



Politecnico di Milano, Polo Regionale di Lecco
 Facoltà di Ingegneria Edile – Architettura
 Corso di Meccanica Razionale – Prof. Silvia Lorenzani

DOMANDE DI TEORIA:

0) **Enunciare e dimostrare la legge di distribuzione delle velocità e la legge di distribuzione delle accelerazioni.**

Legge di distribuzione delle velocità: condizione necessaria e sufficiente affinché il moto di un sistema sia rigido è che la distribuzione delle velocità soddisfi in ogni istante

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_Q(t) + \vec{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{(P-Q)} \quad \text{per ogni } P, Q.$$

La formula appena scritta è detta *legge di distribuzione delle velocità*. Questo legame caratterizza completamente ogni moto rigido: per ogni coppia di punti solidali P e Q possiamo calcolare la velocità di uno a partire dalla conoscenza della velocità dell'altro e dalla velocità angolare ω .

Dimostrazione: per dimostrare questa legge basta ricorrere alle *formule di Poisson* le quali affermano:

Sia B un sistema in moto rigido e siano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ i versori di una terna ortonormale solidale. Esiste un unico vettore ω tale che:

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i$$

il vettore ω non dipende dalla terna solidale scelta ed è chiamato velocità angolare di B.

Dunque, dato un qualsiasi vettore w solidale al corpo rigido, vale:

$$\vec{\dot{w}} = \vec{\omega} \wedge \vec{w}.$$

Tornando ora alla distribuzione delle velocità, basta sostituire al vettore w il vettore $\overrightarrow{(P-Q)}$, dove Q e P sono punti solidali al sistema in moto, così come il vettore w che li congiunge. In questo modo si ha:

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{(P-Q)}}{dt}}_{\vec{v}_P - \vec{v}_Q} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{(P-Q)}$$

così facendo si è ottenuta la distribuzione delle velocità. Al fine di dimostrare la sufficienza resta da verificare che questa relazione, soddisfatta in ogni istante, garantisce la rigidità di moto. Calcoliamo allora la derivata al quadrato del vettore $\overrightarrow{(P-Q)}$:

$$\frac{d(\overrightarrow{P-Q})^2}{dt} = 2 \frac{d(\overrightarrow{P-Q})}{dt} \cdot (\overrightarrow{P-Q}) = 2(\overrightarrow{v_P} - \overrightarrow{v_Q}) \cdot (\overrightarrow{P-Q}) = 2[\overline{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q})] \cdot (\overrightarrow{P-Q}) = 0$$

si vede qui che le distanze fra i punti si mantengono costanti e perciò il moto corrispondente è rigido.

Legge di distribuzione delle accelerazioni: le accelerazioni in un moto rigido soddisfano la relazione

$$\overrightarrow{a_P}(t) = \overrightarrow{a_Q}(t) + \overline{\dot{\omega}} \wedge (\overrightarrow{P-Q}) + \overline{\omega} \wedge [\overline{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q})] \quad \text{per ogni P,Q.}$$

La formula appena scritta è detta *legge di distribuzione delle accelerazioni*.

Dimostrazione: per dimostrare questa legge basta derivare rispetto al tempo la legge di distribuzione delle velocità. Assegnata quindi l'accelerazione di un qualsiasi punto solidale, la velocità angolare e la sua derivata, possiamo conoscere l'accelerazione di ogni altro punto del sistema.

1) Proprietà dell'atto di moto di un corpo rigido.

La cinematica dei corpi può essere studiata da due punti di vista diversi:

- * Il punto di vista *Lagrangiano* (o *globale*) consiste nel seguire ciascun punto del corpo al variare della sua evoluzione temporale;
- * Il punto di vista *Euleriano* (o *locale*) consiste nel fissare uno spazio di controllo ed interessarsi del moto del corpo nell'istante in cui il corpo attraversa tale spazio di controllo. Associamo ad ogni punto P dello spazio di controllo il vettore $\mathbf{v}(P)$ corrispondente alla velocità posseduta dal punto del sistema che si trova in quell'istante a transitare per P. Nell'istante prefissato, questo particolare campo vettoriale delle velocità è detto *atto di moto*. È evidente che l'atto di moto può variare da istante ad istante, anche semplicemente perché cambiano le particelle che transitano nei punti dello spazio di controllo.

Noi considereremo il punto di vista Euleriano in cui il tempo è fissato e la velocità è una funzione del posto.

La legge che descrive l'atto di moto rigido è proprio quella derivata attraverso le *formule di Poisson*, definita come:

$$\overrightarrow{v}(P) = \overrightarrow{v}(Q) + \overline{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q})$$

detta anche *formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi*.

Ciò significa che esiste un vettore ω tale per cui la legge appena scritta è soddisfatta dalle velocità dei punti materiali che occupano le posizioni P e Q dello spazio, al variare di questi e senza che ω dipenda da essi.

Passiamo ora alla classificazione degli atti di moto e, poiché l'atto di moto consiste nell'osservare la distribuzione delle velocità, appare naturale classificarli utilizzando le analoghe proprietà delle velocità nei moti rigidi (di seguito indicheremo con C lo spazio di controllo all'istante t):

- * *Atto di moto traslatorio*: quando tutti i punti hanno la stessa velocità, ovvero: $\mathbf{v}(P)=\mathbf{v}(Q)$ per ogni $P, Q \in C$ (ciò vuol dire che in questo caso $\omega = 0$).
- * *Atto di moto rototraslatorio*: quando esiste una direzione nello spazio di controllo tale che ogni retta parallela a tale direzione è luogo di punti di velocità uguale. Indicato con \mathbf{u} il versore della direzione privilegiata si ha dunque $\mathbf{v}(P)=\mathbf{v}(Q)$ per ogni $P, Q \in C$ tali che P, Q siano paralleli ad \mathbf{u} .
- * *Atto di moto rototraslatorio elicoidale*: quando esiste una retta r parallela alla direzione privilegiata che è luogo di punti di velocità parallela alla retta stessa, ovvero: $\mathbf{v}(P)=\mathbf{v}(Q)=\lambda\mathbf{u}$ per ogni $P, Q \in r \cap C$. In altre parole ω e $\mathbf{v}(Q)$ sono paralleli.
- * *Atto di moto rotatorio*: quando esiste una retta r parallela alla direzione privilegiata che è luogo di punti di velocità nulla, ovvero: $\mathbf{v}(P)=\mathbf{v}(Q)=0$ per ogni $P, Q \in r \cap C$. Qui si ha dunque solo velocità angolare ω , cioè movimento attorno ad un asse.

Osservandoli possiamo dire che nelle tre dimensioni il caso più frequente di moto rigido è quello rototraslatorio.

Data la definizione di atto di moto di un corpo rigido, possiamo osservare alcune proprietà:

- * La quantità $I = \mathbf{v}(P) \bullet \omega$ è indipendente dal punto P usato per calcolarla e viene detta *invariante scalare cinematico*. È dunque una quantità uguale per ogni punto del corpo rigido;
- * Le componenti delle velocità di due punti secondo la retta che li congiunge sono uguali, per esempio le proiezioni delle velocità dei punti P e Q lungo ω sono uguali;
- * Punti appartenenti ad una retta parallela ad ω hanno pari velocità. Tale componente comune prende il nome di *velocità di scorrimento* di tale retta. In particolare la retta i cui punti hanno velocità nulla è chiamata *asse di istantanea rotazione* e la sua intersezione con il piano direttore definisce il C.I.R. (centro di istantanea rotazione che si può individuare attraverso il *teorema di Chasles*).

2) **Dare la definizione di vincolo. Vincolo di posizione e vincolo di mobilità, vincolo fisso e vincolo mobile, vincolo unilatero e vincolo bilatero, vincoli olonomi e vincoli anolonomi (definizioni ed esempi). Coordinate libere e gradi di libertà di un sistema olonomo.**

Atto di moto di un sistema olonomo.

