# Svolgimento di alcuni esercizi del libro Matematica di Angelo Guerraggio

## 2. Funzioni e insiemi numerici

2.4 Verificare che $(A_1 \times B) \cup (A_2 \times B) = (A_1 \cup A_2) \times B$.

*Soluzione:*

$\subseteq$) Sia $(a,b) \in (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$. Allora $a \in (A_1 \cup A_2)$ e $b \in B$, da cui $(a,b) \in (A_1 \cup A_2) \times B$.

$\supseteq$) Sia $(a,b) \in (A_1 \cup A_2) \times B$. Allora $(a,b) \in (A_1 \times B)$ oppure $(a,b) \in (A_2 \times B)$, da cui $(a,b) \in (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$.

$\square$

2.5 Verificare che $(A^c)^c = A$.

*Soluzione:*

$\supseteq$) Sia $a \in A$. Dalla definizione di insieme complementare, $a \notin A^c$ e dunque $a \in (A^c)^c$.

$\subseteq$) Sia $a \in (A^c)^c$. Ancora per la definizione di insieme complementare, $a \notin A^c$ e $a \in A$.

$\square$

2.6 Verificare le leggi di De Morgan:

i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

*Soluzione:* Punto i), $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

$\subseteq$) Sia $a \in (A \cup B)^c$. Allora $a \notin A \cup B$ e dunque $a \notin A$ e $a \notin B$, cioè $a \in A^c$ e $a \in B^c$, ovvero $a \in A^c \cap B^c$.

$\supseteq$) Sia $a \in A^c \cap B^c$. Allora

$$a \in A^c \quad \text{e} \quad a \in B^c, \quad \text{ovvero}$$

$$a \notin A \quad \text{e} \quad a \notin B, \quad \text{ovvero}$$

$a \notin A \cup B$, che implica $a \in (A \cup B)^c$.

Punto ii), $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

$\subseteq$) Sia $a \in (A \cap B)^c$. Allora $a \notin A \cap B$, da cui i casi possibili sono:

- $a \in A$ e $a \notin B \;\Rightarrow\; a \in B^c$;
- $a \notin A$ e $a \in B \;\Rightarrow\; a \in A^c$;
- $a \notin A$ e $a \notin B \;\Rightarrow\; a \in A^c$ e $a \in B^c$.

In tutti e tre i casi, $a \in A^c \cup B^c$.

$\supseteq$) Sia $a \in A^c \cup B^c$. I casi possibili sono:

- $a \in A^c,\; a \notin B^c \;\Rightarrow\; a \notin A,\; a \in B$;
- $a \notin A^c,\; a \in B^c \;\Rightarrow\; a \in A,\; a \notin B$;
- $a \in A^c,\; a \in B^c \;\Rightarrow\; a \notin A,\; a \notin B$.

In tutti e tre i casi $a \notin A \cap B$ e dunque $a \in (A \cap B)^c$.

$\square$

2.8 Determinare la funzione inversa di:

i) $f(x) = 3x + 5$

iii) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

*Soluzione:*

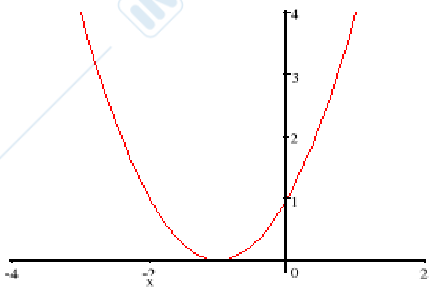
i) Il grafico della funzione $y = 3x + 5$ è naturalmente una retta. Poichè si vede che la funzione data è strettamente crescente, è invertibile nel suo dominio. Per calcolare l'inversa, esplicito rispetto a $x$ l'equazione data. Da $3x = y - 5$ si ricava $x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$.

iii) Esplicitando rispetto a $x$ si ottiene: $x + 1 = y^3$ e dunque $x = y^3 - 1$.

$\square$

2.10 Stabilire se la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = (x+1)^2$ è invertibile su tutto $\mathbf{R}$. Altrimenti determinare il più grande intervallo contenente il punto $x = 0$, tale che la restrizione di $f$ a questo intervallo sia invertibile, e scrivere la funzione inversa.

*Soluzione:* La funzione $f(x) = (x+1)^2$ non è invertibile su $\mathbf{R}$. E', per esempio, $f(0) = f(-2) = 1$ e la funzione non risulta iniettiva.



Il più grande intervallo contenente $x = 0$ su cui $f$ è iniettiva è $[-1, +\infty)$. Per $x$ in tale intervallo, esplicitando l'equazione $y = (x+1)^2$ rispetto a $x$, si ottiene $\sqrt{y} = x + 1$ ovvero $x = \sqrt{y} - 1$. Si conclude che $f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1$. □

2.21 Dimostrare per assurdo le seguenti proposizioni:

i) $\sqrt{6} \notin \mathbf{Q}$

ii) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$ (suggerimento: porre $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$).

