APPLICAZIONI LINEARI tra spazi vettoriali

- È data $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x & +2y \\ 5x & -y \\ x^2 & \end{bmatrix}$. Verificare se f è lineare.

1) Linearità: deve verificarsi che $\underset{\in\mathbb{R}^2}{f(\underline{0})} = \underset{\in\mathbb{R}^3}{\underline{0}}$ $\quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & +0 \\ 0 & -0 \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \checkmark$

deve verificarsi che $f(\underline{v_1}+\underline{v_2}) = f(\underline{v_1}) + f(\underline{v_2})$ $\quad \underline{v_1}, \underline{v_2} \in \mathbb{R}^2 \quad \underline{v_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$f(\underline{v_1}+\underline{v_2}) = f\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(x_1+x_2)+2(y_1+y_2) \\ 5(x_1+x_2) - (y_1+y_2) \\ (x_1+x_2)^2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

questi due risultati sono diversi.

$$f(\underline{v_1})+f(\underline{v_2}) = \begin{bmatrix} 3x_1+2y_1 \\ 5x_1-y_1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_2+2y_2 \\ 5x_2-y_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(x_1+x_2)+2(y_1+y_2) \\ 5(x_1+x_2) - (y_1+y_2) \\ x_1^2+x_2^2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Segue che f non è lineare perché $f(\underline{v_1}+\underline{v_2}) \neq f(\underline{v_1}) + f(\underline{v_2})$

- Considero $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, al variare di $d \in \mathbb{R}$. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} dx - 3z \\ x+y+2-d \end{bmatrix}$. Determinare d per cui f è lineare. Per tale valore di d, determinare $\underbrace{\text{ker}(f) \text{ e } \text{Im}(f)}$.

vuol dire esplicitare la dimensione e una base.

1) Linearità: $\underset{\in\mathbb{R}^3}{f(\underline{0})} = \underset{\in\mathbb{R}^2}{\underline{0}}$ $\quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0+0+2-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to d=2$

Verifico che se $d=2$ f sia effettivamente lineare: $\quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-3z \\ x+y \end{bmatrix}$

2) proprietà di linearità: $f(\underline{v_1}+\underline{v_2}) = f(\underline{v_1}) + f(\underline{v_2}) \quad \forall\, \underline{v_1}, \underline{v_2} \in \mathbb{R}^3$

Prendo $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ e $\underline{v_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$. $\quad f(\underline{v_1}+\underline{v_2}) = f\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(x_1+x_2)-3(z_1+z_2) \\ (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \end{bmatrix}$

Voglio vedere se $f(\underline{v_1}) + f(\underline{v_2}) = \begin{bmatrix} 2x_1-3z_1 \\ x_1+y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2-3z_2 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_1+x_2)-3(z_1+z_2) \\ (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \end{bmatrix}$ è uguale a prima.

→ la funzione rispetta questa proprietà

Verifico se $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda\underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$

Prendo $\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\quad f(\lambda\underline{v}) = f\left(\begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\lambda x - 3\lambda z \\ \lambda x + \lambda y \end{bmatrix} \longrightarrow$ sono uguali

$$\lambda f(\underline{v}) = \lambda f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \lambda \begin{bmatrix} 2x-3z \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda x - 3\lambda z \\ \lambda x + \lambda y \end{bmatrix} \nearrow$$

$\Rightarrow$ f è lineare

$\text{ker}(f) = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } f(\underline{v}) = \underline{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (\dim(\text{ker}(f)) \leq 3)$

$\text{Im}(f) = \{\underline{w} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \exists\, \underline{v} \text{ con } f(\underline{v}) = \underline{w}\} \in \mathbb{R}^2 \quad (\dim \text{Im}(f) \leq 2)$

$\text{Ker}(f)$: $\quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x-3z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{2}{3}x \\ y = -x \end{cases}$

$\text{ker}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \\ \frac{2}{3}x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2/3 \end{bmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} \to \text{ker}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\rangle$

base di $\text{ker}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\}$ $\quad \dim(\text{ker}(f)) = 1$

