

# Compito di Metodi Matematici della Fisica

21/01/2020

1. Determinare per quali valori del parametro reale  $r \in \mathbb{R}$  esiste l'integrale

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + r \cos \theta}{1 + r^2 + 2r \cos \theta} d\theta .$$

Mostrare che

$$I(r) = I(-r) .$$

Calcolare, quando esiste,  $I(r)$ , usando il teorema dei residui.

Suggerimento: può essere utile verificare che, per  $r > 0$ , vale

$$\alpha := \frac{1 + r^2}{2r} \geq 1 .$$

2. Risolvere, facendo uso della trasformata di Laplace, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = (t - t_0)\Theta(t - t_0) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ove  $t_0 > 0$  ed  $x_0 \in \mathbb{R}$  sono numeri reali supposti noti.

Determinare se esistono valori di  $x_0$  tali per cui esiste finito

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$$

3. Risolvere, facendo uso della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(x) = \cos(x) + \int_0^x y(t) \sin(x - t) e^{t-x} dt$$

ove  $y(x)$  rappresenta la funzione incognita.