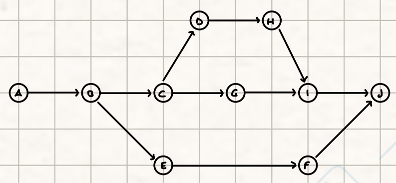
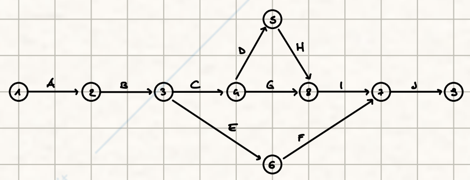
Rappresentazione AON (= Activity on nodes)



Rappresentazione AOA (= Activity on arcs)



per ogni attività posso definire :

- il primo momento in cui posso iniziare l'attività

$$E_i = \begin{cases} \max (E_h + d_h) & \text{con } h = P_i \text{ (attività che precedono)} \\ 0 & \text{se } i = A \end{cases}$$

- l'ultimo momento in cui posso iniziare l'attività

$$L_i = \begin{cases} \min (L_h - d_i) & \text{con } h \in S_i \text{ (attività che seguono)} \\ E_i & \text{se } i = J \end{cases}$$

calcolo di E_i e L_i :

$E_A = 0$, $E_B = 0+3$, $E_C = 3+5 = 8$, $E_D = 8+4 = 12$, $E_E = 3+5 = 8$, $E_F = 8+3 = 11$,
$E_G = 8+4 = 12$, $E_H = 12+3 = 15$, $E_I = \max(15+3, 12+3) = 18$, $E_J = \max(18+2; 11+7) = 20$

$L_J = 20$, $L_I = 20-2 = 18$, $L_H = 18-3 = 15$, $L_G = 18-3 = 15$, $L_F = 20-7 = 13$, $L_E = 13-3 = 10$, $L_D = 15-3 = 12$,
$L_C = \min(12-4, 15-4) = 8$, $L_B = \min(10-5, 8-5) = 3$, $L_A = 3-3 = 0$

calcolo di $F_i = L_i - E_i$:

$F_A = F_B = F_C = F_D = F_H = F_I = F_J = 0$

$F_E = F_F = 2$ $\quad$ $F_G = 3$

↓

le attività con $F = 0$ sono attività critiche : un cammino composto solo da attività critiche è un cammino critico

NB : il diagramma di Gantt è un orario sinottico delle attività ; la differenza tra quello "al più presto" e "al più tardi" sta nelle attività non critiche che possono spostarsi di F_i

analisi PERT (= Project Evaluation Review Techniques)

distribuzione della durata di un'attività segue una distribuzione $Beta(\alpha, \beta)$, più generalmente $B(\alpha, \beta, \overset{min}{a}, \overset{max}{b})$

media $\mu_i = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}$ m_i = moda

varianza $\sigma_i^2 = \left(\frac{b_i - a_i}{6} \right)^2$

la durata del cammino critico è la somma delle durate delle attività appartenenti al cammino:

$$D_c = \sum_{i \in C} d_i$$

$$\mu(D_c) = \mu\left(\sum_{i \in C} d_i\right) = \sum_{i \in C} \mu(d_i)$$

$$\sigma^2(D_c) = \sum \sigma_i^2$$ perché var. indip.

quando il n° di attività nel cammino critico è grande (empiricamente > 10) una buona stima della distribuzione è: $D \sim N(\mu_c, \sigma_c^2)$ → normale

→ nel nostro esempio: $\mu(D_c) = \sum \mu(d_i) = \overset{A}{3} + \overset{B}{5} + \overset{C}{4} + \overset{D}{3} + \overset{H}{4} + \overset{I}{2} + \overset{J}{3} = 24$

$$\sigma^2(D_c) = \sum \sigma^2(d_i) = \frac{4 + 4 + 16 + 4 + 64 + 4 + 4}{36} = \frac{100}{36}$$

→ $D_c \sim N(24, 100/36)$

Probabilità che il progetto duri meno di 25? → normalizzazione e utilizzo le tabelle

$$P(D_c \leq 25) = P\left(\frac{D_c - 24}{\sqrt{\frac{100}{36}}} \leq \frac{25 - 24}{\sqrt{\frac{100}{36}}} \right) = P(X \leq 0{,}6) = 0{,}72575$$

modelli matematici per i progetti

1. risorse illimitate: dato un grafo di dipendenze, voglio minimizzare il tempo di completamento rispettando le precedenze

definisco insieme di variabili T_i: istante in cui inizia l'attività i

$$\begin{aligned} \min\ & D \\ \text{st}\ & T_n + d_n \leq D \\ & T_i + d_i \leq T_j \quad \text{con } i \text{ prec. di } j \\ & D \geq 0,\ T_i \geq 0 \end{aligned}$$

2. bilanciamento tempi e costi d_i = durata standard dell'attività i

c_i = costo standard dell'attività i

g_i = durata crash (= il minimo dell'attività i)

q_i = costo crash dell'attività i

B = deadline progetto

$$w_i = \left| \frac{c_i - q_i}{d_i - g_i} \right|$$

$$\min \sum w_i y_i$$

st. $T_n + (d_n - y_n) \leq B$

$T_i + (d_i - y_i) \leq T_j$ i prec. j

$y_i \leq d_i - g_i$

3. risorse limitate

B = insieme dei periodi nel quale si svolge il progetto

D = durata progetto

T_i = istante di inizio attività i

$$x_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ comincia nel periodo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\rightarrow \sum_{t=1}^{B} x_{it} = 1 \quad , \quad T_i = \sum_{t=1}^{B} t\, x_{it}$$

$$\min D$$

st $T_n + d_n \leq D$

$T_i + d_i \leq T_j$ i prec j

$\sum_{t=1}^{B} x_{it} = 1$

$T_i = \sum_{i=1}^{B} t\, x_{it}$

$\sum_{i \in V} \sum_{\tau = t - d_i + 1} w_{ik(t-\tau+1)}\, x_{it} \leq W_{kt}$ $k \in R$, $t \in B$

$D \geq 0$, $T_i \geq 0$, $x_{it} \in \{0; 1\}$