Sfrutto il teo della nullità + rango. $\quad \underset{\uparrow}{3} = \dim(\text{ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$

dim dello spazio di partenza

→ $\dim\left(Im(f)\right) = 3-1 = 2$, inoltre $Im(f) \subset \underset{\dim = 2}{\underset{\uparrow}{\mathbb{R}^2}}$

→ $Im(f) = \mathbb{R}^2$ (f è suriettiva)
base di $Im(f)$: qual siasi base di $\mathbb{R}^2$, ad es: $\{ \underline{e_1}, \underline{e_2} \} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

- Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare con $f(\underline{e_1}) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $f(\underline{e_2}) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Descrivere l'immagine del generico vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Scrivere la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche. Descrivere $\ker(f)$ e $Im(f)$.

Conosco il comportamento di f solo su $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; tali vettori formano una base di $\mathbb{R}^2$ quindi, per linearità, posso ottenere f di un qual siasi vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Si può scrivere $f(\underline{e_2}) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Voglio scrivere l'immagine di $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ quindi scrivo $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ come combinazione di $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 2b \end{bmatrix}$$

→ $b = \frac{1}{2}$ $a = -\frac{1}{2}$.

$$f \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = f\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \overset{\text{per linearità}}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{1}{2} f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} f \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

dati

Sia $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ generico $\in \mathbb{R}^2$. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = f\left(x \overset{e_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + y \overset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right) \underset{\text{per linearità}}{\underset{\uparrow}{=}} x f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$= x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 1/2\, y \\ -x+y \\ 1/2\, y \end{bmatrix}$$

Matrice: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è rappresentata da una matrice $m \times n$ le cui colonne sono i coefficienti con cui scrivo le immagini della base di partenza rispetto alla base di arrivo.

In questo esercizio mi viene chiesto di usare le basi canoniche di partenza e di arrivo

Calcolo $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ e $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \underset{\underline{e_1}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} - 1 \underset{\underline{e_2}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + 0 \underset{\underline{e_3}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \underline{e_1} + 1 \underline{e_2} + \frac{1}{2} \underline{e_3} \qquad A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Quando la base è canonica posso mettere direttamente i vettori in colonna. Se la base non è canonica no!

Ker (f) e Im(f):
parto da Im(f)

$$Im(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} y \\ -x+y \\ \frac{1}{2} y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$$

generatori

In generale, le immagini di generatori generano immagini

=> $Im(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\rangle$ sono linearmente indipendenti (sono dipendenti se sono multipli)

$\dim\left(Im(f)\right) = 2$
$B_{Im(f)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$ Ricordo: $\dim\left(Im(f)\right) = r(A)$

Dalla formula della nullità + rango, ho che $\dim(\ker(f)) = \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\uparrow}{2}} - \underset{Im(f)}{\underset{\uparrow}{2}} = 0$ → $\ker(f) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

f non è suriettiva perchè l'immagine ha una dim < dello spazio di arrivo $(\dim(Im(f)) = 2 < 3)$

ESERCIZI ALGEBRA LINEARE PROF

ES Considero la matrice $A \in M(m,n)$. $\underline{\mathcal{L}}(\underline{x}) = A\underline{x}$ $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $\mathcal{L}$ è lineare?

$$\underset{m,n}{A}\,\underset{n,1}{\underline{x}} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Per stabilire se $\mathcal{L}$ è lineare, devo fare $\mathcal{L}(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = A(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = A(\alpha\underline{x}) + A(\beta\underline{y}) = \alpha A\underline{x} + \beta A\underline{y} = \alpha\mathcal{L}(\underline{x}) + \beta\mathcal{L}(\underline{y})$

$\mathcal{L}$ è lineare perchè rispetta la proprietà lineare

ES

$\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare, qual è la forma di $\mathcal{L}$?