*Soluzione:*

i) Per assurdo, $\exists \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ tale che $\frac{m^2}{n^2} = 6$, ovvero $m^2 = 6n^2$. Si osserva che $6 = 2 \cdot 3$ e per l'unicità della scomposizione in fattori primi, al primo membro ($m^2$), sia il fattore 2 che 3 non compare o compare un numero pari di volte, mentre al secondo membro sia 2 che 3 compaiono un numero dispari di volte. Si conclude che l'uguaglianza $m^2 = 6n^2$ è assurda e dunque $6 \notin \mathbf{Q}$.

ii) Sia $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ e per assurdo $\alpha \in \mathbf{Q}$. Allora

$$\alpha^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

da cui

$$\sqrt{6} = \frac{\alpha^2 - 5}{2} \in \mathbf{Q}$$

e questo contraddice i). Si conclude che $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$.

□

## 3. Le funzioni elementari

3.1 Scrivere l'equazione della retta passante per i punti di coordinate $(-1, 1)$ e $(2, 0)$.

*Soluzione:* L'equazione di una retta passante per i due punti di coordinate $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ è

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Dunque, posto $(x_1, y_1) = (-1, 1)$ e $(x_2, y_2) = (2, 0)$,

$$\begin{aligned} y = 1 + \frac{0 - 1}{2 - (-1)}(x - (-1)) &= 1 - \frac{1}{3}(x + 1) \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

□

3.6 Siano $y_1 = 2x+5$ e $y_2 = -x+7$. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto di intersezione di $y_1$ e $y_2$ e parallela alla retta di equazione $y_3 = \frac{1}{2}x + 2$.

*Soluzione:* Il punto di intersezione tra le rette di equazione $y_1$ e $y_2$ è soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

ovvero ha coordinate $\left(\frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$. Il coefficiente angolare richiesto è $m = \frac{1}{2}$. L'equazione della retta in questione è dunque:

$$y = \frac{19}{3} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}x + 6.$$

□

3.8 Scrivere l'equazione della parabola (con asse parallelo all'asse $y$) passante per i punti di coordinate $(0,0), (1,1)$ e $(-2,4)$.

*Soluzione:* Una generica parabola con asse parallelo a quello delle $y$ ha per equazione $f(x) = ax^2 + bx + c$. Costruisco un sistema di tre equazioni imponendo il passaggio per i tre punti dati, per calcolare i coefficienti $a, b$ e $c$.

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 4a - 2b + c = 4 \end{cases}$$

Il sistema è soddisfatto per $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$ e dunque l'equazione della parabola richiesta è $f(x) = x^2$. □

3.26 Stabilire quali tra le seguenti funzioni sono pari o dispari

i) $f(x) = x^4 - x^2$  ii) $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^2+1}$

iii) $f(x) = x - \frac{2}{x}$  iv) $f(x) = x^2 + \cos x$

v) $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$  vi) $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$

*Soluzione:*

i) Il campo di esistenza di $f(x) = x^4 - x^2$ è $\mathbf{R}$, dunque simmetrico rispetto all'origine. Si tratta di una funzione pari. Infatti:

$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x).$$

ii) Il campo di esistenza di $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^2+1}$ è $\mathbf{R}$, dunque simmetrico rispetto all'origine. Si tratta di una funzione pari:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2 - 3}{(-x)^2 + 1} = \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 1} = f(x).$$

iii) Il campo di esistenza di $f(x) = x - \frac{2}{x}$ è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, dunque simmetrico rispetto all'origine. Si tratta di una funzione dispari. Infatti

$$f(-x) = -x - \frac{2}{-x} = -x + \frac{2}{x} = -\left(x - \frac{2}{x}\right) = -f(x).$$

iv) Il campo di esistenza di $f(x) = x^2 + \cos x$ è $\mathbf{R}$, dunque simmetrico rispetto all'origine. Si tratta di una funzione pari:

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x).$$

$\square$

3.31 Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$ ii) $f(x) = \log(x+3)$

iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ iv) $f(x) = \log \log x$

*Soluzione:*

i) Per ottenere il campo di esistenza è necessario imporre la condizione $x^2 - 3x \neq 0$ ovvero:

$$x(x-3) \neq 0 \iff x \neq 0 \text{ e } x \neq 3.$$

Il campo di esistenza è $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$.

ii) Per ottenere il campo di esistenza è necessario imporre la condizione $x + 3 > 0$ soddisfatta per $x > -3$. Il campo di esistenza è $(-3, +\infty)$.

iii) Per ottenere il campo di esistenza è necessario imporre la condizione $x^2 - 4x \geq 0$. Il campo di esistenza è $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

iv) Per ottenere il campo di esistenza è necessario imporre le condizioni:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log x > 0 \end{cases} \text{ovvero} \begin{cases} x > 0 \\ x > 1. \end{cases}$$

Si conclude che il campo di esistenza è $(1, +\infty)$.