In meccanica si dice che un sistema di punti materiali è *vincolato* (o sottoposto a *vincoli*) se le posizioni e/o le velocità di questi punti sono legate da relazioni che ne limitano la variabilità; queste equazioni sono appunto le equazioni che esprimono i vincoli e sono chiamate *relazioni di vincolo*. Dunque i vincoli sono restrizioni a priori sulle possibilità di moto.

Definizioni ed esempi:

- * *Vincoli di posizione*: restrizione al moto di un sistema modellata sulle posizioni dei punti materiali, ovvero sull'insieme delle configurazioni possibili;
- * *Vincoli di mobilità*: restrizione al moto di un sistema modellata sulle velocità dei punti materiali;
- * *Vincoli fissi*: vincoli di posizione in cui l'insieme delle configurazioni a priori possibili non dipende esplicitamente dal tempo;
- * *Vincoli mobili*: vincoli di posizione in cui l'insieme delle configurazioni a priori possibili dipende esplicitamente dal tempo;
- * *Vincoli unilateri*: vincoli la cui relazione è espressa da una disuguaglianza. Si parla di vincoli unilateri quando esistono configurazioni di atti di moto (spostamenti) virtuali irreversibili;
- * *Vincoli bilateri*: vincoli la cui relazione è espressa da un'uguaglianza. Questi sono vincoli tali che ogni atto di moto (spostamento) virtuale è reversibile;
- * *Vincoli olonomi*: sono vincoli che dipendono dalla posizione ed, eventualmente, dal tempo. Qualora essi dipendano da velocità questa deve essere riconducibile, tramite integrazione, alla posizione;
- * *Vincoli anolonomi*: vincoli che dipendono da velocità che non può essere riconducibile, tramite integrazione, alla posizione.

Conosciuti i vincoli di possono definire il numero di *gradi di libertà* (G.D.L.) del sistema e conseguenza il numero di *coordinate libere* da utilizzare.

Le *coordinate libere* (o *coordinate di configurazione*, o *lagrangiane*) sono parametri essenziali ed indipendenti che, al loro variare in una regione, descrivono in modo regolare le

configurazioni del sistema, o almeno un sottoinsieme di esse. Ciò significa che nessuna può essere eliminata senza pregiudicare la possibilità di individuare univocamente la posizione del sistema, inoltre non vi è alcun legame finito tra di esse. Quindi il numero di coordinate libere corrisponde al numero di parametri indipendenti necessari per descrivere la posizione del sistema.

I *gradi di libertà* sono invece il numero di spostamenti (o atti di moto) virtuali indipendenti ammissibili in una generica configurazione.

Il numero dei G.D.L. in un sistema soggetto a soli vincoli olonomi è semplicemente pari al numero delle coordinate libere.

È da precisare che un sistema con vincoli bilateri sulle posizioni dei suoi punti ha un ben preciso numero di gradi di libertà; i vincoli unilateri, invece, non permettono di precisare a priori il numero di gradi di libertà, che può essere variabile durante il movimento del sistema, a seconda che valga o no il segno di eguale nelle disuguaglianze che traducono i vincoli.

Consideriamo due punti materiali eguali di massa m collegati tra loro da un'asta di lunghezza l , allora i due punti si possono muovere sotto il solo vincolo che la loro distanza resti uguale ad l .

Per assegnare la posizione dei due punti a un certo istante, si possono dare i valori delle 3 coordinate di ciascun punto, cioè sei numeri $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$. Questi sei numeri non sono indipendenti perché tra di essi sussiste la relazione che traduce il vincolo:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2$$

Più in generale possiamo dire che le $3N$ coordinate degli N punti materiali che costituiscono il sistema sono legate fra loro da un certo numero di relazioni finite che permettono di introdurre un numero inferiore di coordinate che risultano libere, cioè non legate tra loro da nessuna relazione. Allora se r sono le relazioni indipendenti che traducono i vincoli, si potranno introdurre $n = 3N - r$ coordinate libere e si dice che il sistema ha n gradi di libertà.

Per quanto riguarda infine *l'atto di moto* in un sistema olonomo, bisogna dire che la velocità dei diversi punti di un sistema vincolato non può essere assegnata arbitrariamente ad un certo istante t ; per definire (in questo istante t) tutte le velocità dei punti del sistema, cioè per definire *l'atto di moto* del sistema all'istante t , occorre tener conto dei vincoli.

Partendo dalla formula dell'atto di moto di un sistema rigido, scriviamo la formula dell'atto di moto di un sistema olonomo caratterizzato da vincolo di rigidità come:

$$\vec{v}'(P) = \vec{v}'(Q) + \vec{\omega}' \wedge \overline{(P - Q)}$$

sono stati introdotti gli apici per ricordare che si tratta di velocità virtuali, semplicemente compatibili con i vincoli e non subordinate ad un qualche moto effettivo.

3) Cinematica relativa: enunciare e dimostrare la legge di composizione delle velocità, la legge di composizione delle accelerazioni e la legge di composizione delle velocità angolari.

Le velocità e le accelerazioni dei punti di un sistema, così come la velocità angolare di un corpo rigido, non sono quantità assolute, bensì relative all'osservatore che descrive il moto. Vediamo allora a questo scopo le leggi di trasformazione delle quantità cinematiche al variare dell'osservatore.

Consideriamo quindi un sistema di riferimento con origine in O che chiameremo *fisso* ed uno con origine in Q che chiameremo *mobile*.

Legge di composizione delle velocità (Teorema di Galileo): la velocità assoluta \vec{v}_a di un punto P è legata alla velocità relativa \vec{v}_r dalla relazione

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$$

in cui la velocità di trascinamento è definita come

$$\vec{v}_t = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q})$$

Dimostrazione: consideriamo i seguenti vettori:

$$\overrightarrow{(P-O)} = \overrightarrow{(Q-O)} + \overrightarrow{(P-Q)}$$

$$\overrightarrow{(P-Q)} = y_1 \hat{e}_1 + y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3$$

$$\overrightarrow{(P-O)} = \overrightarrow{(Q-O)} + y_1 \hat{e}_1 + y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3$$

(qui $y_{1,2,3}$ sono le coordinate del punto P rispetto al sistema mobile con origine in Q).

Ora deriviamo rispetto al tempo le coordinate del punto P ma viste dal sistema di riferimento fisso (ovvero con origine in O), otteniamo la velocità:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_Q + \dot{y}_1 \hat{e}_1(t) + \dot{y}_2 \hat{e}_2(t) + \dot{y}_3 \hat{e}_3(t) + y_1 \dot{\hat{e}}_1 + y_2 \dot{\hat{e}}_2 + y_3 \dot{\hat{e}}_3$$

Grazie alle formule di Poisson possiamo scrivere:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_Q + \underbrace{\dot{y}_1 \hat{e}_1(t) + \dot{y}_2 \hat{e}_2(t) + \dot{y}_3 \hat{e}_3(t)}_{\vec{v}_r} + \underbrace{y_1 [\vec{\omega} \wedge \hat{e}_1] + y_2 [\vec{\omega} \wedge \hat{e}_2] + y_3 [\vec{\omega} \wedge \hat{e}_3]}_{\vec{\omega} \wedge [y_1 \hat{e}_1 + y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3] = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q})}$$

Quindi riassumendo e semplificando quanto appena scritto abbiamo dimostrato la legge di composizione delle velocità:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \underbrace{\vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q})}_{\vec{v}_t}$$

Ora bisogna fare alcune osservazioni:

- * La derivata rispetto al tempo di cui si parla nella dimostrazione è fatta rispetto all'osservatore fisso, che vede quindi i versori $\mathbf{e}_{1,2,3}$ e l'origine Q in movimento rispetto a sé;
- * La velocità di trascinamento è la velocità che il punto P avrebbe se fosse solidale con la terna mobile. Si può anche dire che è la velocità che competerebbe a P se esso fosse semplicemente trascinato dal moto dell'osservatore mobile;
- * Nel caso in cui l'osservatore mobile abbia velocità angolare nulla e possieda quindi atto di moto traslatorio rispetto a quello fisso, si deduce subito che $\vec{v}_\tau = \vec{v}_Q$, e cioè che la velocità di trascinamento si riduce alla velocità dell'origine della terna mobile.
- * Due osservatori misurano la stessa velocità solo quando la velocità di trascinamento è nulla. In altre parole le misure delle velocità coincidono anche se le origini e le terne utilizzate sono diverse, purché né l'origine né la terna utilizzate dal secondo osservatore si muovano rispetto al primo.

