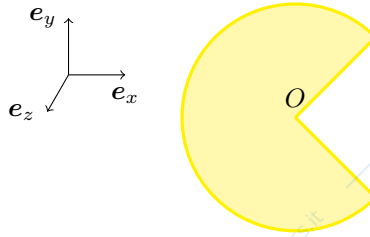


## ESERCIZI RISOLTI DI INERZIA

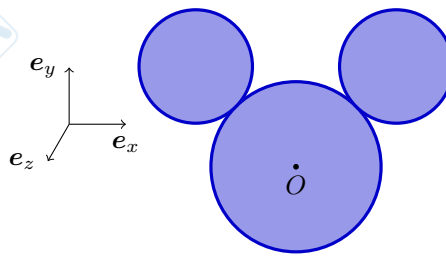
**Esercizio 1.** Il Pacman in figura ha raggio  $R$ , massa totale  $m$  uniformemente distribuita e angolo di apertura della bocca pari a  $\frac{\pi}{2}$ . Trovane

- (1) il vettore posizione  $C - O$  del centro di massa;
- (2) il tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_O$ ;
- (3) il tensore centrale d'inerzia  $\mathbf{I}_C$ .



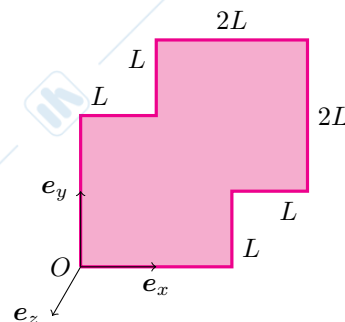
**Esercizio 2.** La sagoma di Topolino ha densità costante  $\rho$  ed è costituita da tre dischi: il viso di raggio  $\frac{3}{2}R$  e le due orecchie, entrambe di raggio  $R$ . Sapendo che l'angolo i segmenti congiungenti i centri delle orecchie e il centro della faccia è di  $\frac{\pi}{4}$ , trovane

- (1) il vettore posizione  $C - O$  del centro di massa;
- (2) il tensore centrale d'inerzia  $\mathbf{I}_C$ ;
- (3) il tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_O$ .



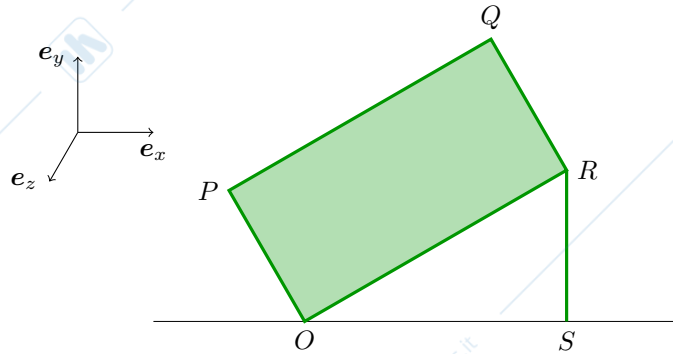
**Esercizio 3.** La lamina in figura ha densità costante  $\rho$ ; trovane

- (1) il vettore posizione  $C - O$  del centro di massa;
- (2) il tensore centrale d'inerzia  $\mathbf{I}_C$  e una sua base principale;
- (3) il tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_O$  e una sua base principale.



**Esercizio 4.** Il sistema in figura è composto dalla lamina rettangolare  $OPQR$  di massa  $2m$  uniformemente distribuita e di lati  $OP = a$  e  $PQ = 2a$  e dall'asta  $RS$  di lunghezza  $a$  e massa  $m$ , anch'essa uniformemente distribuita. Trova

- (1) il vettore posizione  $C - O$  del centro di massa;
- (2) il tensore centrale d'inerzia  $\mathbf{I}_C$ ;
- (3) una base principale d'inerzia per  $\mathbf{I}_C$ .



## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** L'area del Pacman è  $\frac{3}{4}\pi R^2$  e quindi la sua densità è  $\rho = \frac{4m}{3\pi R^2}$ .

Per simmetria,  $C - O = c_x e_x$  e la base  $(e_x, e_y, e_z)$  in figura è principale sia per  $\mathbf{I}_C$  che per  $\mathbf{I}_O$ . Inoltre, essendo il Pacman bidimensionale e contenuto nel piano  $z = 0$ ,  $I_{Ozz} = I_{Oxx} + I_{Oyy}$  e  $I_{Czz} = I_{Cxx} + I_{Cyy}$ . Facendo i conti in coordinate polari con  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ ,  $z = z$  (e jacobiano  $r$ ):

$$c_x = \frac{1}{m} \rho \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} x \, dr d\vartheta = \frac{4}{3\pi R^2} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} r^2 \cos \vartheta \, dr d\vartheta = \frac{4R}{9\pi} \left[ \sin \frac{7\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right] = -\frac{4\sqrt{2}}{9\pi} R,$$

$$I_{Oxx} = \rho \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} y^2 \, dr d\vartheta = \frac{4m}{3\pi R^2} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} r^3 \sin^2 \vartheta \, dr d\vartheta = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{6\pi} \right) mR^2,$$

$$I_{Oyy} = \rho \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} x^2 \, dr d\vartheta = \frac{4m}{3\pi R^2} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} r^3 \cos^2 \vartheta \, dr d\vartheta = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6\pi} \right) mR^2.$$

Perciò

$$C - O = -\frac{4\sqrt{2}}{9\pi} R e_x,$$

$$\mathbf{I}_O = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{6\pi} \right) mR^2 e_x \otimes e_x + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6\pi} \right) mR^2 e_y \otimes e_y + \frac{1}{2} mR^2 e_z \otimes e_z$$

e, per il Teorema di Hygens-Steiner,

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_O - \frac{32}{81\pi^2} mR^2 (\mathbf{I} - e_x \otimes e_x) = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{6\pi} \right) mR^2 e_x \otimes e_x + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6\pi} - \frac{32}{81\pi^2} \right) mR^2 e_y \otimes e_y + \left( \frac{1}{2} - \frac{32}{81\pi^2} \right) mR^2 e_z \otimes e_z$$

**Esercizio 2.** Ricordiamo che il centro di massa di un disco omogeneo è nel centro del disco stesso e che il suo tensore centrale d'inerzia è

$$\mathbf{I}_C = \frac{1}{4} mR^2 (\mathbf{I} + e_z \otimes e_z) = \frac{\pi}{4} \rho R^4 (\mathbf{I} + e_z \otimes e_z).$$

Chiamando  $C_f$ ,  $C_l$  e  $C_r$  i centri di massa della faccia e dell'orecchio sinistro e destro, rispettivamente, abbiamo per ciascuna componente

$$C_f - O = \mathbf{0}, \quad C_l - O = \frac{5\sqrt{2}}{4} R (-e_x + e_y), \quad C_r - O = \frac{5\sqrt{2}}{4} R (e_x + e_y), \quad C_r - C_l = \frac{5\sqrt{2}}{2} R e_x,$$

$$m_f = \frac{9\pi}{4} \rho R^2, \quad m_l = m_r = \pi \rho R^2,$$

$$\mathbf{I}_{C_f} = \frac{81\pi}{32} \rho R^4 (\mathbf{I} + e_z \otimes e_z), \quad \mathbf{I}_{C_l} = \mathbf{I}_{C_r} = \frac{\pi}{4} \rho R^4 (\mathbf{I} + e_z \otimes e_z).$$