$\square$

3.34 Determinare l'insieme delle immagini delle seguenti funzioni

i) $f(x) = -x^2 - 5$

ii) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & \text{se } x > 0 \\ x^2 + 4x + 3\,, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

*Soluzione:*

i) $f(x) = -x^2 - 5$. Si tratta di una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Per individuare l'insieme delle immagini, è necessario calcolare le coordinate del vertice, cioè $x_v = -\frac{b}{2a} = 0$ e $f(x_v) = -5$. Si conclude che l'insieme delle immagini è l'intervallo $(-\infty, -5]$.

ii) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Si tratta di un'iperbole equilatera. Calcoliamo il centro di simmetria: $C = (2, 1)$. Si conclude che l'insieme delle immagini è $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

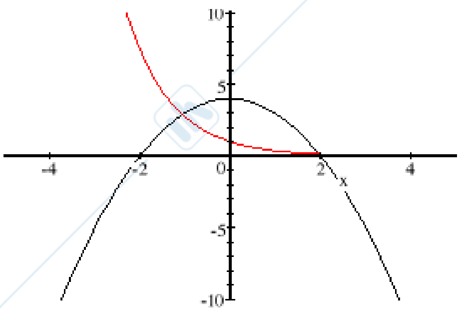
iii) L'insieme delle immagini di $g(x) = \frac{1}{x}$ per $x > 0$ è l'intervallo $(0, +\infty)$. La parabola di equazione $y = x^2 + 4x + 3$ ha vertice di coordinate $x_v = -\frac{4}{2} = -2$ e $f(x_v) = -1$. Osservo che $x_v = -2 < 0$, dunque fa parte del campo di esistenza e la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto. L'insieme delle immagini della parabola è dunque $[-1, +\infty)$.
Concludiamo che l'insieme delle immagini della funzione $f(x)$ è $[-1, +\infty)$.

$\square$

3.35 Determinare il numero di soluzioni dell'equazione:

$$4 - x^2 = \left(\frac{1}{e}\right)^x .$$

*Soluzione:* Il primo membro rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso il basso, con vertice $x_v = -\frac{b}{2a} = 0$ e $f(x_v) = 4$. Il secondo membro è una funzione esponenziale con base minore di 1. Dal confronto grafico si evince che l'equazione data ammette due soluzioni.




$\square$

3.41 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 2x - 8$. Calcolare $f(1)$, dedurre una fattorizzazione di $f(x)$ e risolvere in $\mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = 0$.

*Soluzione:* Per sostituzione si ottiene $f(1) = 0$. Si deduce che il polinomio dato è divisibile per il binomio $(x - 1)$. Scomponiamo il polinomio grazie al teorema di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 7 & -2 & -8 \\ & & & & \\ 1 & & 3 & 10 & 8 \\ \hline & 3 & 10 & 8 & \end{array}$$

Si deduce che

$$f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 2x - 8 = (x - 1)(3x^2 + 10x + 8)$$

e le soluzioni di $f(x) = 0$ sono $1, 2$ e $-\frac{4}{3}$. □

3.43 Determinare l'insieme dei numeri reali strettamente positivi soluzione dell'equazione

$$\log \frac{x+3}{2} = \frac{1}{2}(\log x + \log 3).$$

*Soluzione:* Per le proprietà dei logaritmi, l'equazione data è equivalente a:

$$\log \frac{x+3}{2} = \log(3x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ovvero a} \quad \frac{x+3}{2} = (3x)^{\frac{1}{2}}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri $(x + 3)^2 = 4(3x)$ da cui segue $x = 3$.

□

3.46 Risolvere l'equazione $\log_{\frac{1}{2}}(1 + x) = \log_2(2 - x)$.

*Soluzione:* I valori della variabile indipendente accettabili come soluzione dell'equazione data, risolvono il sistema:

$$\begin{cases} 1 + x > 0 \\ 2 - x > 0, \end{cases}$$

ovvero $x \in (-1, 2)$. Poichè $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$, l'equazione data equivale a:

$$\frac{\log_2(1+x)}{\log_2 \frac{1}{2}} = \log_2(2 - x)$$

$$-\log_2(1 + x) = \log_2(2 - x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 2 - x.$$

Si tratta di risolvere l'equazione di secondo grado $x^2 - x - 1 = 0$. Si conclude che l'insieme delle soluzioni è $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. □

3.51 Risolvere le seguenti disequazioni di primo e secondo grado

v) $7x^2 - 7x - 84 \geq 0$ vi) $-x^2 - x + 2 \leq 0$

vii) $3(x-1) < (x+2)^2 - 6x + 4$ viii) $(x+2)^2 - 4x \geq x^2 + 4$

*Soluzione:*

v) Si calcola il discriminante $\Delta = 49+2352 = 2401 > 0$, le radici $x_{1,2} = \frac{7 \pm 49}{14}$, sono $x_1 = -3$ e $x = 4$. Si conclude che la disequazione data è soddisfatta per $x \leq -3$ e $x \geq 4$.

vi) La disequazione data è equivalente a $x^2 + x - 2 \geq 0$, soddisfatta per $x \leq -2$ e $x \geq 1$.

vii) Da $3(x-1) - (x+2)^2 + 6x - 4 < 0$, segue

$$-x^2 + 5x - 11 < 0 \qquad \text{ovvero} \qquad x^2 - 5x + 11 > 0.$$

Il discriminante è $\Delta = 25 - 44 = -19 < 0$. Si conclude che la disequazione data è soddisfatta per ogni $x \in \mathbf{R}$.

viii) La disequazione $x^2 + 4 + 4x - 4x \geq x^2 + 4$ è soddisfatta per ogni $x \in \mathbf{R}$.