Legge di composizione delle accelerazioni (Teorema di Coriolis): l'accelerazione assoluta \vec{a}_a di un punto P è legata all'accelerazione relativa \vec{a}_r dalla relazione

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_\tau + \vec{a}_c$$

in cui l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione di Coriolis sono definite rispettivamente come

$$\vec{a}_\tau = \vec{a}_Q + \vec{\omega} \wedge (P - Q) + \dot{\vec{\omega}} \wedge [P - Q] \quad \vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

Dimostrazione: anche qui la dimostrazione si ottiene derivando il Teorema di Galileo sempre attraverso l'osservatore posto all'origine del sistema fisso O :

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}$$

Deriviamo separatamente le due parti; deriviamo la prima parte:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_r}{dt} &= \frac{d}{dt} [\dot{y}_1 \hat{e}_1 + \dot{y}_2 \hat{e}_2 + \dot{y}_3 \hat{e}_3] = \\ &= \underbrace{\ddot{y}_1 \hat{e}_1 + \ddot{y}_2 \hat{e}_2 + \ddot{y}_3 \hat{e}_3}_{\vec{a}_r} + \dot{y}_1 \dot{\hat{e}}_1 + \dot{y}_2 \dot{\hat{e}}_2 + \dot{y}_3 \dot{\hat{e}}_3 = \vec{a}_r + \dot{y}_1 (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_1) + \dot{y}_2 (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_2) + \dot{y}_3 (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_3) = \\ &= \vec{a}_r + \vec{\omega} \wedge \underbrace{(\dot{y}_1 \hat{e}_1 + \dot{y}_2 \hat{e}_2 + \dot{y}_3 \hat{e}_3)}_{\vec{v}_r} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

Ora passiamo a derivare la seconda parte:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_r}{dt} &= \frac{d}{dt} [\vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q})] = \frac{d}{dt} [\vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (y_1 \hat{e}_1 + y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3)] = \\ &= \vec{a}_Q + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q}) + \vec{\omega} \wedge \left(\underbrace{\dot{y}_1 \hat{e}_1 + \dot{y}_2 \hat{e}_2 + \dot{y}_3 \hat{e}_3}_{\vec{v}_r} + y_1 \dot{\hat{e}}_1 + y_2 \dot{\hat{e}}_2 + y_3 \dot{\hat{e}}_3 \right) = \\ &= \vec{a}_Q + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q}) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{v}_r + \frac{y_1 \dot{\hat{e}}_1 + y_2 \dot{\hat{e}}_2 + y_3 \dot{\hat{e}}_3}{y_1 (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_1) + y_2 (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_2) + y_3 (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_3)} \right) = \\ &= \vec{a}_Q + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q}) + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge (y_1 \hat{e}_1 + y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3) \right] \\ &\quad \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q})]}_{\vec{a}_c} \end{aligned}$$

Ora possiamo unire le due parti che abbiamo derivato separatamente e trovare la formula dell'accelerazione assoluta:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \underbrace{\vec{a}_Q + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q}) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-Q})]}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r}_{\vec{a}_c}$$

Anche qui bisogna fare alcune osservazioni:

- L'accelerazione di trascinato è uguale all'accelerazione che P avrebbe se fosse rigidamente collegato alla terna mobile e trascinato dal suo moto rispetto all'osservatore fisso;
- L'accelerazione di Coriolis (o complementare) rende radicalmente diversa la legge di composizione delle accelerazioni da quella delle velocità. Osserviamo che si annulla quando $\vec{\omega}=0$ oppure $\vec{v}_r=0$;
- Nel caso semplicissimo in cui l'osservatore mobile sia traslante e possieda quindi velocità angolare costantemente nulla, si deduce che l'accelerazione assoluta si ottiene semplicemente sommando quella relativa a quella dell'origine Q dell'osservatore mobile.

Legge di composizione delle velocità angolari: la velocità $\vec{\omega}_a$ di un corpo rigido rispetto all'osservatore fisso è pari alla somma della sua velocità angolare $\vec{\omega}_r$ rispetto all'osservatore mobile e della velocità angolare $\vec{\omega}$ di questo osservatore rispetto a quello fisso:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}$$

Dimostrazione: trattando qui di un corpo rigido dobbiamo riprendere la legge di distribuzione delle velocità e le velocità di trascinamento per due punti P ed H appartenenti a tale corpo:

1. Distribuzione delle velocità nel corpo rigido vista dall'origine del sistema fisso con origine in O:

$$\vec{v}_a(P) = \vec{v}_a(H) + \vec{\omega}_a \wedge \overline{(P-H)}$$

2. Distribuzione delle velocità nel corpo rigido vista dall'origine del sistema mobile con origine in Q:

$$\vec{v}_r(P) = \vec{v}_r(H) + \vec{\omega}_r \wedge \overline{(P-H)}$$

3. Velocità di trascinamento relativa al punto P:

$$\vec{v}_\tau(P) = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge \overline{(P-Q)}$$

4. Velocità di trascinamento relativa al punto H:

$$\vec{v}_\tau(H) = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge \overline{(H-Q)}$$

Ora riscrivo la legge di Galileo per la composizione delle velocità utilizzando quanto appena trovato:

$$\vec{v}_a(P) = \vec{v}_r(P) + \vec{v}_\tau(P) = \vec{v}_r(H) + \vec{\omega}_r \wedge \overline{(P-H)} + \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge \overline{(P-Q)}$$

$$\vec{v}_a(H) = \vec{v}_r(H) + \vec{v}_\tau(H) = \vec{v}_r(H) + \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge \overline{(H-Q)}$$

Ora sottraggo membro a membro la (1) e la (2), poi sostituisco in ciò che trovo la (3) e la (4). Semplificando i passaggi si trova:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \overline{(P-Q)} &= \vec{\omega} \wedge \overline{(H-Q)} + (\vec{\omega}_a - \vec{\omega}_r) \wedge \overline{(P-H)} \\ \vec{\omega} \wedge \left[\overline{(P-Q)} - \overline{(H-Q)} \right] - (\vec{\omega}_a - \vec{\omega}_r) \wedge \overline{(P-H)} &= 0 \\ \underbrace{\overline{(P-Q)} - \overline{(H-Q)}}_{\overline{(P-Q)} + \overline{(Q-H)} - \overline{(P-H)}} &= (\vec{\omega}_a - \vec{\omega}_r) \wedge \overline{(P-H)} \\ (\vec{\omega} - \vec{\omega}_a + \vec{\omega}_r) \wedge \overline{(P-H)} &= 0 \end{aligned}$$

Il vettore $\overline{(P-H)}$ non può essere pari a zero, quindi il prodotto vettoriale appena scritto sarà nullo solo se sarà nullo anche il primo membro, dunque:

$$\vec{\omega} - \vec{\omega}_a + \vec{\omega}_r = 0 \quad \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}$$

La legge di composizione della velocità angolare può essere convenientemente applicata quando si debba calcolare la velocità angolare di un corpo rigido in moto nello spazio. Infatti è spesso utile introdurre uno o più osservatori mobili, ognuno dei quali si muova di moto piano rispetto al precedente, in modo da poterne esprimere con facilità la velocità

angolare (relativa), attraverso la derivata dell'angolo di rotazione. Sommando poi le quantità ottenute si ottiene la velocità angolare assoluta cercata.