Scomponiamo la sagoma nel sistema delle due orecchie (con centro di massa  $C_{rl}$ ) più la faccia e applichiamo due volte il Teorema di Composizione:

$$C_{rl} - O = \frac{5\sqrt{2}}{4} R e_y, \quad m_{rl} = 2\pi \rho R^2,$$

$$\mathbf{I}_{C_{rl}} = \mathbf{I}_{C_r} + \mathbf{I}_{C_l} + \frac{25\pi}{4} \rho R^4 (\mathbf{I} - e_x \otimes e_x) = \frac{\pi}{2} \rho R^4 e_x \otimes e_x + \frac{27\pi}{4} \rho R^4 e_y \otimes e_y + \frac{29\pi}{4} \rho R^4 e_z \otimes e_z,$$

$$C - O = \frac{2\pi \rho R^2 \frac{5\sqrt{2}}{4} R e_y}{2\pi \rho R^2 + \frac{9\pi}{4} \rho R^2} = \frac{10\sqrt{2}}{17} R e_y,$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{C_{rl}} + \mathbf{I}_{C_f} + \frac{25}{4} \frac{9}{17} \pi \rho R^4 (\mathbf{I} - e_y \otimes e_y) = \frac{3449}{544} \pi \rho R^4 e_x \otimes e_x + \frac{297}{32} \pi \rho R^4 e_y \otimes e_y + \frac{8498}{544} \pi \rho R^4 e_z \otimes e_z.$$

Usando ora il Teorema di Huygens-Steiner con  $m = 3\pi \rho R^2$ :

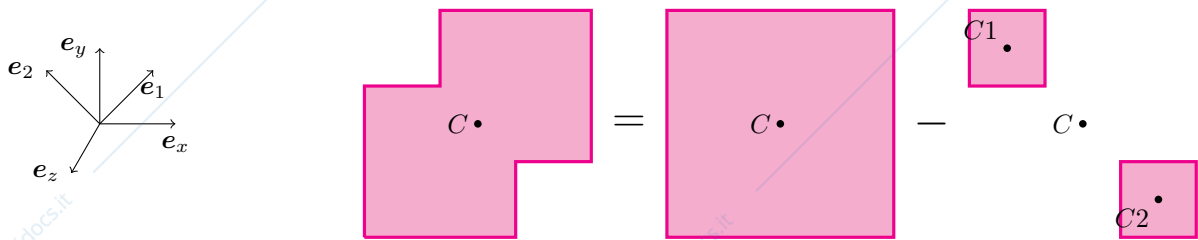
$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_C + \frac{600}{289} \pi \rho R^4 (\mathbf{I} - e_y \otimes e_y) = \frac{77833}{9248} \pi \rho R^4 e_x \otimes e_x + \frac{297}{32} \pi \rho R^4 e_y \otimes e_y + \frac{163666}{9248} \pi \rho R^4 e_z \otimes e_z$$

**Esercizio 3.** Per simmetria,  $C-O = \frac{3}{2}L(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$  e la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z)$  con  $\mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$  ed  $\mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$  è principale sia per  $\mathbf{I}_C$  che per  $\mathbf{I}_O$ .

Ricordiamo che il centro di massa di una lamina quadrata omogenea di lato  $a$  e disposta sul piano  $z = 0$  è nel centro del quadrato stesso e che il suo tensore centrale d'inerzia è

$$\mathbf{I}_C = \frac{1}{12}ma^2(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) = \frac{1}{12}\rho a^4(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z).$$

Possiamo quindi scomporre la figura data come



e applicare prima il Teorema di Composizione per trovare il tensore centrale d'inerzia del sistema formato dai due quadrati di lato  $L$  (che ha centro di massa in  $C$ ) e poi il Teorema di Composizione (nella versione di Teorema della Lacuna) per trovare  $\mathbf{I}_C$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_C &= \frac{81}{12}\rho L^4(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) - \left[ \frac{2}{12}\rho L^4(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + 4\rho L^4(\mathbf{I} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \right] = \\ &= \frac{31}{12}\rho L^4\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{79}{12}\rho L^4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{55}{6}\rho L^4\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

e, per il Teorema di Huygens-Steiner,

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_C + \frac{63}{2}\rho L^4(\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = \frac{31}{12}\rho L^4\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{457}{12}\rho L^4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{244}{6}\rho L^4\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.$$