□

3.55 Risolvere le seguenti disequazioni razionali fratte:

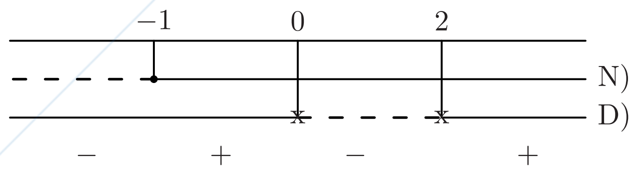
i) $\frac{2}{x-2} \leq \frac{1}{x^2-2x} + \frac{1}{x}$ ii) $\frac{1-x}{x^2-4} > 2$

*Soluzione:*

i) La disequazione si può riscrivere come:

$$\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x(x-2)} - \frac{1}{x} \leq 0 \quad \text{equivalente a} \quad \frac{x+1}{x(x-2)} \leq 0.$$

Numeratore: $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$.
Denominatore: $x(x-2) > 0 \iff x < 0$ e $x > 2$.
Riepilogando i segni di numeratore e denominatore:

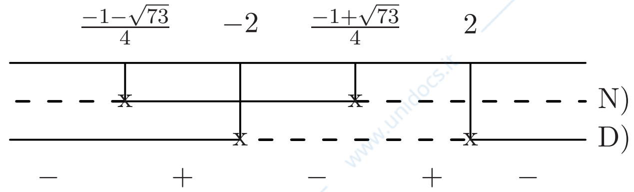



si conclude che la disequazione data è soddisfatta per $x \leq -1$ e $0 < x < 2$.

ii) $\frac{1-x}{x^2-4} - 2 > 0$ è equivalente a:

$$\frac{1 - x - 2x^2 + 8}{x^2 - 4} > 0.$$

Studio separatamente il segno di numeratore e denominatore:
numeratore: $-2x^2 - x + 9 > 0$ per $\frac{-1-\sqrt{73}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{73}}{4}$.
Denominatore: $(x+2)(x-2) > 0 \iff x < -2$ e $x > 2$.
Riepilogando i segni di numeratore e denominatore




si conclude che la disequazione data è soddisfatta per $\frac{-1-\sqrt{73}}{4} < x < -2$ e $\frac{-1+\sqrt{73}}{4} < x < 2$.

□

3.56 Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

i) $\begin{cases} 2 - 3x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} \frac{x+2}{4} + \frac{x}{3} < \frac{x-4}{2} + 3 \\ \frac{3x-2}{3} + 1 > \frac{5x-3}{2} \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases}$

*Soluzione:*

i) La prima disequazione del sistema, è soddisfatta per $3x \leq 2 \iff x \leq \frac{2}{3}$.
La seconda disequazione è soddisfatta per $x \leq -1$ e $x \geq 2$.
Si conclude che il sistema è risolto per $x \leq -1$.

iii) Prima disequazione: $\frac{x+2}{4} + \frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} - 3 < 0$ per $x < 6$.
Seconda disequazione: $\frac{3x-2}{3} + 1 - \frac{5x-3}{2} > 0$ per $x < \frac{11}{9}$.
Terza disequazione: $x^2 - x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
Il sistema è risolto per $x < \frac{11}{9}$.

□

3.57 Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

ii) $\frac{x+1}{\sqrt{x}} \geq 1$ iv) $2x - 8 \leq \sqrt{x^2 - 5}$

v) $\sqrt{3 + x^2} - \sqrt{1 + 4x^2} \geq 0$ ix) $\sqrt{3x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 7x + 12} < 0$

*Soluzione:*

ii) Considero la disequazione equivalente $x+1 \geq \sqrt{x}$ nel campo di esistenza $x > 0$. Le soluzioni della disequazione sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ (x+1)^2 \geq x \end{cases}$$

Si conclude che l'insieme delle soluzioni della disequazione proposta è $x > 0$.

iv) L'insieme delle soluzioni della disequazione data è unione delle soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 5 \geq 0 \\ 2x - 8 < 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} (2x-8)^2 \leq x^2 - 5 \\ 2x - 8 \geq 0. \end{cases}$$

Il primo sistema è risolto per $\sqrt{5} \leq x < 4$ e per $x \leq -\sqrt{5}$.
Il secondo sistema è risolto per $4 \leq x \leq \frac{23}{3}$. L'unione delle soluzioni è $\sqrt{5} \leq x \leq \frac{23}{3}$ e $x \leq -\sqrt{5}$.

v) $\sqrt{3+x^2} \geq \sqrt{1+4x^2}$. Poichè i radicandi sono somme di quantità positive, la disequazione data equivale a:

$$3 + x^2 \geq 1 + 4x^2 \quad \text{ovvero} \quad 3x^2 - 2 \leq 0$$

soddisfatta per $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$.

ix) $\sqrt{3x^2+3x} < \sqrt{x^2 - 7x + 12}$. Si scrive il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3x \geq 0 \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x < x^2 - 7x + 12. \end{cases}$$

Si conclude che l'insieme delle soluzioni della disequazione proposta è $-6 < x \leq -1$ e $0 \leq x < 1$.