4) Momento di una forza. Risultante e momento di un sistema di forze. Sistemi di forze equivalenti. Riduzione dei sistemi di forze.

Momento di una forza: se \vec{F} è una forza che agisce su un punto materiale P, il momento di \vec{F} rispetto ad un polo O è dato dalla formula:

$$\vec{M}_{(O)} = \overrightarrow{(P-O)} \wedge \vec{F}$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale segue che il momento di una forza è ortogonale sia alla forza stessa sia alla retta congiungente il punto di applicazione (P) con il polo (O).

Notiamo inoltre che $\vec{M}_{(O)}$ dipende anche dalla forza e dal punto materiale su cui essa agisce (punto di applicazione); cioè due forze uguali ma applicate in punti diversi hanno diverso momento rispetto ad uno stesso polo.

Il modulo di $\vec{M}_{(O)}$ è uguale all'area del parallelogramma costruito sui vettori $\overrightarrow{(P-O)}$ ed \vec{F} ; tale modulo è uguale anche al prodotto del modulo di \vec{F} per la distanza b (detta braccio della forza) del polo O dalla retta r (detta retta d'applicazione) passante per P e diretta come \vec{F} .

Il momento di una forza cambia non solo quando si cambia la retta d'applicazione, ma anche quando lo si calcola rispetto a poli diversi; infatti se O' è un polo diverso da O si ha:

$$\vec{M}_{(O')} = \overrightarrow{(P-O')} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{(P-O)} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{(O-O')} \wedge \vec{F} = \vec{M}_{(O)} + \overrightarrow{(O-O')} \wedge \vec{F}$$

Quindi il momento rimane inalterato solo quando $\overrightarrow{(O-O')}$ è diretto come \vec{F} .

Risultante e momento di un sistema di forze: dato un sistema di forze definiamo il risultante del sistema \vec{R} ed il momento risultante (rispetto ad un polo O) $\vec{M}_{(O)}$ come:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \vec{M}_{(O)} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{(P_i-O)} \wedge \vec{F}_i$$

Se, come prima, anche qui consideriamo un polo O' diverso da O si avrà:

$$\vec{M}_{(O')} = \vec{M}_{(O)} + \overrightarrow{(O-O')} \wedge \vec{R}$$

Nella formula appena scritta vediamo che il vettore momento cambia al cambiare del polo; risulta però indipendente la componente del momento lungo la direzione di \vec{R} . Perciò ne segue che:

$$\vec{M}_{(O')} \cdot \vec{R} = \vec{M}_{(O)} \cdot \vec{R}$$

Quindi la quantità $I = \overline{M}_{(O)} \cdot \vec{R}$ non varia al variare del polo e, proprio per questo motivo, è chiamata *invariante scalare* (o *automomento*).

Osserviamo che il risultante \vec{R} di per sé non è applicato ad alcun punto, infatti è la somma vettoriale di tante forze applicate in punti diversi. Quindi NON possiamo dire che \vec{R} è equivalente al sistema di forze di cui è risultante. Per esaminare meglio questo aspetto della questione introduciamo il concetto di *sistemi forze equivalenti* (*equipollenti*), ovvero sistemi di forze che hanno stesso risultante e stesso momento rispetto ad un qualsiasi polo. Per avere due sistemi equipollenti devo avere dunque almeno due forze in ognuno di essi, ricordando che un sistema di n forze può sempre essere semplificato ad un sistema di due forze applicate in due punti diversi.

In realtà alcuni sistemi possono essere ridotti ad una unica forza: perché ciò avvenga deve verificarsi la seguente condizione:

$$I = \overline{M}_{(O)} \cdot \vec{R} = 0$$

ovvero l'invariante scalare deve essere nullo. L'aver invariante scalare nullo è condizione necessaria per ridurre il sistema di forze ad un'unica forza. In questo caso si dice che esiste la *retta di applicazione del risultante*, ovvero la retta che ha uguale direzione all'unico risultante del sistema.

5) Centro di un sistema di forze parallele, baricentro. Proprietà del baricentro.

Analizziamo un sistema di forze parallele: un esempio notevole di tale sistema è dato dai vettori peso di un insieme di punti materiali.

In tal caso le forze sono tutte parallele e rivolte verticalmente verso il basso lungo il versore \hat{k} , quindi $\vec{F}_i = F_i \hat{k}$.

Allora il momento rispetto ad un polo O sarà:

$$\overline{M}_{(O)} = \sum_{i=1}^n \overline{(P_i - O)} \wedge F_i \hat{k} = \sum_{i=1}^n F_i \overline{(P_i - O)} \wedge \hat{k} = \left[\sum_{i=1}^n F_i \overline{(P_i - O)} \right] \wedge \hat{k}$$

Dalla formula si vede che, essendo moltiplicato vettorialmente per il versore \hat{k} , il momento sarà perpendicolare a tutte le forze. Ma sappiamo che il risultante \vec{R} delle forze è parallelo ad esse, quindi (per le proprietà del prodotto scalare) deve valere che $I = \vec{R} \cdot \overline{M}_{(O)} = 0$.

Possiamo in questo modo affermare che esiste la retta di applicazione del risultante e per calcolarla facciamo:

$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_{(O)}} = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \hat{k} \wedge \left\{ \left[\sum_{i=1}^n F_i (\overrightarrow{P_i - O}) \right] \wedge \hat{k} \right\} = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \left\{ \sum_{i=1}^n F_i (\overrightarrow{P_i - O}) - \hat{k} \left[\sum_{i=1}^n F_i (\overrightarrow{P_i - O}) \cdot \hat{k} \right] \right\}$$

Sapendo che $\overrightarrow{(Q - O)} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_{(O)}}}{R^2} + \lambda \vec{R}$ posso riscrivere l'equazione di $\overrightarrow{(Q - O)}$ alla luce di quanto ho appena trovato e, semplificando i passaggi, ottengo:

$$\overrightarrow{(Q - O)} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \overrightarrow{(P_i - O)}}{\sum_{i=1}^n F_i} + \mu \vec{R} \quad \text{con } \mu = \lambda + \lambda^* = \lambda - \frac{\sum_{i=1}^n F_i (\overrightarrow{P_i - O}) \cdot \hat{k}}{\left(\sum_{i=1}^n F_i \right)^2}$$

In questo modo abbiamo trovato il centro del sistema di forze parallele.

Se le forze \vec{F} fossero forze peso, il centro di tali forze sarebbe caratterizzato dall'espressione appena scritta e sarebbe chiamato *baricentro*.

Preso quindi un sistema di punti il suo baricentro avrà coordinate:

$$\overrightarrow{(Q - O)}_x = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \overrightarrow{(P_i - O)}_x}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad \overrightarrow{(Q - O)}_y = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \overrightarrow{(P_i - O)}_y}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad \overrightarrow{(Q - O)}_z = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \overrightarrow{(P_i - O)}_z}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

Possiamo ora analizzare alcune proprietà tipiche del baricentro:

- * Il baricentro di due punti materiali si trova sul segmento che li congiunge in modo tale da dividerlo in due parti inversamente proporzionali alle masse collocate nei due punti. È come una media pesata della distribuzione delle masse;
- * Il baricentro di un sistema piano è contenuto nel piano del sistema;
- * Ogni piano (o retta) diametrale contiene il baricentro;
- * Il baricentro tiene sempre conto delle proprietà di simmetria, infatti è sempre contenuto nel piano (o asse) di simmetria che divide un sistema tridimensionale (o bidimensionale);
- * Se un sistema materiale è contenuto in una porzione di piano delimitata da una curva chiusa e convessa, il baricentro deve appartenere alla regione delimitata dalla curva in questione.