$\mathbb{R}^2\{\underline{i}, \underline{j}\}$, $\mathbb{R}$ $\underline{i}$ $A \in M(1,2)$ $A(a,b)$ (è una matrice 1 riga e 2 colonne)

$\mathcal{L}(x\,y) = (a\,b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by$

ES Data $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (usando la base canonica) tali che

$\mathcal{L}(\underline{e_1}) = \underline{e_1} - 2\underline{e_2}$

$\mathcal{L}(\underline{e_2}) = \underline{e_1} + 3\underline{e_3}$

$\mathcal{L}(\underline{e_3}) = 2\underline{e_1} - 4\underline{e_3}$

Determinare dim Ker $(\mathcal{L})$ e una base. Determinare poi la dim Im$(\mathcal{L})$.

Costruisco la matrice A. Faccio riferimento alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Trasformati della base = colonne della matrice di rappresentazione

colonne di $A = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\underset{..}{e_1} & \mathcal{L}\underset{-}{e_2} & \mathcal{L}\underset{..}{e_3} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$\text{Ker}(\mathcal{L}) = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$

Faccio il prodotto di A per un qualunque vettore di coordinate (x,y,z) e vedo quando è $=0$.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ y \\ -2x + 3y - 4z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y = 0 \\ -2x + 3y - 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x + 2z = 0 \\ -2x - \cancel{4z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -2z \end{cases}$$

(è la 2° eq. moltiplicata per -2)

$\Rightarrow \text{Ker}(\mathcal{L}) = \{(-2t, 0, t) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}$

$\text{Ker}(\mathcal{L}) = \langle -2, 0, 1 \rangle$

è generato dal vettore $(-2,0,1)$ moltiplicato da una qualunque t.

dim ker $(\mathcal{L}) = 1$

base $= \{(-2, 0, 1)\}$ dim Im$(\mathcal{L}) = 2$

sono partita da $n=3$

ES sugli autovalori

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - I\lambda_2) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \underbrace{\lambda^2 - (a+d)\lambda - ad - bc}_{\text{polinomio di 2° grado}}$$

ES $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ autovalori?

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 6-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

In una matrice triangolare, il determinante è $(2-\lambda)(6-\lambda)(-1-\lambda)$.

Devo risolvere $D(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2-\lambda = 0 & \lambda_1 = 2 \\ 6-\lambda = 0 & \lambda_2 = 6 \\ -1-\lambda = 0 & \lambda_3 = 1 \end{cases}$. Gli autovalori sono sempre gli elementi della diagonale principale

ESERCIZIO SUGLI AUTOVALORI

Determinare autovalori e autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$(n^{\circ}=3)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio} \\ \text{caratteristico}}}{D(\lambda)} = \det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1+\lambda^2-3) = (2-\lambda)(\lambda^2-4) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2)$$
$$= -(\lambda-2)^2(\lambda+2)$$

Segue che gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$ con $\overset{\nearrow \text{molteplicità algebrica}}{m_1 = 1}$

$\lambda_2 = 2$ con $m_2 = 2$

Ora cerco gli autovettori.

Mi occupo di $\lambda_1 = 2 \rightarrow A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Imposto il sistema $A\underline{v} = 0 \longrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$

posto $\underline{v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c'è un solo parametro quindi 1 generatore e 1 dimensione

da cui $x = 0$ e $z = -3y$

L'autospazio di -2 $(V(-2))$ è: $V(-2) = \{(0, 1t, -3t) \mid \forall t \in \mathbb{R}\} = \langle(0, 1, -3)\rangle$

coefficienti

la $m = 1$ quindi anche la molteplicità geometrica è 1.

Ora vado su $\lambda_2 = 2 \rightarrow A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Impongo $(A - 2I_3)\underline{v} = 0$. Segue $\{-y + z = 0$

$\downarrow$

$y = z$

$V(2) = \{(\underset{\uparrow}{a}, b, b) \mid \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}\}$. Quindi $V(2) = \langle(1,0,0), (0,1,1)\rangle$. $\dim V(2) = 2 = m_2$

sulla x non ho condizioni

ho due parametri quindi 2 generatori.

1 = coefficiente di a.

Metto poi 0 perchè b è indipendente da a

ho analizzato b (non considero a quindi a = 0 mentre il coeffic. di b = 1)

L'autovalore $\lambda_2 = 2$ è regolare.

ES: Stabilire se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

Non è simmetrica quindi sono costretta a calcolare gli autovalori.