□

3.58 Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali e logaritmiche:

| | | | |
|---|---|---|---|
| iv) | $e^{x^2+4x} \geq 1$ | vi) | $e^{x^2+7x+5} > \frac{1}{e^x}$ |
| x) | $e^x \geq -\frac{3}{e^x-4}$ | xii) | $\log(x^2 - 14x + 48) > 0$ |
| xiv) | $3^{x-1} - 3^{x+1} + 216 > 0$ | xvi) | $e^{-x}(x-2)^3 \geq 0$ |

*Soluzione:*

iv)

$$\begin{aligned} e^{x^2+4x} \geq 1 &\iff e^{x^2+4x} \geq e^0 \\ &\iff x^2+4x \geq 0 \\ &\iff x \leq -4 \text{ e } x \geq 0. \end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned} e^{x^2+6x+8} > \frac{1}{e} &\iff e^{x^2+6x+8} > e^{-1} \\ &\iff x^2+6x+8 > -1 \\ &\iff x^2+6x+9 > 0 \\ &\iff (x+3)^2 > 0 \\ &\iff x \neq -3. \end{aligned}$$

x) La disequazione data è equivalente a $e^x + \frac{3}{e^x-4} \geq 0$. Il numeratore è non negativo per $x \leq 0$ e $x \geq \log 3$. Denominatore: $e^x - 4 > 0 \iff x > 2\log 2$. Si conclude che l'insieme delle soluzioni è $0 \leq x \leq \log 3$ e $x > 2\log 2$.

xii)

$$\log(x^2-14x+48) > 0 \iff \log(x^2-14x+48) > \log 1$$

e per la monotonia della curva logaritmica, il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} x^2-14x+48 > 0 \\ x^2-14x+48 > 1. \end{cases}$$

Basta risolvere la seconda equazione. Si conclude che l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, 7-\sqrt{2}) \cup (7+\sqrt{2}, +\infty)$.

xiv)

$$\begin{aligned} 3^{x-1} - 3^{x+1} + 216 > 0 &\iff \frac{1}{3}3^x - 3\cdot 3^x + 216 > 0 \\ &\iff 3^x\left(-\frac{8}{3}\right) > -216 \\ &\iff 3^x < 81 \\ &\iff 3^x < 3^4 \\ &\iff x < 4. \end{aligned}$$

xvi) Si tratta del prodotto di due fattori, il primo dei quali è sempre positivo mentre il secondo:

$$(x-2)^3 \geq 0 \iff x-2 \geq 0 \iff x \geq 2.$$

La soluzione finale è $x \geq 2$.

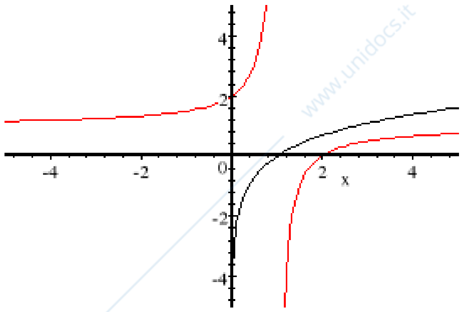
□

3.59 Risolvere, con il metodo grafico, le seguenti disequazioni

iii) $\log x > \frac{2-x}{1-x}$ v) $x^2 + 2x - \frac{x}{x+1} + 1 \geq 0$

*Soluzione:*

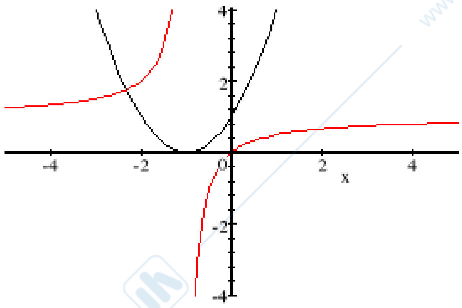
iii) Si tratta di confrontare la funzione logaritmo in base $e$ con un'iperbole equilatera, il cui centro di simmetria è $(1, 1)$. Come si vede dal grafico non ci sono intersezioni tra le due curve e la curva logaritmica si trova al di sopra dell'iperbole per $x > 1$.




v) Riscrivo la disequazione come:

$$x^2 + 2x + 1 \geq \frac{x}{x+1}.$$

La parabola $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ interseca l'asse delle ascisse nel punto $x = -1$ e il suo vertice ha coordinate $(-1, 0)$. L'iperbole equilatera ha centro di simmetria $(-1, 1)$. Come si vede dal grafico, esiste una sola intersezione nel punto di ascissa $\alpha \in (-3, -2)$ e l'equazione è risolta per $x \leq \alpha$ e $x > -1$.



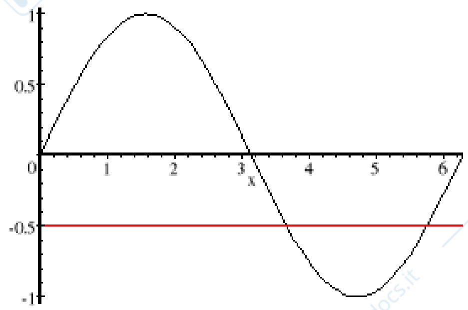

□

3.60 Risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche nell'intervallo $[0, 2\pi)$:

i) $\operatorname{sen} x > -\frac{1}{2}$ iv) $(\cos x)^2 + 2\operatorname{sen} x - 1 \geq 0$

*Soluzione:*

i) Dal confronto grafico tra la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ e la retta $y = -\frac{1}{2}$, limitatamente all'intervallo $[0, 2\pi)$




si ricavano le soluzioni $0 \leq x < \frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$.

iv) L'identità fondamentale della trigonometria $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, permette di riscrivere la disequazione come:

$$1 - \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x - 1 \geq 0$$

equivalente a $\operatorname{sen} x[2 - \operatorname{sen} x] \geq 0$. Il secondo fattore è sempre positivo. Dunque il segno dipende dal primo fattore: $0 \leq x \leq \pi$.