6) Enunciare il principio dei lavori virtuali. Principio dei lavori virtuali per un sistema olonomo. Ricavare il principio di stazionarietà del potenziale.

Definiamo *lavoro virtuale* di un sistema di forze relativo a spostamenti virtuali:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta P_i$$

Principio dei lavori virtuali: condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione C sia di equilibrio per un sistema meccanico a vincoli ideali è che il lavoro delle forze attive sia non positivo per ogni spostamento virtuale δP a partire da C :

$$\delta L^{(a)} \leq 0 \text{ per ogni } \delta P \text{ da } C$$

In particolare si ha che:

$$\delta L^{(a)} = 0 \text{ per ogni } \delta P \text{ reversibile da } C.$$

Da sottolineare è che tale principio è valido esclusivamente nel caso siano presenti soli vincoli ideali, ovvero vincoli tali per cui il lavoro virtuale è maggiore o uguale a zero per ogni spostamento virtuale.

Vediamo ora come si esprime il lavoro delle forze attive in un sistema olonomo:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta P_i \quad \text{con} \quad \delta P_i = \sum_{j=1}^n \frac{\delta P_i}{\delta q_j} \delta q_j$$

Quindi possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} \delta L &= \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\delta P_i}{\delta q_j} \delta q_j \right) = \left(\sum_{j=1}^n \delta q_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\delta P_i}{\delta q_j} \right) \\ \delta L &= \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = \delta U \quad \text{da cui deriva che} \quad Q_j = \frac{\delta U}{\delta q_j} \end{aligned}$$

Da qui possiamo dire che nel caso forze attive conservative, esiste il potenziale $U=U(q)$ e le componenti generalizzate possono essere collegate ad esso attraverso la formula appena citata.

In questo caso quindi la ricerca delle posizioni di equilibrio si può ricondurre allo studio del potenziale e da ciò ricaviamo il *teorema di stazionarietà del potenziale*: le configurazioni ordinarie di equilibrio di un sistema olonomo sono tutte e sole quelle che annullano le derivate del potenziale rispetto a tutte le coordinate libere. Esse coincidono quindi con i punti di stazionarietà del potenziale.

7) Definire il momento d'inerzia di un sistema materiale rispetto ad un asse. Enunciare e dimostrare il teorema di Huygens.

Si definisce *momento d'inerzia* di un punto materiale di massa m , rispetto ad un asse a , lo scalare $I_a = mr^2$, dove r è la distanza del punto dall'asse. Di conseguenza si definisce

momento d'inerzia di un sistema di punti materiali (o sistema materiale) rispetto ad un asse a , la somma I dei momenti d'inerzia dei singoli punti rispetto allo stesso asse:

$$I_a = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2$$

dove r_k è la distanza del punto P_k di massa m_k dall'asse considerato.

In alternativa, per un sistema materiale B di densità ρ , il momento d'inerzia è anche indicato come:

$$I_a = \int_B \rho r^2 d\tau$$

Per facilitare il calcolo dei momenti d'inerzia risulta conveniente individuare come varia il momento d'inerzia quando l'asse viene trasportato parallelamente a se stesso. Introduciamo quindi il *teorema di Huygens – Steiner*: il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse arbitrario è pari alla somma:

$$I_a = I_{a_G} + md^2$$

dove I_{a_G} è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse a_G parallelo ad a e passante per il baricentro G del corpo stesso, m è la massa totale del corpo e d è la distanza tra i due assi.

Dimostrazione: utilizziamo un sistema di riferimento con origine nel baricentro G del corpo (quindi $x_G = y_G = z_G = 0$) e con asse z parallelo all'asse a . Dette (x_a, y_a) le coordinate in cui l'asse a interseca il piano xy , dalla definizione di momento d'inerzia si ottiene:

$$\begin{aligned} I_a &= \int_B \rho \left((x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 \right) d\tau = \\ &= \left[\int_B \rho (x^2 + y^2) d\tau \right] - \left[2x_a \int_B \rho x d\tau \right] - \left[2y_a \int_B \rho y d\tau \right] + (x_a^2 + y_a^2) \int_B \rho d\tau = \\ &= I_{a_G} - 2m(x_a x_G + y_a y_G) + m(x_a^2 + y_a^2) = I_{a_G} + md^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato le definizioni di momento d'inerzia e di baricentro, e abbiamo tenuto conto che il baricentro coincide con l'origine del sistema.

Come conseguenza di questo teorema si riconosce che tra tutti gli assi aventi stessa direzione, quello che passa per il baricentro è l'asse rispetto al quale il corpo ha momento d'inerzia minimo.

8) Ricavare la formula per i momenti d'inerzia rispetto ad assi concorrenti in un punto.

Definire la matrice d'inerzia, l'ellissoide d'inerzia e gli assi principali d'inerzia.

Proprietà degli assi principali d'inerzia.

(Vedi domanda 10)

9) **Definire la quantità di moto di un sistema materiale. Enunciare e dimostrare il teorema della quantità di moto. Ricavare la legge di moto del baricentro.**

Definiamo *quantità di moto di un punto materiale* il prodotto della sua massa per la sua velocità e *quantità di moto di un sistema di punti materiali (o materiale)* la somma delle quantità di moto dei singoli punti; in altre parole, indicato con \vec{Q} il vettore quantità di moto di un sistema formato da N punti, si ha:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad \text{e quindi} \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} = \vec{R}^{(e)}$$

poiché si ammette che le masse m_i restino costanti nel tempo. Allora la formula precedente prende anche la forma:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(e)}$$

e si dice *prima equazione cardinale della dinamica* o *equazione della quantità di moto (o teorema della quantità di moto)*; essa afferma che la derivata della quantità di moto rispetto al tempo eguaglia il risultante delle forze esterne.

La definizione di \vec{Q} coinvolge le velocità dei singoli punti del sistema, ma è possibile andare oltre facendo comparire un vettore che dipende dalla posizione dei singoli punti del sistema. A questo scopo consideriamo il punto \bar{P} il cui vettore di posizione \vec{x} è definito dalla relazione:

$$m\vec{x} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \quad \text{con} \quad m = \sum_{i=1}^N m_i$$

Il punto \bar{P} è definito come *centro di massa* o *baricentro* e la costante m è la massa totale del sistema.

Derivando e confrontando le formule precedenti si ottiene il seguente risultato:

$$\vec{Q} = m \frac{d\vec{x}}{dt} = m\vec{v}$$

dove $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$ è la velocità del baricentro. Ne segue allora che:

$$m\vec{a} = \vec{R}^{(e)}$$

in cui \vec{a} è l'accelerazione del baricentro. Questa non è altro che una diversa forma della prima equazione cardinale della dinamica che scritta in questo modo prende il nome di *teorema del moto del baricentro*. In sintesi dice che il baricentro di un sistema si muove come se fosse un punto materiale dotato di massa pari alla massa totale del sistema e sottoposto a forze aventi come risultante il risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

10) Definire il momento delle quantità di moto di un sistema rispetto ad un polo. Ricavare la legge di cambiamento di polo. Momento delle quantità di moto di un corpo rigido rispetto ad un punto solidale. Casi particolari.

