P: $\max\ 24F + 18R$ $\longrightarrow$ D: $\min\ 40\lambda_M + 132\lambda_P + 140\lambda_C$

$F + R \leq 40$ — $\lambda_m + 4\lambda_p + 2\lambda_c \geq 24$

$4F + 2R \leq 132$ — $\lambda_m + 2\lambda_p + 4\lambda_c \geq 18$

$2F + 4R \leq 140$ — $\lambda_m, \lambda_p, \lambda_c \geq 0$

$F, R \geq 0$

teorema degli scarti complementari:

- $\lambda_m (F + R - 40) = 0$
  $\lambda_p (4F + 2R - 132) = 0$
  $\lambda_c (2F + 4R - 140) = 0$

- $F(24 - \lambda_m - 4\lambda_p - 2\lambda_c) = 0$
  $R(18 - \lambda_m - 2\lambda_p - 4\lambda_c) = 0$

avendo $(F,R) = (26,14)$ ottengo $(\lambda_m, \lambda_p, \lambda_c) = (12, 3, 0)$

analisi di sensitività = di quanto può cambiare un parametro nel problema senza che il punto ottimo non cambi

es: P: $\max\ c_F F + c_R R$ $\longrightarrow$ $(26, 14)$ ottimo per: $18 \leq c_F \leq 36$, $12 \leq c_R \leq 24$

$F + R \leq 40$

$4F + 2R \leq 132$

$2F + 4R \leq 140$

$F, R \geq 0$

regola: impongo un $+\Delta$ su un parametro e vado a calcolare Δ max (+ e −) per cui ho $r \leq 0$

es: P: $\max\ (24 + \Delta)F + 18R$

$F + R \leq 40$

$4F + 2R \leq 132$

$2F + 4R \leq 140$

$F, R \geq 0$

$r = c^T - c_B^T B^{-1} \cdot A$

ordine con cui si presentano nel Tableau in basso a dx

$r_\Delta = (24 + \Delta, 18, 0, 0, 0) - (\overset{R}{18}, \overset{F}{24 + \Delta}, \overset{s_c}{0})\, B^{-1} A$

$= (24, 18, 0, 0, 0) - (18, 24, 0)\, B^{-1} \cdot A + \Delta((1, 0, 0, 0, 0) - (0, 1, 0)\, B^{-1} A)$

blocco in basso a sx nel tableau, prendo solo la riga 2 (moltiplico per (0,1,0)), in questo caso ottengo la riga di F (var. che analizzo)

$= r + \Delta((1, 0, 0, 0, 0) - (0, 1, 0)\, B^{-1} A)$

$= r + \Delta((1, 0, 0, 0, 0) - (1, 0, -1, 1/2, 0))$

$= (0, 0, -12, -3, 0) + \Delta(0, 0, 1, -1/2, 0)$

$= (0, 0, -12+\Delta, -3-\frac{\Delta}{2}, 0) \leq 0 \longrightarrow \begin{cases} -12+\Delta \leq 0 \\ -3+\frac{\Delta}{2} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \leq 12 \\ \Delta \geq -6 \end{cases} \quad -6 \leq \Delta \leq 12 \longrightarrow 18 \leq c_F \leq 36$

ovviamente se ho più vincoli prendo i più stringenti

es: $P: \max\ 24F + 18R + \Delta s_m$

$F + R \leq 40$

$4F + 2R \leq 132$

$2F + 4R \leq 140$

$F, R \geq 0$

$r = c^T - c_B^T B^{-1} \cdot A$

$r_\Delta = (24, 18, \Delta, 0, 0) - \overset{R}{(18}, \overset{F}{24}, \overset{s_c}{0)}\ B^{-1} A$

$= r + \Delta(0,0,1,0,0)$ ⟶ se cambio le var. fuori base è più facile

$= (0, 0, -12, -3, 0) + \Delta(0,0,1,0,0)$

$= (0, 0, -12+\Delta, -3, 0) \leq 0 \longrightarrow \Delta \leq 12$

oppure: se voglio sapere Δ su F: $\max\ (24+\Delta)F + 18R$:

F	R	s_m	s_p	s_c		
0	0	-12	-3	0	-876	
0	1	2	-1/2	0	14	R
1	0	-1	1/2	0	26	F
0	0	-6	1	1	32	s_c

$\frac{-3}{1/2} \leq 24 + \Delta_F \leq \frac{-12}{-1/2}$ ⟶ prendo i più stringenti

$-6 \leq 24 + \Delta_F \leq 12$

NB: se cambio, invece, il coefficiente di un vincolo ottengo uno spostamento verticale del vincolo con una variazione della geometria della regione ammissibile, ma non delle condizioni di ottimalità

es: $P: \max\ 24F + 18R$

$F + R \leq 40 + \Delta$

$4F + 2R \leq 132$

$2F + 4R \leq 140$

$F, R \geq 0$

F	R	s_m	s_p	s_c		
0	0	-12	-3	0	-876	
0	1	2	-1/2	0	14	R
1	0	-1	1/2	0	26	F
0	0	-6	1	1	32	s_c

$x_B = B^{-1} \cdot b$

$x_{B\Delta} = B^{-1}(b + \Delta d)$

$= B^{-1} \cdot b + B^{-1} \Delta d$

$= \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 26 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

variazione per cui la base non cambia, ovvero l'ottimo (che è cambiato) è definito dagli stessi due vincoli (quelli attivi non cambiano)

$$= \begin{pmatrix} 14 + 2\Delta \\ 26 - \Delta \\ 32 - 6\Delta \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \begin{matrix} \Delta \geq -7 \\ \Delta \leq 26 \\ \Delta \leq 32/6 \end{matrix} \longrightarrow -7 \leq \Delta \leq \frac{16}{3} \longrightarrow 33 \leq b_m \leq \frac{136}{3}$$

negli estremi posso aver cambiato vincoli attivi o è diventata una soluzione degenere

oppure: se voglio sapere Δ sul coefficiente di un vincolo (in questo caso vincolo con s_m):

F	R	s_m	s_p	s_c		
0	0	-12	-3	0	-876	
0	1	2	-1/2	0	14	R
1	0	-1	1/2	0	26	F
0	0	-6	1	1	32	s_c

neg: $-14/2$ pos: $26/1$

$32/6$ ←

$$-7 \leq \Delta_m \leq \frac{32}{6}$$

$$-32 \leq \Delta_p \leq 28$$

es: quanto cambia l'ottimo se $b_p = 132 \to 140$ ($\Delta = +8$ accettabile)

$z' = z + \Delta \lambda_p$ → valore nel duale (solo nell'intervallo definito prima)

↳ e fuori? cambiano i vincoli e quindi anche λ

$= 876 + 8 \cdot 3$

Teorema dato P: $\max c^T x$ s.a. $Ax = b$, $x \geq 0$ $\qquad \Omega = \{ b \in \mathbb{R}^m : P \text{ ha soluzione ottima} \}$

- se Ω è convesso allora: $b_1, b_2 \in \Omega$
  $\alpha b_1 + (1-\alpha) b_2 \in \Omega$
- $\bar{z}(b)$ valore ottimo del problema P è una funzione concava e lineare a tratti
- $\dfrac{\partial z(b)}{\partial b} = \lambda$