$\square$

## 4. Le funzioni quasi elementari

4.3 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore, precisando se essi sono anche, rispettivamente, massimo e minimo, di $A \cdot A = \{a^2 : a \in A\}$ essendo $A = (-2, 2]$.

*Soluzione:* $A \cdot A = [0, 4]$; $\sup(A \cdot A) = \max(A \cdot A) = 4$, $\inf(A \cdot A) = \min(A \cdot A) = 0$. $\square$

4.4 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore, precisando se essi sono anche, rispettivamente, massimo e minimo, di $A + B$ e $A - B$ essendo $A = [-1, 1)$ e $B = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$.

*Soluzione:* Si ha $\inf A = \min A = -1$, mentre $\sup A = 1$. Dato l'insieme $B = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right\}$, si ha $\inf B = \min B = 0$, mentre $\sup B = 1$.
Si ricava che $\sup(A+B) = 1+1 = 2$ ($x = 2$ non è però massimo) e $\inf(A+B) = -1 + 0 = -1 = \min(A + B)$.
Analogamente $\sup(A - B) = 1$ ($x = 1$ non è però massimo) e $\inf(A - B) = -2$ ($x = -2$ non è però minimo). $\square$

4.5 Determinare per ciascuno dei seguenti insiemi l'estremo superiore e l'estremo inferiore, precisando se essi sono anche, rispettivamente, massimo e minimo:

$$A = \left\{2 - \tfrac{3}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\}$$
$$B = \left\{\tfrac{n^2+1}{2n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\}$$
$$C = \left\{\tfrac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\}$$

*Soluzione:* L'insieme $A$ è formato dai numeri $-1, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \ldots$ e si vede che $\inf A = \min A = -1$, mentre $\sup A = 2$.
Dalla rappresentazione di $B = \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{17}{8}, \frac{13}{5}, \frac{37}{12}, \ldots\right\}$, si deduce che $\inf B = \min B = 1$ mentre $\sup B = +\infty$. L'insieme $B$ non ha massimo.
Si può pensare l'insieme $C$ come $D \cup E$ dove:

$$D = \left\{\frac{1}{n} + 1 : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\},\ \text{pari}\ \right\}$$

$$E = \left\{\frac{1}{n} - 1 : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\},\ \text{dispari}\ \right\}.$$

L'insieme $D$ è formato dagli elementi $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \ldots$ ovvero ha per estremo superiore e massimo $\frac{3}{2}$, mentre $\inf D = 1$.
L'insieme $E$ è formato dagli elementi $0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \ldots$ e pertanto il suo estremo superiore e massimo è 0, mentre $\inf E = -1$.
Si conclude che $\sup C = \max C = \frac{3}{2}$, mentre $\inf C = -1$. L'insieme $C$ non ha minimo. □

4.7 Determinare l'insieme dei minoranti e quello dei maggioranti dell'insieme dei valori assunti dalle funzioni:

i) $f(x) = e^x$ iii) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$

*Soluzione:*

i) L'insieme delle immagini della funzione $f(x) = e^x$ è l'intervallo $(0, +\infty)$. L'insieme dei minoranti è $(-\infty, 0]$, quello dei maggioranti è vuoto (poichè non esiste alcun numero reale maggiore di $+\infty$).

iii) La funzione rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Il suo vertice è il punto di coordinate $\left(3, \frac{11}{2}\right)$ e dunque l'insieme delle immagini è $\left(-\infty, \frac{11}{2}\right]$. L'insieme dei minoranti è vuoto mentre l'insieme dei maggioranti è l'intervallo $\left[\frac{11}{2}, +\infty\right)$.

□

4.8 Determinare il massimo e il minimo dei valori assunti dalle seguenti funzioni sull'intervallo $[-1, 3]$:

iii) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

*Soluzione:*

iii) La parabola ha vertice di ascissa $x_v = \frac{3}{2} \in [-1, 3]$ e concavità rivolta verso il basso. Dunque nell'intervallo $[-1, 3]$ la funzione assume massimo nel vertice $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$ e minimo in uno dei due estremi dell'intervallo di definizione. Calcolando tali valori, $f(-1) = -6$ e $f(3) = -2$, si conclude che il valore minimo della funzione è $-6$.

$\square$

4.11 Determinare i punti interni, di accumulazione, di frontiera e isolati dei seguenti insiemi:

i) $\left\{x \in \mathbf{R} : -1 \leq \frac{1}{x} < 1\right\}$

ii) $\left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\} \cup [1, 2)$

*Soluzione:*

i) L'insieme dato è $[-1, 0) \cup (0, 1)$. I punti interni sono $(-1, 0) \cup (0, 1)$, i punti di accumulazione sono $[-1, 1]$, i punti di frontiera sono $\{-1, 0, 1\}$, mentre non ci sono punti isolati.

ii) L'insieme dei punti interni è: $(1, 2)$, l'insieme dei punti di accumulazione è $[1, 2]$, i punti di frontiera sono $\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\} \cup \{1, 2\}$, mentre i punti isolati sono $\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\right\}$.