**Esercizio 4.** Consideriamo i due sistemi di lamina e asta separatamente e poi applichiamo il Teorema di Composizione.

Il lato  $OR$  è inclinato di  $\frac{\pi}{6}$  rispetto al segmento  $OS$ , perciò la base principale per  $\mathbf{I}_{\text{lamina}}$  è  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z)$  con

$\mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y$  ed  $\mathbf{e}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y$ . Pertanto

$$\begin{aligned}C_{\text{lamina}} - O &= a\mathbf{e}_1 + \frac{a}{2}\mathbf{e}_2 = \frac{2\sqrt{3}-1}{4}a\mathbf{e}_x + \frac{2+\sqrt{3}}{4}a\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{I}_{\text{lamina}} &= \frac{1}{12}2ma^2(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) = \\ &= \frac{1}{24}ma^2(7\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - 3\sqrt{3}\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y - 3\sqrt{3}\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + 13\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + 20\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z).\end{aligned}$$

Per l'asta, invece,

$$\begin{aligned}C_{\text{asta}} - O &= \sqrt{3}a\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}a\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{I}_{\text{Casta}} &= \frac{1}{12}ma^2(\mathbf{I} - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y).\end{aligned}$$

Componendo:

$$C - O = \frac{2m(C_{\text{lamina}} - O) + m(C_{\text{asta}} - O)}{3m} = \frac{4\sqrt{3}-1}{6}ae_x + \frac{3+\sqrt{3}}{6}ae_y,$$

$$C_{\text{asta}} - C_{\text{lamina}} = \frac{2\sqrt{3}+1}{4}ae_x - \frac{\sqrt{3}}{4}ae_y, \quad |C_{\text{asta}} - C_{\text{lamina}}|^2 = \frac{4+\sqrt{3}}{4}a^2, \quad e = \frac{C_{\text{asta}} - C_{\text{lamina}}}{|C_{\text{asta}} - C_{\text{lamina}}|},$$

$$\begin{aligned} e \otimes e &= \frac{1}{|C_{\text{asta}} - C_{\text{lamina}}|^2} (C_{\text{asta}} - C_{\text{lamina}}) \otimes (C_{\text{asta}} - C_{\text{lamina}}) = \\ &= \frac{4}{4+\sqrt{3}} \left( \frac{13+4\sqrt{3}}{16} e_x \otimes e_x - \frac{6+\sqrt{3}}{16} e_x \otimes e_y - \frac{6+\sqrt{3}}{16} e_y \otimes e_x + \frac{3}{16} e_y \otimes e_y \right) = \\ &= \frac{1}{52} \left[ (40+3\sqrt{3})e_x \otimes e_x - (21-2\sqrt{3})e_x \otimes e_y - (21-2\sqrt{3})e_y \otimes e_x + (12-3\sqrt{3})e_y \otimes e_y \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_C &= C_{\text{lamina}} + C_{\text{asta}} + \frac{4+\sqrt{3}}{6}ma^2(\mathbf{I} - e \otimes e) = \\ &= \frac{1}{12}ma^2 \left[ 6e_x \otimes e_x + (3-\sqrt{3})e_x \otimes e_y + (3-\sqrt{3})e_y \otimes e_x + (13+2\sqrt{3})e_y \otimes e_y + (19+2\sqrt{3})e_z \otimes e_z \right]. \end{aligned}$$

Una base principale per  $\mathbf{I}_C$  è quindi  $(\cos \vartheta e_x + \sin \vartheta e_y, \sin \vartheta e_x - \cos \vartheta e_y, e_z)$  con

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{Cxy}}{I_{Cxx} - I_{Cyy}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2(\sqrt{3}-3)}{13-2\sqrt{3}} \sim -7,5^\circ.$$