL.$

arco $S_x = \rho \left[ah^2 + \frac{3\pi}{8}R^2 \left(h + \frac{14}{9\pi}R \right) \right], \quad S_y = 0.$