Chiamiamo *momento delle quantità di moto di un sistema di punti materiali* (rispetto ad un polo O) la somma vettoriale dei momenti delle quantità di moto dei singoli punti (rispetto allo stesso polo O); ovvero:

$$\vec{\Gamma}_{(O)} = \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{(P_k - O)} \wedge \vec{v}_k$$

Se per caso ci fosse bisogno di cambiare il polo rispetto al quale stiamo calcolando il momento, detto O' il nuovo polo, dobbiamo ricordare che:

$$\overrightarrow{(P - O')} = \overrightarrow{(P - O)} + \overrightarrow{(O - O')}$$

quindi:

$$\vec{\Gamma}_{(O')} = m \overrightarrow{(P - O')} \wedge \vec{v} = \underbrace{m \overrightarrow{(P - O)} \wedge \vec{v}}_{\vec{\Gamma}_{(O)}} + m \overrightarrow{(O - O')} \wedge \vec{v}$$

Ora vogliamo definire il *momento della quantità di moto per un corpo rigido* (ovvero un sistema rigido con atto di moto rigido) rispetto ad un punto solidale: ricordiamo che

$$\vec{v}_k = \vec{v}_O + \vec{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{(P_k - O)}$$

Sostituiamo questa formula in quella ricavata per il momento della quantità di moto di un sistema di punti materiali:

$$\vec{\Gamma}_{(O)} = \underbrace{\left[\sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{(P_k - O)} \right] \wedge \vec{v}_O}_{m \overrightarrow{(P - O)} \wedge \vec{v}_O} + \underbrace{\sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{(P_k - O)} \wedge [\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{(P_k - O)}]}_{\vec{\Gamma}_{(O)}^{rot}}$$

(\bar{P} è la posizione del centro di massa e $\vec{\Gamma}_{(O)}^{rot}$ è il momento della quantità di moto detto "di rotazione").

Nell'espressione appena scritta $\vec{\Gamma}_{(O)}^{rot}$ corrisponde al solo contributo se l'atto di moto fosse rotatorio attorno ad O ; essendo evidente che il primo termine dell'equazione precedente si esprima per mezzo di coordinate libere, studiamo più a fondo il termine $\vec{\Gamma}_{(O)}^{rot}$ per capire come si può riscrivere. A tal proposito scriviamo che:

$$\overrightarrow{(P_k - O)} \wedge [\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{(P_k - O)}] = [\overrightarrow{(P_k - O)} \wedge \vec{\omega}] \wedge \overrightarrow{(P_k - O)} = \|\overrightarrow{P_k - O}\|^2 \vec{\omega} - [\overrightarrow{(P_k - O)} \cdot \vec{\omega}] \overrightarrow{(P_k - O)}$$

Preso come origine del sistema di riferimento il punto O , scriviamo $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ come versori solidali al sistema di punti materiali e chiamiamo x_k, y_k, z_k le coordinate del punto nel sistema. Poi prendiamo $\vec{\omega} = p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k}$ e $\overrightarrow{(P_k - O)} = x_k\hat{i} + y_k\hat{j} + z_k\hat{k}$.

Inseriamo questi due vettori nella relazione precedente e facendo alcuni passaggi ricaviamo:

$$\overline{\Gamma_{(O)}}^{rot} = Ap\hat{i} + Bq\hat{j} + Cr\hat{k} + Dr\hat{j} + Dq\hat{k} + Ep\hat{k} + Er\hat{i} + Fq\hat{i} + Fp\hat{j}$$

dove:

$$A = \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2) \quad B = \sum_{k=1}^N m_k (z_k^2 + x_k^2) \quad C = \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

$$D = -\sum_{k=1}^N m_k y_k z_k \quad E = -\sum_{k=1}^N m_k z_k x_k \quad F = -\sum_{k=1}^N m_k x_k y_k$$

sono costanti che dipendono dalla distribuzione di masse e dall'orientamento della terna cartesiana scelta. La formula esprime $\overline{\Gamma_{(O)}}^{rot}$ in termini delle componenti di $\vec{\omega}$ e dei versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ e delle loro derivate prime rispetto al tempo. La struttura del sistema, cioè la disposizione di masse, interviene attraverso le costanti A, B, C, D, E, F .

In particolare A, B, C non sono altro che i *momenti d'inerzia* del sistema rigido considerato rispetto agli assi coordinati x, y, z ; invece D, E, F sono chiamati *prodotti d'inerzia*.

Le costanti A, B, C, D, E, F dipendono dal sistema di coordinate prescelto: esse traducono proprietà d'inerzia di un sistema rigido rispetto alle rotazioni, ma in una maniera dipendente dalla terna cartesiana ortogonale prescelta. Per separare la parte arbitraria da ciò che vi è di intrinseco, moltiplichiamo scalarmente $\overline{\Gamma_{(O)}}^{rot}$ per $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} \cdot \overline{\Gamma_{(O)}}^{rot} = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dqr + 2Epr + 2Fpq$$

In questo modo l'espressione al secondo membro è invariante rispetto al cambiamento di sistema di riferimento, benché varino $A, B, C, D, E, F, p, q, r$. Possiamo dare a tutto ciò una forma geometrica sostituendo al vettore $\vec{\omega}$ un vettore di posizione $x = P - O$ di componenti x, y, z ; quindi sarà invariante anche:

$$I_O = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy.$$

Osservando bene l'equazione si nota che è una quadrica a centro in O che può assumere una forma particolare se eguagliarla ad 1 (ovvero $I = 1$): in tal modo assume la forma di un ellissoide ed ogni asse passante per il centro la interseca in due punti P a distanza $1/\sqrt{I}$ dal centro, dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse considerato. Una volta costruito l'ellissoide per trovare il momento I basta misurare o calcolare la distanza dall'origine dei punti di intersezione di tale asse con la superficie dell'ellissoide. Per questo motivo è chiamato *ellissoide d'inerzia* e conoscerlo significa

conoscere in forma geometrica tutti i momenti d'inerzia rispetto agli assi passanti per O (chiamati *assi principali d'inerzia*, rispetto ai quali si annullano i prodotti d'inerzia.).

11) Definizione dell'energia cinetica di un sistema materiale. Enunciare e provare il teorema di König.

L'energia cinetica di un sistema materiale è pari a

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Essa è una "misura del movimento" diversa dalla quantità di moto, anzi è la più significativa misura del moto se si astrae dalla direzione, in quanto non si può annullare se non quando tutti i punti del sistema (con massa diversa da zero) sono fermi.

Osservazioni: l'energia cinetica, al pari della quantità di moto, ha la proprietà di additività rispetto alle parti; invece non ha, in generale, la proprietà di additività rispetto alle velocità.

Vi è però una eccezione importante: se si decompone la velocità di ogni punto nella velocità \bar{v} del baricentro e di quella v_i' relativa ad un sistema di riferimento che trasla (rispetto all'osservatore inerziale considerato) con la velocità \bar{v} del baricentro, si ottiene:

$$T = T' + \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \left(\sum_{i=1}^N m_i v_i' \right) \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + T'$$

in quanto il termine tra parentesi è nullo poiché eguale alla quantità di moto rispetto ad un sistema con baricentro fermo.

Quanto appena citato è il *teorema di König*: l'energia cinetica di un sistema di punti

materiali è uguale alla somma dell'energia cinetica ($\frac{1}{2} m \bar{v}^2$) che il sistema avrebbe se tutti i punti si muovessero con la velocità del baricentro e dell'energia cinetica che compete ai punti per le velocità da essi possedute relativamente ad un sistema traslante con la velocità \bar{v} del baricentro.

12) Ricavare l'espressione dell'energia cinetica per un atto di moto traslatorio, per un atto di moto rotatorio, per un atto di moto rototraslatorio.