$A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$ $\det A - \lambda I_4 = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4+\lambda^2-5\lambda+2)$

$\det(A - \lambda I_4) = (\lambda-2)^2(\lambda^2-5\lambda+6) = (\lambda-2)^3(\lambda-3) = 0$

$\rightarrow \lambda_1 = 2 \quad m_1 = 3 \leftarrow ?$

$\lambda_2 = 3 \quad m_2 = 1$ regolare

$d_1 = \dim V(\lambda_1) = \dim V(2)$

posso risolvere $A\underline{v} = 0$

oppure

posso dire che $\dim V(2) = \dim \operatorname{Ker}(A - 2I_4) = 4 - \dim \operatorname{Im}(A - 2I) =$
$= 4 - r(A - 2I)$

$$A-2I=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&-2&2\end{pmatrix} \qquad r(A-2I)=2\neq 3=m_1$$

$$\begin{array}{cccc} & \uparrow & & \uparrow\end{array}$$

$\uparrow$ perchè sono 2 le colonne <u>linearmente indipendenti</u>

$\longrightarrow$ A non è diagonalizzabile

ES autovalori, autovettori, diagonalizzabile, S, Λ

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

A è reale e simmetrica quindi è diagonalizzabile. Mi devo aspettare autovali reali

$$A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&-1\\0&2-\lambda&0\\-1&0&1-\lambda\end{pmatrix} \quad \det(A-\lambda I_3)=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda-1)=(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)=$$

$$=-\lambda(\lambda-2)^2$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda_1=0$ $m_1=1$ e $\lambda_2=2$ $m_2=2$

$\lambda_1=0 \Rightarrow (A-0I_3)\underline{v}=\underline{0}$ ovvero $A\underline{v}=\underline{0}$. Pensando $\underline{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ho il sistema $\begin{cases}x-z=0\\2y=0\\-x+z=0\end{cases}$

$$\begin{cases}y=0\\z=x\end{cases}$$

$V(0)=\{(a,0,a)\mid \forall a\in\mathbb{R}\}=\langle(1,0,1)\rangle$

$\lambda_2=2$ $m_2=2$

$\Rightarrow (A-2I_3)\underline{v}=0 \qquad 2\cdot 2I_3=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

$x+z=0 \rightarrow z=-x$

$V(2)=\{(a,b,-a)\mid \forall a,b\in\mathbb{R}\}=$

$=\langle(1,0,-1),(0,1,0)\rangle$

dim dell'autospazio $=2$ = moltep. algebrica infatti la matrice è diagonalizzabile.

autovettore che corrisponde a λ_1

$$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad S=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

Se devo diagonalizzare la matrice, basta che dimostro che è diagonalizzabile e fornisco Λ e S.
Non calcolo S^{-1} e nemmeno $S^{-1}AS$

Sia $f: M(2,2) \to \mathbb{R}^2$ $\quad f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-c \\ b+d \end{bmatrix}$

↳matrice ↳vettore

a) verificare la linearità di f

b) determinare il ker e l'Im f

c) Scrivere la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche

d) Determinare, se esistono, le preimmagini di $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

a) linearità:

- devo verificare che $f(\underline{0}) = \underline{0}$ ma $\underline{0}$, nello spazio delle matrici, è $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

  Quindi $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- linearità rispetto alla somma: siano $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, verifico che $f(A_1+A_2) = f(A_1)+f(A_2)$

$$f(A_1+A_2) = f\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1+a_2 - (c_1+c_2) \\ b_1+b_2 + (d_1+d_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1-c_1 \\ b_1+d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2-c_2 \\ b_2+d_2 \end{bmatrix} = f(A_1)+f(A_2)$$

ho dimostrato che posso trasformare l'uno nell'altro.

- prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda A) = f\left(\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda a - \lambda c \\ \lambda b + \lambda d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a-c \\ b+d \end{bmatrix} = \lambda f(A)$$

Questa f è una funzione lineare tra due spazi vettoriali

b) Trovo l'uno e l'altro lo ricavo dal teo.

