

## Esercizi Metodi Matematici: Algebra Lineare

## 1. ESERCIZI MATRICI E SISTEMI

**1.1.** Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se i seguenti prodotti (riga per colonna) possono essere effettuati e, in caso affermativo, calcolarli.

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad B \cdot C, \quad C \cdot B, \quad C \cdot D, \quad D \cdot C.$$

**1.2.**

a) Date le matrici  $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , mostrare che

$$(A_0 + B_0)^2 \neq A_0^2 + 2A_0B_0 + B_0^2.$$

b) Come possiamo correggere la formula  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  per far sì che valga per tutte le matrici  $A$  e  $B$  (quadrato  $2 \times 2$ )?

**1.3.**

- Si dia un esempio di un sistema lineare *determinato* con tre equazioni e due incognite.
- Si dia un esempio di un sistema lineare *indeterminato* con tre equazioni e due incognite.
- Si dia un esempio di un sistema lineare *impossibile* con tre equazioni e due incognite.

**1.4.** Date le due matrici  $M, N$  e i vettori  $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

risolvere il sistema lineare  $M\mathbf{x} = N\mathbf{a}$ , dove  $x, y, z$  sono le incognite.

**1.5.** Al variare del parametro  $a$ , si stabilisca se il seguente sistema lineare è determinato, indeterminato o impossibile:

$$\begin{cases} x - y & = 1 \\ -x + y + 2z & = 1 \\ 2x - 2y - az & = 0. \end{cases}$$

**1.6.** Al variare del parametro  $h$  stabilire se il sistema lineare è determinato, indeterminato o impossibile:

$$\begin{cases} -x & -y & & = & 1 \\ & -y & +z & = & -1 \\ x & -y & -z & = & 1 \\ & -2y & +2z & = & h \end{cases}$$

Posto  $h = -2$ , risolvere il sistema.

**1.7.** Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & & +x_4 & -x_5 & = & 2 \\ & x_2 & -x_3 & & +x_5 & = & 2 \\ & & & x_4 & -x_5 & = & 1 \end{cases}$$

**1.8.** Siano dati la matrice e i vettori:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro  $h$  stabilire se il sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  è determinato, indeterminato o impossibile.

**1.9.** Data la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , determinare tutte le matrici  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  tali che  $MX = XM$ .

**1.10.** Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x & +3y & +kz & = & 1 \\ -x & -2y & & = & 1 \\ x & +(3+k)y & +(1+k)z & = & k \end{cases}$$

con  $k$  parametro reale.

Si discuta la risolubilità del sistema al variare del parametro reale  $k$ .

**1.11.** Determinare, se possibile, la matrice inversa delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**1.12.** Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + (k+1)y = -1 \\ -x - 2y = 1 \\ kx + 2y = -1 \end{cases}$$

con  $k$  parametro reale.

- Si discuta la risolubilità del sistema al variare del parametro reale  $k$ .
- Si risolva il sistema nel caso  $k = 1$ .

**1.13.** Sia

$$(*) \quad M\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera (V) o falsa (F), giustificando brevemente la risposta.

- Se  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  allora il sistema  $(*)$  ha soluzione.
- Se  $M$  ha rango  $m$  allora il sistema  $(*)$  ha soluzione.
- se  $M$  ha due righe uguali, allora  $\text{rango}(M) = m - 1$ .
- Se  $n \geq m$  allora il sistema  $(*)$  ha soluzione.

## 2. SPAZI VETTORIALI, SOTTOSPAZI, BASI E DIMENSIONE

**2.1.** Si consideri lo spazio vettoriale  $M(2, 2)$  delle matrici  $2 \times 2$  con coefficienti reali. Sia  $V \subset M(2, 2)$  il sottoinsieme così definito:

$$V = \{X \in M(2, 2) : AX = 0\}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

- Determinare la forma delle matrici in  $V$ .
- Mostrare che  $V$  è un sottospazio di  $M(2, 2)$ .

**2.2.** Nello spazio vettoriale  $V = \mathbb{R}^3$  si considerino i vettori

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k+1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con  $k$  parametro reale.

Al variare del parametro  $k$ , si stabilisca se  $\underline{v}$  appartiene o meno al sottospazio  $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ .

**2.3.** Sia  $V = \mathbb{R}[x]_3$  lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 3 a coefficienti reali nell'indeterminata  $x$ , e si consideri i seguenti sottoinsiemi di  $V$ :

$$\begin{aligned} S &= \{p \in V : p(1) = 1\}, \\ T &= \{p \in V : p(1) = 0\}, \\ U &= \{p \in V : p(1) = p(-1)\}, \end{aligned}$$

- Stabilire se  $S$  sia o meno un sottospazio. Nel caso di risposta affermativo trovare un numero finito di polinomi che generino  $S$ .
- Stabilire se  $T$  sia o meno un sottospazio. Nel caso di risposta affermativo trovare un numero finito di polinomi che generino  $T$ .

- c) Stabilire se  $U$  sia o meno un sottospazio. Nel caso di risposta affermativo trovare un numero finito di polinomi che generino  $U$ .

**2.4.** Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Si dimostri che  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$  sono linearmente indipendenti.  
b) Si scriva il vettore  $\mathbf{u}$  come combinazione lineare di  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ .

**2.5.** Sia  $\mathbb{R}[x]_d$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una indeterminata di grado  $\leq d$ . Siano

$$p = x + 1, \quad q = x^2 - x + 1, \quad r = x^2 + 1.$$

- a) Trovare  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tale che  $ap + bq + cr = x^2$ .  
b) Mostrare che  $p, q, r$  sono linearmente indipendenti (cioè sono una base di  $\mathbb{R}[x]_2$ ).

**2.6.** Si considerino i sottoinsiemi dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  così definiti:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - y = 2 \right\}, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + z = y \right\}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : xz = 0 \right\}.$$

Si stabilisca se  $R$ ,  $S$  e  $T$  sono, o meno, sottospazi di  $\mathbb{R}^3$ , determinando, in caso di risposta affermativa, la dimensione e una base del sottospazio.

**2.7.** Si considerino i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

con  $\alpha$  parametro reale.

- a) Per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  i vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}_\alpha$ , e  $\mathbf{c}_\alpha$  generano  $\mathbb{R}^3$ ?  
b) Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  determinare la dimensione del sottospazio  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{c}_\alpha \rangle$  di  $\mathbb{R}^3$ .

**2.8.** Sia  $X = M(2, 2)$  lo spazio vettoriale delle matrici reali  $2 \times 2$ , e si consideri il seguente sottoinsieme  $Y$  di  $X$ :

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + b = c - d \right\}.$$

- i) Si provi che  $Y$  è un sottospazio di  $X$ .  
ii) Si determini la dimensione e una base di  $Y$ .

**2.9.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$ , si consideri il seguente sottoinsieme

$$S_k = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a + b = 0, \quad c - d = k - 1 \right\},$$

con  $k$  parametro reale.

- Si determini il valore del parametro  $k$  tale che  $S_k$  risulti un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$ .
- Per il valore di  $k$  trovato al punto i) si determini una base di  $S_k$ .

**2.10.** Sia  $V = \mathbb{R}[x]_2$  lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a due a coefficienti reali nell'indeterminata  $x$ . Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera (V) o falsa (F), giustificando brevemente la risposta.

- $V = \langle 2 + x, 1 + x^2 \rangle$ .
- $V = \langle 5 - x + 3x^2, 1 + x^2, 2 - x \rangle$ .
- $\langle 5 - x + 3x^2, 1 + x^2 \rangle = \langle 1 - x - x^2, 2 - x \rangle$ .

### 3. APPLICAZIONI LINEARI

**3.1.** Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera (V) o falsa (F), giustificando brevemente la risposta.

- L'applicazione

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ 1 \end{pmatrix}$$

è lineare.

- L'applicazione

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} xy \\ x \end{pmatrix}$$

è lineare.

- Esiste un'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**3.2.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare definita da

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a + b - c \\ 3a + 3b - 3c \end{pmatrix}.$$

- Si determini la dimensione del nucleo di  $f$  e la dimensione dell'immagine di  $f$ .
- Si stabilisca per quale valore di  $k$  il vettore  $\begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix}$  è contenuto nell'immagine di  $f$ .

