es: $\max \; 24F + 18R$

sa $F + R \leq 40$ macinazione $\rightarrow \lambda_M$ (= prezzo che pagherebbe un'azienda esterna per 1 ora di macinazione)

$4F + 2R \leq 132$ produzione $\rightarrow \lambda_P$

$2F + 4R \leq 160$ confezione $\rightarrow \lambda_C$

creo un problema duale coincidente, ma diverso

$F, R \geq 0$

duale: $\min \; 40\lambda_m + 132\lambda_p + 160\lambda_c$

sa $\lambda_m + 4\lambda_p + 2\lambda_c \geq 24$ farfalle

$\lambda_m + 2\lambda_p + 4\lambda_c \geq 18$ rigatoni

$\lambda_m, \lambda_p, \lambda_c \geq 0$

soluzione: $(12, 3, 0) \rightarrow \bar{d} = \bar{z} = 876 \rightarrow$ sempre così

se in un problema si ha un vincolo con variabile di slack $\neq 0$ la sua corrispondente nel problema duale è $= 0$

solo i vincoli attivi generano $\lambda_i \neq 0$

es: $\min \; 22R + 26M$

sa $100R + 10M \geq 200$ fibre

$20R + 10M \geq 120$ vitamine

$20R + 50M \geq 360$ grassi

$20R + 100M \geq 400$ proteine

$R, M \geq 0$

$\rightarrow$ soluzione: $M = 6$, $R = 3$ $\quad \bar{z} = 222$

↳ dall'intersezione del vincolo vitamine e grassi

duale: $\max \; 200\lambda_F + 120\lambda_V + 360\lambda_G + 400\lambda_P$

$\lambda_F = \lambda_P = 0$, $\lambda_V \neq 0$ $\lambda_G \neq 0$, $\bar{z} = \bar{d} = 222$

sa $100\lambda_F + 20\lambda_V + 20\lambda_G + 20\lambda_P \leq 22$

$10\lambda_F + 10\lambda_V + 50\lambda_G + 100\lambda_P \leq 26$

$\lambda_F, \lambda_V, \lambda_G, \lambda_P \geq 0$

$\rightarrow$ soluzione: $(0, 0.725, 0.375, 0)$ $\quad \bar{d} = 222$

$\min \; c^T x$ $\rightarrow$ $\max \; b^T \lambda$

sa $Ax \geq b$ $\quad$ sa $A^T \lambda \leq c$

$x \geq 0$ $\quad$ $\lambda \geq 0$

es: $\min \; 13x_{11} + 17x_{12} + 15x_{13} + 12x_{21} + 23x_{22} + 11x_{23}$

sa $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 32$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 84$

$x_{11} + x_{21} \geq 36$

$x_{12} + x_{22} \geq 24$

$x_{13} + x_{23} \geq 52$

duale: $\max\ 36\mu_1 + 24\mu_2 + 52\mu_3 - (32\lambda_1 + 84\lambda_2)$

s.a.
$\mu_1 - \lambda_1 \le 13$
$\mu_2 - \lambda_1 \le 17$
$\mu_3 - \lambda_1 \le 15$
$\mu_1 - \lambda_2 \le 12$
$\mu_2 - \lambda_2 \le 23$
$\mu_3 - \lambda_2 \le 11$

con λ prezzo a cui compro la merce appena prodotta
μ prezzo a cui vendo la merce dopo averla trasportata

Teorema il duale del duale è il primale

dim: P: $\max\ c^T x$ s.a. $Ax \le b$, $x \ge 0$ $\longrightarrow$ D_1: $\min\ b^T\lambda$ s.a. $A^T\lambda \ge c$, $\lambda \ge 0$ $\longrightarrow$ D_2: $\max\ c^T x$ s.a. $Ax \le b$, $x \ge 0$

Teorema della dualità debole

sia $\max\ c^T x$ s.a. $Ax \le b$, $x \ge 0$ D: $\min\ b^T\lambda$ s.a. $A^T\lambda \ge c$, $\lambda \ge 0$

allora: $c^T x \le b^T\lambda$

Corollario 1 se $c^T x = b^T\lambda$ $\longrightarrow$ x e λ sono soluzioni ottimali per i rispettivi problemi

Corollario 2 se il primale è superiormente illimitato, il duale è inammissibile
se il duale è inferiormente illimitato, il primale è inammissibile

NB $\max\ c^T x$ s.a. $Ax = b$, $x \ge 0$ $\longrightarrow$ $\min\ b^T\lambda$ s.a. $A^T\lambda \ge c$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\max\ c^T x$ s.a. $Ax \le b$, $x \ge 0$ $\longrightarrow$ $\min\ b^T\lambda$ s.a. $A^T\lambda \ge c$, $\lambda \ge 0$ $\longrightarrow$ $\lambda^T = c_B^T \cdot B^{-1}$

se x^* è ottimo ho $r < 0$: $r = c^T - c_B^T B^{-1} A \le 0$
$c^T - \lambda^T A \le 0$
$\lambda^T A \ge c^T$
$\lambda A^T \ge c$

$c^T x = c_B^T \cdot x_B = c_B^T B^{-1} b = \lambda^T b = b^T \lambda$

Teorema degli scarti complementari

date x e λ soluzioni ammissibili per i rispettivi problemi primale e duale, se:

$\lambda_i (a_i^T x - b_i) = 0 \quad \forall i$ → vedi esercitazione

$x_j (c_j - A_j^T \lambda) = 0 \quad \forall j$

allora x e λ sono soluzioni ottime

Primale

Duale	Ottimo	Illimitato	Inammissibile
Ottimo	✓		
Illimitato			✓
Inammissibile		✓	✓

Primale		Duale	
obiettivo	max	obiettivo	min
vincolo i	≤	variabile i	≥ 0
vincolo i	=	variabile i	libera
vincolo i	≥	variabile i	≤ 0
variabile j	≥ 0	vincolo j	≥
variabile j	libera	vincolo j	=
variabile j	≤ 0	vincolo j	≤

$$\max\ p^T x \quad \text{st}\quad Ax \le q,\quad x \ge 0 \qquad \rightarrow \qquad \min\ q^T \lambda \quad \text{st}\quad A^T\lambda \ge p,\quad \lambda \ge 0$$