$\ker(f) = \left\{ A \in M(2,2) \text{ t.c. } f(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$f(A) = \begin{bmatrix} a-c \\ b+d \end{bmatrix}$ → voglio che sia uguale a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow \begin{cases} a-c=0 \\ b+d=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} a=c \\ b=-d \end{matrix}$ con c, d liberi $\rightsquigarrow A = \begin{bmatrix} c & -d \\ c & d \end{bmatrix}$

per la generica matrice

(sistema indeterminato)

$$= c\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

generano il ker e sono linearmente indipendenti (non sono multipli.

$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = 2$

base del $\ker(f) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Per il teo della nullità + rango ho: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim dello spazio di partenza}}}{\dim}(M(2,2)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

$\dim(M(2,2)) = 4$; la base canonica è $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

→ $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 4-2 = 2$ e l'$\mathrm{Im}(f)$ è contenuta in $\mathbb{R}^2$ che ha dimensione 2. $\to \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

Una base dell'$\mathrm{Im}(f)$ è una qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$.

c) Ricordo: se $f: \underset{\uparrow \atop \text{con dim } n}{V} \longrightarrow \underset{\text{con dim } m}{W}$, la matrice rappresentativa, rispetto alle due basi fissate è la matrice $m \times n$ le cui colonne sono i coefficienti con cui scrivo le immagini delle base di partenza rispetto alla base di arrivo.

In partenza prendo la base canonica. L'immagine è $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \overset{a-c}{1} \\ \underset{b+d}{0} \end{bmatrix} = 1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + 0 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \to \text{sono le basi canoniche di } \mathbb{R}^2$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice rappresentativa: $A_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) Le controimmagini (o preimmagini) di $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow f^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

$f^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \left\{ B \in M(2,2) \text{ t.c. } f(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$f(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ diventa $\underset{\downarrow \atop \text{generica matrice}}{\begin{bmatrix} a - c \\ b + d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \to \begin{cases} a - c = 1 \\ c + d = 3 \end{cases}$

$B = \begin{bmatrix} c+1 & 3-d \\ c & d \end{bmatrix}$

$f^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} c+1 & 3-d \\ c & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ non è uno spazio vettoriale perché $\underline{0} \notin f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

l'unica preimmagine che è anche sottospazio vettoriale è $f^{-1}(\underline{0}) = \ker(f)$ e ho verificato che il nucleo è un sottospazio vettoriale.

- Verificare che $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$

È un insieme formato da 4 vettori infatti $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Devo, però, verificare l'indipendenza lineare dei 4 vettori $\underline{V_1}, \underline{V_2}, \underline{V_3}, \underline{V_4}$.

$$a \underline{V_1} + b \underline{V_2} + c \underline{V_3} + d \underline{V_4} = 0 \iff a = b = c = d = 0$$

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ -2c \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a + b + 0 + c = 0 \\ c = 0 \\ -a - 2c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

β = base di $\mathbb{R}^4 = \{ \underline{V_1}, \underline{V_2}, \underline{V_3}, \underline{V_4} \}$

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, lineare, tale che $f(\overset{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\underline{e_1}}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f(\overset{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\underline{e_2}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f(\underline{e_3}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1) determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche

2) scrivere la matrice rappres. di f rispetto alla base canonica in partenza e β in arrivo.

1) $A_{4 \times 3}$ $\quad f(\underline{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$f(\underline{e_2}) = \ldots = 0 \ldots \quad 1 \ldots \cdot 2 \ldots \quad 1 \ldots$

$f(\underline{e_3}) = \ldots = 2 \ldots -1 \ldots \quad 0 \ldots \quad -1 \ldots$

$A_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ equivale a scrivere i vettori in colonna

2) $B_{4,x3}$ $f(\underline{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\,\underline{v_1} + 0\,\underline{v_2} + 0\,\underline{v_3} + 0\,\underline{v_4}$

$f(\underline{e_2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\underline{v_1} + 0\underline{v_2} + 1\underline{v_3} + 0\,\underline{v_4}$

$f(\underline{e_3}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = ?$ scrivo $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori di β

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = a\underline{v_1} + b\underline{v_2} + c\underline{v_3} + d\,\underline{v_4} = \begin{bmatrix} a+b \\ 0+c \\ -a-2c \\ 0+c+d \end{bmatrix} \quad \begin{cases} a+b=2 \\ c=-1 \\ -a-2c=0 \\ c+d=-1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-1 \\ a=2 \\ d=0 \end{cases}$$

$f(\underline{e_3}) = 2\underline{v_1} + 0\underline{v_2} - 1\underline{v_3} + 0\underline{v_4}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare con $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrice rappresentativa rispetto alla base $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ in partenza e alla canonica in arrivo

1) Scrivere la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo.