**3.3.** Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita da

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x + z \\ -y + z \end{pmatrix}.$$

- Si determina la dimensione ed una base del nucleo di  $F$ .
- Si stabilisca se il vettore  $(2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$  è contenuto nell'immagine di  $F_0$ .

**3.4.** Sia  $G : M(2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare definita da

$$G(A) = \mathbf{A}\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si determini una base di  $\ker(G)$ .
- Si determini la dimensione di  $\text{Im}(G)$ .
- Si determini  $\ker(G) \cap \langle X, Y \rangle$ .

**3.5.** Sia  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita da

$$H\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ x \\ x + y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Si determini la dimensione ed una base di  $\ker(H)$ .
- Si determini la dimensione di  $\text{Im}(H)$ .
- Si stabilisca per quali valori dei parametri reali  $r$  e  $s$  il vettore  $(1, r, 1, s) \in \mathbb{R}^4$  è contenuto in  $\text{Im}(H)$ .

**3.6.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare definita da  $f(a, b, c) = (a + b, c)$ .

- Stabilire se  $f$  è iniettiva.
- Determinare  $\dim \text{Im}(f)$ ,  $f$  è suriettiva?
- Determinare la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alle base standard di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$ .

**3.7.** Sia  $V = \mathbb{R}_d[t]$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una indeterminata di grado  $\leq d$  e si consideri i seguenti polinomi in  $\mathbb{R}_2[t]$ :

$$p_1 = t^2 + 1, \quad p_2 = t + 2, \quad p_3 = 2t^2 - t.$$

- Stabilire se  $p_1, p_2, p_3$  sono linearmente indipendenti.
- Determinare una base e la dimensione dello sottospazio  $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$  generato da questi polinomi.
- Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p) = p(1).$$

Stabilire se  $f$  è suriettiva e determinare la dimensione di  $\ker(f)$ .

3.8. Sia  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare tale che

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

b) Si determini la matrice di  $g$  rispetto alle base standard  $e$ , per ogni  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

$$g\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right).$$

3.9. Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$ , si consideri i seguenti vettori:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Stabilire se i vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  sono linearmente indipendenti.
- Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita da  $f(x, y, z) = x\mathbf{a}$ . Determinare la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alla base standard di  $\mathbb{R}^3$ .
- Determinare  $\ker(f)$  e  $\dim(\operatorname{im}f)$ .
- Esiste un'applicazione lineare  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g(\mathbf{a}) = 0$ ,  $g(\mathbf{b}) = 1$  e  $g(\mathbf{c}) = 2$ ?

#### 4. DETERMINANTI E AUTOVALORI

4.1. Siano  $A$  una matrice quadrata di ordine 3 con determinante  $\operatorname{Det}(A) = 4$ ,

$B$  una matrice  $3 \times 4$ ,

$C$  una matrice quadrata di ordine 4 e determinante  $\operatorname{Det}(C) = 5$ .

Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera (V) o falsa (F), giustificando brevemente la risposta.

- $\operatorname{Det}(-A) = -4$ .
- $\operatorname{Det}(-C) = -5$ .
- $A$  è invertibile.
- Se  $\operatorname{rango}(B) = 3$ , allora le prime tre colonne di  $B$  sono l.i..
- $\operatorname{Det}(C^2) = 25$ .

**4.2.** Determinare, per ogni  $k \in \mathbb{R}$ , il determinante delle matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Per quale  $k \in \mathbb{R}$  l'applicazione lineare  $A_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è suriettiva?

**4.3.** Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si determinino gli autovalori e gli autovettori di  $A$ .
- Si stabilisca se  $A$  è diagonalizzabile o meno.

**4.4.** Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si determinino gli autovalori di  $A$ .
- Si stabilisca se  $A$  è diagonalizzabile o meno.

**4.5.** Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 2 e i vettori

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera (V) o falsa (F), giustificando brevemente la risposta.

- Gli autovalori di  $A$  sono 0 e  $-3$ .
- $\mathbf{a}$  è un autovettore di  $A$ .
- $\mathbf{b}$  è un autovettore di  $A$ .
- $A$  è diagonalizzabile.

**4.6.** Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Determinare  $\text{Det}(A)$ .
- Calcolare, se possibile, la matrice  $A^{-1}$ .
- Determinare gli autovalori di  $A$  e stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.