$\square$

4.14 Stabilire se i seguenti insiemi sono aperti o chiusi:

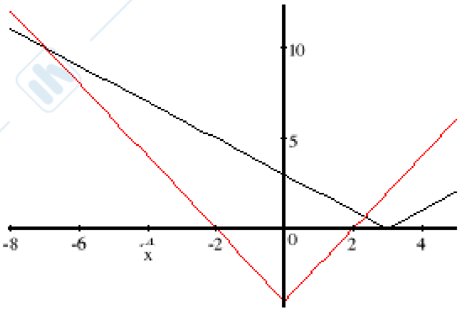
$$A = \{x \in \mathbf{R} : 1 \leq e^x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{R} : \log(x + 5) < 0\}$$

*Soluzione:* Poichè $e^x = 1$ per $x = 0$, $e^x = 2$ per $x = \log 2$ e la funzione esponenziale è strettamente crescente, $A = [0, \log 2]$ che è un insieme chiuso. La funzione $f(x) = \log(x + 5)$ è definita per $x > -5$ e $\log(x + 5) < 0$ per $x < -4$. Pertanto l'insieme $B$ è uguale a $(-5, -4)$ che è un aperto. $\square$

4.15 Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $|2x| - |x - 3| = 4$.

*Soluzione:* Nel grafico sono rappresentate in nero $f(x) = |x - 3|$ e in rosso $f(x) = |2x| - 4$. L'equazione data, equivalente a $|2x| - 4 = |x - 3|$, ammette due soluzioni.




□

4.19 Risolvere le seguenti equazioni:

i) $3|x+1| = 7$ vi) $|x^2 - 100| = 3x + 30$

*Soluzione:*

i) L'equazione data è equivalente a $x + 1 = \pm\frac{7}{3}$ e dunque ammette, come soluzioni, $x = -\frac{10}{3}$ e $x = \frac{4}{3}$.

vi) Dalla definizione di modulo, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
|x^2 - 100| &= \begin{cases} x^2 - 100\,, & \text{se } x^2 - 100 \geq 0 \\ 100 - x^2\,, & \text{se } x^2 - 100 < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x^2 - 100\,, & \text{se } x \leq -10 \text{ e } x \geq 10 \\ 100 - x^2\,, & \text{se } -10 < x < 10. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Per $x \in (-\infty, -10] \cup [10, +\infty)$, l'equazione data equivale a $x^2 - 100 = 3x + 30$, ovvero $x^2 - 3x - 130 = 0$, da cui si ricavano le soluzioni $x = -10$ e $x = 13$.

Per $x \in (-10, 10)$, l'equazione data equivale a $100 - x^2 = 3x + 30$, ovvero $x^2 + 3x - 70 = 0$, da cui $x = -10$ e $x = 7$.
Si conclude che la disequazione originaria è risolta per $x = -10$, $x = 7$ e $x = 13$.

□

4.20 Risolvere le seguenti disequazioni:

i) $|x+4| < 8$ iv) $\left|\frac{2x+1}{x^2-4}\right| \geq 1$

*Soluzione:*

i) La disequazione data è risolta se e solo se $-8 < x + 4 < 8$ ovvero $-12 < x < 4$.

iv) Il campo di esistenza è dato dalla condizione $x^2 - 4 \neq 0$ verificata per $x \neq \pm 2$. Le soluzioni sono date da

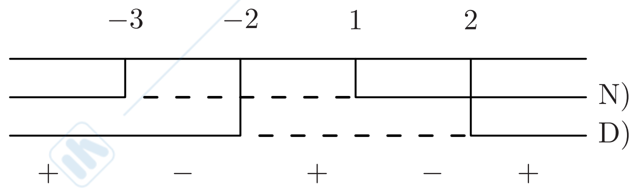
$$\left\{ x \in \mathbf{R} : \frac{2x+1}{x^2-4} \leq -1 \right\} \cup \left\{ x \in \mathbf{R} : \frac{2x+1}{x^2-4} \geq 1 \right\}.$$

Considerando il primo insieme,

$$\frac{2x+1}{x^2-4} \leq -1 \iff \frac{2x+1+x^2-4}{x^2-4} \leq 0 \iff \frac{x^2+2x-3}{x^2-4} \leq 0.$$

Il numeratore è positivo per $x \leq -3$ e $x \geq 1$.

Il denominatore è positivo per $x < -2$ e $x > 2$.
Riepilogando i segni di numeratore e denominatore, otteniamo:

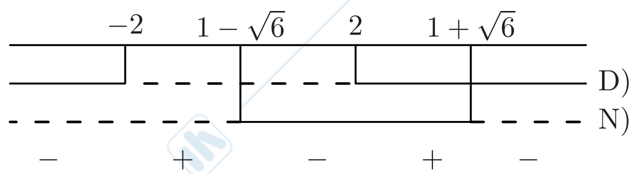



Il primo insieme è dato da $[-3, -2) \cup [1, 2)$.
Consideriamo ora il secondo insieme:

$$\frac{2x+1}{x^2-4} \geq 1 \iff \frac{2x+1-x^2+4}{x^2-4} \geq 0 \iff \frac{-x^2+2x+5}{x^2-4} \geq 0.$$

Il numeratore è positivo per $1 - \sqrt{6} \leq x \leq 1 + \sqrt{6}$.