Dalla matrice, uso la def di matrice rappresentativa e dico che $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 6\,\underline{e_1} + 1\,\underline{e_2} + 5\,\underline{e_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -\underline{e_1} + 3\underline{e_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\underline{e_1} + 3\underline{e_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Devo definire l'immagine di $\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}$.

$f(\underline{e_2})$ la conosco già

Devo scrivere $\underline{e_1}$ e $\underline{e_3}$ rispetto alla base β e trasformarli.

$$\underline{e_1} = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(\underline{e_1}) = 1\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\,\underline{e_1} + 1\,\underline{e_2} + 2\,\underline{e_3}$$

per linearità

perché in arrivo devo sempre prendere la base canonica

$f(\underline{e_2}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -1\underline{e_1} + 3\underline{e_2} + 0\,\underline{e_3}$

$f(\underline{e_3}) = ?$ scrivo $\underline{e_3}$ a partire da $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 2a+c \\ 0 = 1b \\ 0 = a+c \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=2 \end{cases}$$

quindi $f(\underline{e_3}) = -1\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\,\underline{e_1} - 1\underline{e_2} + 1\underline{e_3}$

per linearità

$$C_{\text{(matrice rispetto alle basi canoniche)}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Stabilire se C è diagonalizzabile. Se sì diagonalizzarla.

Diagonalizzabilità: Devo guardare i suoi autovalori.
Sono le radici del polinomio caratteristico

$$\rightarrow \det(C-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\,(3-\lambda)(1-\lambda) + (1-\lambda+2) = (3-\lambda)\left[3-4\lambda+\lambda^2+1\right] = (3-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$$

$\lambda = 3$ $m = 1$ è singolo quindi regolare

$\lambda = 2$ $\underset{\downarrow}{m} = 2$ è doppio. È regolare se la dim del suo autospazio è $= 2$ (devo calcolare la moltepl geometrica)
= molteplicità algebrica

$\lambda = 2$, l'autospazio $V_2 = \ker(C-2I) = \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 3-2

↓
= sono le soluzioni del sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = y \\ 2y - z = 0 \\ 2y - \cancel{z} = 0 \end{array} \qquad z = 2y$$

con y libero

$$\rightarrow V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} y \\ y \\ 2y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

↖ ho un solo generatore quindi un solo autovettore linearmente indipendente
quindi molt. geometrica di 2 è 1.
Segue che $\lambda = 2$ è autovalore non regolare ($m g < m a$)
→ C non è diagonalizzabile.

- Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare rappresentato, rispetto alle basi canoniche, da $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ① al variare di $h \in \mathbb{R}$.

a) definire dim(Im(f)) e dim(Ker(f)) al variare di h.

② $f(\underline{e_1}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ $f(\underline{e_2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $f(\underline{e_3}) = \begin{bmatrix} 1 \\ h+1 \\ 2 \end{bmatrix}$ inoltre $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+2y+z \\ -3x-2y+h+1)z \\ 6x+4y+2z \end{bmatrix}$ ③

Ci sono 3 modi per descrivere f
1) matrice rappresentativa
2) f dell'immagine
3) generico vettore

dim (Im(f)) = r(A)
dim (Ker(f)) = 3 − r(A)
nullità + rango

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ sicuramente, $2 \leq r(A) \leq 3$.

$r(A) = 3 \iff \det A \neq 0$. Lo verifico: $3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & h+1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & h+1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 3(-4-4h-4) + 2(-6-6h-6) + 1(\cancel{-12}+12) =$

$= 0 \ \forall h.$

$r(A) \leq 2 \ \forall h$ infatti 1° e 3° riga sono linearmente dipendenti ($3°R = 2 \cdot 1°R$).