- * Energia cinetica nell'atto di moto traslatorio:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

- * Energia cinetica nell'atto di moto rotatorio:

$$\text{nel piano } T = \frac{1}{2} I_{(C.I.R.)} \cdot \omega^2 \quad \text{e nello spazio } T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overline{\Gamma_{(C.I.R.)}^{rot}}$$

- Energia cinetica nell'atto di moto rototraslatorio:

nel piano $T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} I_{(\bar{P})} \omega^2$ e nello spazio $T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{(\bar{P})}^{rot}}$ in cui \bar{P} è il centro di massa (o baricentro).

13) Enunciare i postulati della dinamica. Ricavare le equazioni cardinali. Dedurre integrali del moto dalle equazioni cardinali.

I postulati della dinamica classica si possono riassumere con i principi della meccanica Newtoniana:

- *Primo principio della dinamica (o principio d'inerzia)*: in un sistema inerziale, un corpo libero, cioè non sottoposto ad alcuna forza, mantiene il suo stato di moto rettilineo uniforme o di quiete finché non interviene una forza esterna a variare tale moto;
- *Secondo principio della dinamica*: una forza impressa ad un corpo produce una variazione della sua quantità di moto nel verso della forza in maniera direttamente proporzionale alla forza applicata; ovvero, l'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza da esso subita;
- *Terzo principio della dinamica (o principio di azione/reazione)*: in un sistema di riferimento inerziale, la quantità di moto ed il momento angolare totale rispetto ad un polo fisso di un sistema materiale libero (cioè non sottoposto a forze esterne) si conservano. Da ciò discende il principio di azione e reazione: ad ogni azione corrisponde una reazione, uguale e contraria, agente sulla stessa retta di applicazione.

Da questi principi possiamo ricavare le due *equazioni cardinali della dinamica*:

- Ricaviamo la *prima equazione cardinale della dinamica* partendo dalla legge Newtoniana:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} = \vec{R}^{(e)} \quad \text{ed essendo} \quad \vec{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

allora possiamo dire che:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(e)}.$$

- Sempre dalla legge Newtoniana ricaviamo anche la *seconda equazione cardinale della dinamica*:

alla domanda 10 eravamo arrivati a dire che il momento della quantità di moto per un sistema di punti è $\vec{\Gamma}_{(O)} = \sum_{k=1}^N m_k (\vec{P}_k - \vec{O}) \wedge \vec{v}_k$. Ora lo deriviamo rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\Gamma}_{(O)}}{dt} &= \sum_{k=1}^N m_k \left[\frac{d}{dt} (\vec{P}_k - \vec{O}) \right] \wedge \vec{v}_k + \sum_{k=1}^N m_k (\vec{P}_k - \vec{O}) \wedge \frac{d}{dt} \vec{v}_k \\ \frac{d\vec{\Gamma}_{(O)}}{dt} &= \sum_{k=1}^N m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_O) \wedge \vec{v}_k + \vec{M}_O^{(e)} = -\vec{v}_O \left(\sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k \right) + \vec{M}_O^{(e)} \end{aligned}$$

ma la quantità tra parentesi non è altro che la quantità di moto \vec{Q} e quindi:

$$\frac{d\vec{\Gamma}_{(O)}}{dt} = \vec{Q} \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{(e)}.$$

Queste due equazioni compongono il *sistema cardinale della dinamica*; esse non contengono forze interne e valgono per ogni sistema di punti materiali.

Per un sistema rigido libero le due equazioni cardinali sono *necessarie e sufficienti* per la determinazione del movimento, quando siano noti l'atto di moto e la posizione iniziale del sistema, nonché le forze esterne agenti sul sistema.

In particolare, se si considera un sistema rigido, le equazioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio sono le cosiddette equazioni cardinali della statica, ovvero:

$$\vec{R}^{(e)} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{M}_O^{(e)} = 0.$$

14) Dinamica del corpo rigido libero e vincolato.

A partire dal principio dei lavori virtuali si può costruire un principio in grado di descrivere la dinamica di un sistema di punti materiali e corpi rigidi sottoposti a vincoli ideali. Così facendo si ricava il principio fondamentale su cui poggia la meccanica lagrangiana: esso consente infatti di derivare le condizioni pure di equilibrio e di moto per sistemi sottoposti a vincoli ideali.

Parliamo quindi della *relazione simbolica della dinamica*: sia $\{(P_i, m_i), i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ un sistema di punti materiali liberi, oppure sottoposti a vincoli ideali. Sia inoltre $\{(P_i, \vec{F}_i), i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ il sistema di forze attive agenti sul sistema. Condizione necessaria e sufficiente affinché l'insieme delle accelerazioni $\{(P_i, \vec{a}_i), i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ fornisca il moto del sistema è che:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta P_i \leq 0$$

per ogni insieme di spostamenti virtuali $\{(P_i, \delta P_i), i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ ammessi dai vincoli.

Quando i vincoli agenti sul sistema sono anche bilateri, oltre ad essere ideali, la relazione simbolica della dinamica si semplifica e può essere scritta sotto forma di equazione.

Ricordiamo che un vincolo è bilatero quando ammette solo spostamenti virtuali reversibili, in altre parole per un vincolo bilatero possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot (\delta P_i) \leq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot (-\delta P_i) \leq 0$$

Ciò implica che la quantità a membro sinistro deve essere sia non negativa sia non positiva, quindi deve essere nulla. Si ottiene così l'equazione simbolica della dinamica: sia

$\{(P_i, m_i), i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ un sistema di punti materiali liberi, oppure sottoposti a vincoli ideali bilateri. Sia inoltre $\{(P_i, \vec{F}_i), i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ il sistema di forze attive agenti sul sistema.

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'insieme delle accelerazioni

$\{(P_i, \vec{a}_i), i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ fornisca il moto del sistema è che:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta P_i = 0$$

per ogni insieme di spostamenti virtuali $\{(P_i, \delta P_i), i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ ammessi dai vincoli.

15) Enunciare e mostrare il teorema dell'energia cinetica. Dedurre la conservazione dell'energia.

Detta $T = \frac{1}{2} m v^2$ l'energia cinetica e $\Pi = \vec{F} \cdot \vec{v}$ la potenza, possiamo trovare una relazione

che le lega assieme, infatti se partiamo da

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

e moltiplichiamo scalarmente i due membri per \vec{v} otteniamo:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

Nell'equazione scalare appena scritto compaiono sia l'energia cinetica sia la potenza, quindi possiamo riassumere quanto appena fatto attraverso una formula che esprime il *teorema dell'energia cinetica*:

$$\frac{dT}{dt} = \Pi.$$

Questo teorema è molto importante soprattutto se consideriamo un sistema isolato di punti materiali; allora le forze sono solo interne e si ha (applicando il principio di azione e reazione):

$$\delta L = \vec{F}_{ik} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ik} \cdot \vec{v}_i = dU_{ik} \quad \text{quindi} \quad \frac{dU_{ik}}{dt} - \vec{F}_{ik} \cdot \vec{v}_i = 0$$

Essendo che stiamo considerando forze conservative possiamo scrivere che:

$$\text{rispetto al punto } i \text{ di una coppia di punti: } \frac{dU_{ik}}{dt} = \vec{F}_{ik} \cdot \vec{v}_i = \Pi;$$

$$\text{rispetto al punto } k \text{ di una coppia di punti: } \frac{dU_{ki}}{dt} = -\vec{F}_{ik} \cdot \vec{v}_i = -\Pi.$$

Sommando membro a membro le due equazioni appena ottenute ricavo che:

$$2 \frac{dU_{ik}}{dt} = \vec{F}_{ik} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_k)$$

$$2 \sum_{i,k} \frac{dU_{ik}}{dt} = \sum_{i,k} \vec{F}_{ik} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_k) = \sum_{i,k} \vec{F}_{ik} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i,k} \vec{F}_{ki} \cdot \vec{v}_i = 2 \sum_{i,k} \underbrace{\vec{F}_{ik} \cdot \vec{v}_i}_{\Pi}$$

$$\sum_{i,k} \frac{dU_{ik}}{dt} - \sum_{i,k} \Pi = 0$$

Applicando qui il teorema dell'energia cinetica possiamo ricavare la *legge di conservazione dell'energia meccanica totale del sistema* (in cui E è la quantità di energia che si conserva ed è una costante):

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 0 \quad \text{quindi} \quad E = T - U.$$

16) Ricavare le equazioni di Lagrange in forma non conservativa e conservativa. Integrale dei momenti cinetici.

