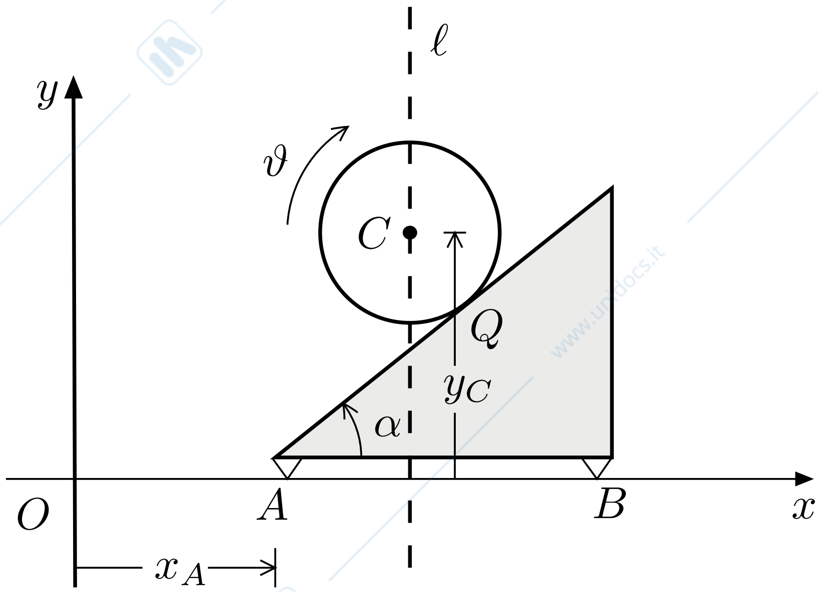
Meccanica Razionale   Test Scritto   Appello 5/11/20

Leggere attentamente:
1) scrivere a mano su fogli bianchi usando una penna nera con punta grande
2) scrivere nome, cognome e matricola **su ogni pagina**
3) fotografare le pagine e assicurarsi che il testo nelle foto sia leggibile
5) inviare le foto usando Google Moduli

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Il sistema in figura è formato da un disco di centro C e raggio R e da una lamina triangolare con il cateto AB appoggiato su una guida orizzontale. La lamina è libera di traslare lungo la guida orizzontale. Il disco è libero di ruotare attorno al suo centro C e il centro C è libero di traslare lungo la retta fissa ℓ. Il contatto tra disco e lamina è di puro rotolamento. Determinare

1. le relazioni cinematiche fra le coordinate x_A, y_c, ϑ indicate in figura (x_A è l'ascissa del vertice A della lamina triangolare, y_C è l'ordinata del centro C del disco e ϑ è l'angolo di rotazione del disco misurato in senso orario) e i gradi di libertà del sistema
2. l'equazione della polare fissa del disco



Soluzione: 1) La lamina triangolare può solo traslare lungo la guida orizzontale, quindi ogni punto della lamina ha la stessa velocità $\vec{v}_A = \dot{x}_A \hat{\imath}$ del punto A. In particolare, la velocità del punto della lamina a contatto con il piano inclinato è $\vec{v}_Q = \dot{x}_A \hat{\imath}$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Siccome il punto C è vincolato a muoversi lungo la retta verticale ℓ, la sua velocità è $\vec{v}_C = \dot{y}_C \hat{\jmath}$. La condizione di rotolamento puro del disco impone che le velocità del disco e della lamina in Q siano uguali. Quindi, per la legge delle distribuzione delle velocità di un corpo rigido,

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (Q - C). \tag{1}$$

La velocità angolare del disco è $\vec{\omega} = -\dot{\vartheta}\hat{k}$, mentre $Q - C = (R\sin\alpha)\hat{\imath} - (R\cos\alpha)\hat{\jmath}$. Sostituendo in (1), otteniamo

$$\dot{x}_A \hat{\imath} = \dot{y}_C \hat{\jmath} - \dot{\vartheta}\hat{k} \wedge (R\sin\alpha\hat{\imath} - R\cos\alpha\hat{\jmath}) = \dot{y}_C \hat{\jmath} - (R\sin\alpha)\dot{\vartheta}\hat{\jmath} - (R\cos\alpha)\dot{\vartheta}\hat{\imath},$$

da cui otteniamo le relazioni fra le derivate di x_A, y_C, ϑ,

$$\dot{y}_C = (R\sin\alpha)\dot{\vartheta} \qquad \text{e} \qquad \dot{x}_A = -(R\cos\alpha)\dot{\vartheta}$$

Integrando le uguaglianze precedenti rispetto al tempo t

$$\int \dot{y}_C dt = \int (R\sin\alpha)\dot{\vartheta} dt \qquad \text{e} \qquad \int \dot{x}_A dt = \int -(R\cos\alpha)\dot{\vartheta} dt$$

otteniamo le relazioni fra le coordinate x_A, y_C, ϑ,

$$y_C = (R\sin\alpha)\vartheta + c_1 \qquad \text{e} \qquad x_A = -(R\cos\alpha)\vartheta + c_2$$

dove c_1 e c_2 sono costanti. La configurazione del sistema è completamente determinata dalle coordinate x_A, y_C e ϑ. Abbiamo appena mostrato che x_A e y_C sono funzioni di θ, perciò per individuare una configurazione del sistema è sufficiente la sola coordinata ϑ (coordinata lagrangiana). Concludiamo che il sistema ha 1 grado di libertà.

2) Per il teorema di Chasles, il centro di istantanea rotazione H del disco coincide con l'intersezione fra la retta verticale che passa per Q e la retta orizzontale che passa per C. Quindi $H = (x_Q, y_C)$. Siccome $x_Q = x_C + R\sin\alpha$ è costante, l'equazione della polare fissa è $x = x_C + R\sin\alpha$.