$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \end{bmatrix}\right)$. Cerco qui la 2×2 non singolare.

le 2×2 possibili sono: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & h+1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & h+1 \end{bmatrix}$

$\downarrow$ det $= 0 \ \forall h$

$\downarrow$ det $= 3h+3-(-3) = 3h+6$ $\downarrow$ $3h+6=0$ $h=-2$

$\downarrow$ det $= 2h+2-(-2) = 2h+4$ $\downarrow$ $2h+4=0$ $h=-2$

$\Rightarrow$ se $h=-2$, $r(A)=1 \rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$

se $h \neq -2$, $r(A) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f))$

$\downarrow$

Se $h \neq -2$, esiste almeno una 2×2 non singolare (ovvero che il det $\neq 0$).

2) Determinare h per cui $\lambda = 3$ è autovalore di A; per tale h, se possibile, diagonalizzare A.

$\lambda = 3$ è autovalore $\iff \det(A - 3I) = 0$.

$A = \begin{bmatrix} 3-3 & 2 & 1 \\ -3 & -2-3 & h+1 \\ 6 & 4 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & h+1 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & h+1 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0 - 2 \begin{vmatrix} -3 & h+1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ voglio che sia $=0$.

$-2(3-6h-6) + 1(-12+30) = 0$

$6 + 12h + 18 \quad = 0 \quad h = -2$

Se $h=-2$, $\lambda = 3$ è autovalore. Cerco gli altri autovalori.

$\det(A - \lambda I)$ con $h=-2$ $= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & -1 \\ 6 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & -2-\lambda \\ 6 & 4 \end{vmatrix} =$

$= (3-\lambda)(\lambda^2 - \cancel{4} + \cancel{4}) - 2(\cancel{-6} + 3\lambda + \cancel{6}) + 1(\cancel{-12} + \cancel{12} + 6\lambda) =$

$= (3-\lambda)\lambda^2 - \cancel{6\lambda} + \cancel{6\lambda} = 0$

$\lambda = 0$ $m = 2$ è un autovalore doppio quindi verifico se è regolare.

$\lambda = 3$ $m = 1$ è semplice quindi regolare

Autospazio $V = \ker(A - 0I) = \ker(A) = \ker \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ -3x - 2y - z = 0 \\ 6x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} z = -3x - 2y \\ x, y, \text{ liberi} \end{cases}$

$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ -3x - 2y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

linearmente indipendenti

$\dim(V_0) = 2 \quad mg(0) = ma(0) = 2$

$\lambda = 0$ è regolare

oss: $V_0 = \ker(A)$ $\quad Av = \lambda v$

$\hookrightarrow \{ v : Av = 0v = 0 \}$

def. di autovalore

$\Big\} V_0 = \ker(F)$

$\dim(V_0) = \dim(\ker(F)) = 3 - r(A)$

la dim dell'autospazio è $n - r(\text{matrice})$

dim di partenza ($\mathbb{R}^3$)

A è diagonalizzabile perchè i suoi due autovalori sono regolari $\rightarrow$

$\exists P$ (matrice di passaggio) t.c. $\Delta = P^{-1}AP$ o $A = P\Delta P^{-1}$

con $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (autovalori scelto un ordinamento)

$P = \begin{bmatrix} | & | & \end{bmatrix}$ incolonno autovalori rispettando l'ordine scelto.

manca $V_3 = \ker(A - 3I) = \ker \begin{bmatrix} 3-3 & 2 & 1 \\ -3 & -2-3 & -1 \\ 6 & 4 & 2-3 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ -3x - 5x - z = 0 \\ 6x + 4y - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3z = -2y \\ -3x - 5y + 2y = 0 \\ 6x + 4y + 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = -2y \\ x = -y \end{cases}$

$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} -y \\ y \\ -2y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

un autovettore linearmente indipendente

$\Rightarrow \Delta = P^{-1}AP$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Verifico che $P \cdot \Delta = AP$ $\quad P\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} - AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