Consideriamo un sistema a vincoli olonomi, ideali e bilateri. In questo caso le equazioni pure della dinamica prendono il nome di *equazioni di Lagrange* e si scrivono come:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

in cui T è l'energia cinetica, q_k sono le coordinate libere e Q_k si dicono componenti generalizzate della sollecitazione attiva. In particolare:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$$

L'equazione di Lagrange appena scritta è valida nel caso di forze non conservative. Quanto abbiamo invece forze conservative essa diventa:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Qui L è detta *funzione di Lagrange* (o *lagrangiana*) ed è definita come:

$$L = T + U = T - V.$$

Attraverso queste due equazioni di Lagrange possiamo calcolarci gli *integrali primi del moto* (ovvero quantità che derivate danno zero). Dalle equazioni cardinali della dinamica posso trovare gli integrali del moto se uno dei membri di destra si annulla.

Un integrale primo del moto per i sistemi dinamici che c'è sempre è:

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

Dalla lagrangiana posso trovare integrali primi del moto quando:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0.$$

Se questo integrale esiste è chiamato *integrale del momento cinetico*.

17) Dare la definizione di configurazione di equilibrio stabile. Enunciare e commentare il teorema di Dirichlet.

Consideriamo un sistema di n punti materiali.

Una sua configurazione di equilibrio $C^\circ = (P_1^\circ, P_2^\circ, \dots, P_n^\circ)$ si dice *stabile secondo Liapunov* se per ogni $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ esistono $\delta, \delta' > 0$ (dipendenti sia da ε che da ε') tali che se:

$$\begin{aligned} |P_i^\circ P_i(t_0)| &< \delta \\ |\vec{v}_i(t_0)| &< \delta' \end{aligned} \quad \forall i$$

allora:

$$\begin{aligned} |P_i^\circ P_i(t)| &< \varepsilon \\ |\vec{v}_i(t)| &< \varepsilon' \end{aligned} \quad \forall i, \forall t \geq t_0.$$

La definizione assegna quindi l'etichetta *stabile* a quelle configurazioni di equilibrio per le quali sia possibile effettuare la seguente procedura: si scelgano a piacere una massima distanza ε dalla configurazione di equilibrio ed una massima velocità ε' dei punti materiali.

Una volta scelti si vuole che sia possibile determinare un δ ed un δ' (non nulli) con la seguente proprietà: tutti i moti che partono a distanze minori di δ da C° e con velocità minori di δ' rimarranno per sempre confinati entro una distanza ε e la loro velocità sarà sempre limitata da ε' . È particolarmente importante sottolineare che tale condizione garantisce il confinamento non solo delle posizioni, ma anche delle velocità.

Per quanto riguarda la stabilità alla Liapunov dei massimi del potenziale, esiste il *teorema di Dirichlet – Lagrange*: consideriamo un sistema olonomo e conservativo a vincoli fissi, dotato di un potenziale U , che sia funzione continua delle posizioni. Sia inoltre q° una configurazione di equilibrio del sistema. Se q° è massimo relativo isolato di U (cioè un minimo relativo isolato dell'energia potenziale $V = -U$) allora q° è stabile secondo Liapunov.

Questo teorema rimane valido anche nel caso che sul sistema olonomo considerato agiscano anche forze non conservative, purché queste siano dissipative, e cioè non aumentino l'energia. Se, inoltre, le forze attive non conservative risultano essere completamente dissipative, si può dimostrare che il moto non solo rimane confinato vicino alla configurazione di equilibrio, ma tende ad essa quando il tempo tende ad infinito (in questo caso si parla di *stabilità asintotica*).

18) Piccole oscillazioni di un sistema olonomo con un grado di libertà attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

Consideriamo un sistema olonomo con un solo grado di libertà. In questo caso sono instabili tutte le posizioni di equilibrio che soddisfano la seguente proprietà: esiste un intorno di q° in cui U ammette valori non inferiori a $U(q^\circ)$. Così, anche nel caso di massimo piatto, ho instabilità.

Ora supponiamo di avere ancora un sistema olonomo con un grado di libertà e con una coordinata libera q ed una posizione q° di equilibrio instabile (quindi massimo del potenziale U).

Se facciamo la derivata del potenziale rispetto alla coordinata libera troviamo che:

$$U'(q^\circ) = 0$$

$$U''(q^\circ) < 0$$

Voglio far vedere il moto del sistema dinamico: uso quindi i soliti strumenti come le equazioni di Lagrange oppure la legge di conservazione dell'energia meccanica totale. Utilizzando quanto appena detto e le derivate del potenziale, mi riconduco ad una equazione di secondo grado da risolvere per trovare la legge del moto.

19) Meccanica relativa. Forze apparenti. Caso dell'osservatore traslante e caso dell'osservatore uniformemente ruotante.

Qui ci poniamo il problema di adottare una terna cartesiana ortogonale non inerziale: ci poniamo il problema di scrivere correttamente le equazioni della *dinamica relativa*. Questo problema si risolve immediatamente ricordando il teorema di Coriolis, ovvero:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_\tau + \vec{a}_c.$$

Per l'osservatore inerziale è lecito scrivere:

$$\vec{F} = m\vec{a}_r + m\vec{a}_\tau + m\vec{a}_c.$$

Notiamo che quindi un punto P può avere accelerazione \vec{a}_r diversa da zero anche se $\vec{F} = 0$, cioè anche se non ci sono corpi nelle vicinanze che esercitano la loro azione su P . Allora scriviamo:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_\tau + \vec{F}_c \quad \text{dove} \quad \vec{F}_\tau = -m\vec{a}_\tau \quad \text{ed} \quad \vec{F}_c = -m\vec{a}_c.$$

In tal modo la legge fondamentale vale anche per l'osservatore relativo purché si aggiungano alle forze di risultante \vec{F} , che traducono l'azione di altri punti materiali sul punto P , le due forze \vec{F}_τ e \vec{F}_c , dette rispettivamente *forza di trascinamento* e *forza complementare (o di Coriolis)*.

Queste due forze si dicono *apparenti* in quanto a differenza delle forze "effettive" di risultante \vec{F} non risultano dovute all'azione di corpi. Non essendovi corpi responsabili delle forze apparenti, a tali forze non può applicarsi neanche il principio di azione e reazione. Consideriamo ora il caso generale di un moto di trascinamento composto da un moto rotatorio con velocità angolare costante $\vec{\omega}$ intorno ad un asse fisso e di un moto traslatorio con accelerazione costante \vec{a}_0 .

Allora la forza di trascinamento diventa:

$$\vec{F}_\tau = -m\vec{a}_0 + m\omega^2(P - Q)$$

dove Q è il piede della perpendicolare da P all'asse di rotazione. In particolare se il moto di trascinamento è traslatorio, c'è solo il primo termine, se è rotatorio solo il secondo; così un'accelerazione verso l'altro equivale ad un aumento di peso, mentre una rotazione equivale ad una spinta che allontana dall'asse di rotazione. Per questa ragione il secondo termine che compare nella formula si dice *forza centrifuga*; essa è una particolare forza apparente (unica se il moto di trascinamento è rotatorio uniforme). Si noti che la forza centrifuga ha origine dall'*accelerazione centripeta*.