• Discutere al variare di α, la diagonalizzabilità di $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha+5 \end{bmatrix}$ e, quando possibile diagonali zarla

cerco gli autovalori $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha+5-\lambda \end{vmatrix} = 0 - 0 + (\alpha + 5 - \lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (\alpha + 5 - \lambda)(\cancel{4} - 5\lambda + \lambda^2 - \cancel{4}) = \lambda(\alpha + 5 - \lambda)(\lambda - 5)$

$\lambda = 0$

$\lambda = +\alpha + 5$

$\lambda = 5$

guardo ora se c'è possibilità di avere autovalori coincidenti:

$\lambda_1 = \lambda_3$ mai

$\lambda_1 = \lambda_2 \longrightarrow 0 = 5 + \alpha \quad \alpha = -5$

se $\alpha = -5$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ è doppio $(m = 2)$

$\lambda_3 = 5 \rightarrow \lambda = 0$ è regolare perchè semplice

$\lambda_2 = \lambda_3 \longrightarrow 5 + \alpha = 5 \quad \alpha = 0$

se $\alpha = 0$ $\quad \lambda_1 = 0$ è regolare perchè è semplice.

$\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ è doppio

se $\alpha \neq -5$ e $\alpha \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ sono autovalori distinti quindi semplici e regolari. la matrice è quindi diagonalizzabile

→ $\alpha = -5$. Studio la regolarità di $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La molteplicità algebrica di $\lambda = 0$ è 2. Cerco la m g. (0) (che ricordo coincide con dim (V_0)).

$$\dim(V_0) = \dim(\ker(A - 0I)) = 3 - r(A - 0I) = 3 - r(A)$$

$$r(A) = r\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$ (per la matrice 2x2 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$) $\longrightarrow \dim(V_0) = 1 = mg(0)$

$\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ non regolare

$\downarrow$

A non è diagonalizzabile

→ $\alpha = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ è autovalore doppio cioè m.a. $(5) = 2$. Cerco la m.g (5).

$$mg.(5) = \dim V_5 = \dim(\ker(A - 5I)) = \underbrace{3}_{\text{dim della matrice (o dello spazio di partenza)}} - r(A - 5I).$$

$$r(A - 5I) = r\begin{bmatrix} 4-5 & 2 & 0 \\ 2 & 1-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{perchè} \quad \det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 0$$

non ho considerato la 3°R e la 3° colonna

$mg.(5) = 3 - 1 = 2 \rightarrow$ autovalore doppio è regolare.

Oss: se $\alpha = 0$ $\quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ è simmetrica. (vuol dire che $A = A^T$) Vale il teorema spettrale per il quale A è diagonalizzabile e la matrice di passaggio può essere scritta come matrice ortogonale.

Diagonalizzo: $\quad \Delta = P^{-1}AP \qquad \Delta = P^TAP \qquad P$ = matrice ortogonale di passaggio

$P^{-1} = P^T$ e le colonne di P sono autovettori ortonormali (= ortogonali e di lunghezza 1) se $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $V_0 = \ker(A - 0I) = \ker(A)$ $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 5z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$ $\rightarrow V_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ è l'autovettore che stavo cercando.

$V_5 = \ker(A - 5I) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $x = 2y$ y, z liberi $\rightarrow V_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 2y \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

sapevo già che ne avrei trovati 2 (per la molteplicità)

- Autovettori relativi ad autospazi diversi sono sempre ortogonali
- Potrebbe succedere che 2 autovettori indipendenti nello stesso autospazio non siano ortogonali (li rendo ortogonali)

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ normalizzo i vettori $\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$ $\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{5}$

"norma"

$\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = 1$

Costruisco una matrice $\tilde{P}$ ortogonale : $\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una matrice ortogonale cioè $\tilde{P}^{-1} = \tilde{P}^T$ (infatti $\tilde{P}\tilde{P}^T = \tilde{P}^T\tilde{P} = I$)

$\tilde{P}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \tilde{P}^T \cdot A \cdot \tilde{P}$ (per teoria)

$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10/\sqrt{5} & 5/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \tilde{P}^T \cdot A \cdot \tilde{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$