Il denominatore è positivo per $x < -2$ e $x > 2$.
Riepilogando i segni di numeratore e denominatore, otteniamo:




Il secondo insieme è dato da $\left(-2, 1 - \sqrt{6}\right] \cup \left(2, 1 + \sqrt{6}\right]$. La disequazione data è risolta per

$$x \in [-3, -2) \cup \left(-2, 1 - \sqrt{6}\right] \cup [1, 2) \cup \left(2, 1 + \sqrt{6}\right].$$

□

4.21 Risolvere le seguenti disequazioni:

i) $\left|\frac{1}{2}x^2 + x - 4\right| > 2$

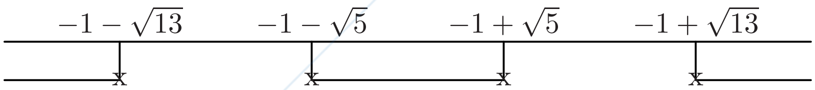
*Soluzione:*

i) Le soluzioni della disequazione sono date da:

$$\{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{2}x^2 + x - 4 < -2\} \ \cup \ \{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{2}x^2 + x - 4 > 2\}$$

$$\{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{2}x^2 + x - 2 < 0\} \ \cup \ \{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{2}x^2 + x - 6 > 0\}.$$

Il primo insieme equivale a $(-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5})$.
Il secondo insieme è dato da $(-\infty, -1-\sqrt{13}) \cup (-1+\sqrt{13}, +\infty)$.
Riepilogando su uno stesso grafico,




si conclude che la disequazione data è risolta per $x < -1-\sqrt{13}$, $-1-\sqrt{5} < x < -1+\sqrt{5}$ e $x > -1+\sqrt{13}$.

□

4.22 Risolvere le seguenti disequazioni:

i) $x + 3 > \sqrt{|x+1|}$

*Soluzione:*

i) Il campo di esistenza è $\mathbf{R}$ poichè il radicando non è mai negativo. Le soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ (x+3)^2 > x+1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x+1 < 0 \\ x+3 \geq 0 \\ (x+3)^2 > -x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3 \\ x^2 + 5x + 8 > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -3 \\ x^2 + 7x + 10 > 0 \end{cases}$$

Il primo sistema è risolto per $x \geq -1$.
Il secondo sistema è risolto per $-2 < x < -1$.
Infine, la disequazione data è risolta per $x > -2$.

□

4.23 Risolvere le seguenti disequazioni con modulo:

iv) $2e^x - e^{|x|} \leq 1$ v) $\log|x+3| - \log(x+1) \geq 0$

*Soluzione:*

iv) L'insieme delle soluzioni è dato dall'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2e^x - e^x \leq 1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x < 0 \\ 2e^x - e^{-x} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ e^x \leq 1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x < 0 \\ \frac{2e^{2x}-e^x-1}{e^x} \leq 0. \end{cases}$$

La disequazione data è vera per $x \leq 0$.

v) La disequazione è definita in $(-1, +\infty)$. In tale intervallo, grazie alla monotonia della curva logaritmica, equivale a $x + 3 \geq x + 1$, risolta per ogni $x$. Si conclude che l'insieme delle soluzioni è $(-1, +\infty)$.

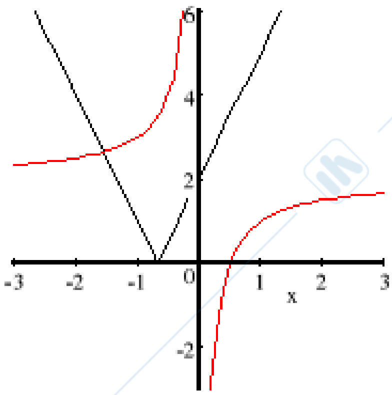
□

4.24 Risolvere graficamente le seguenti disequazioni:

ii) $\frac{1}{x} + |3x + 2| < 2$

*Soluzione:*

ii) Come si vede dal grafico, la funzione $f(x) = |3x + 2|$ (linea nera) incontra il grafico dell'iperbole equilatera di equazione $g(x) = 2 - \frac{1}{x}$ (linea rossa) in un punto $\alpha$, con $-2 < \alpha < -1$.




La disequazione è risolta per

$$\alpha < x < 0.$$

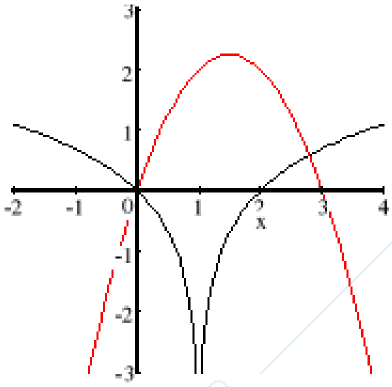
□

4.25 Risolvere graficamente le seguenti disequazioni:

ii) $x(x-3)+\log|x-1| \geq 0$

*Soluzione:*

ii) Come si vede dal grafico, la funzione $f(x) = \log|x-1|$ (linea nera) incontra il grafico della parabola di equazione $g(x) = -x^2+3x$ (linea rossa) nel punto $x = 0$ e nel punto $\alpha$, con $2 < \alpha < 3$.




La disequazione è risolta per

$x \leq 0$ e $x \geq \alpha$.

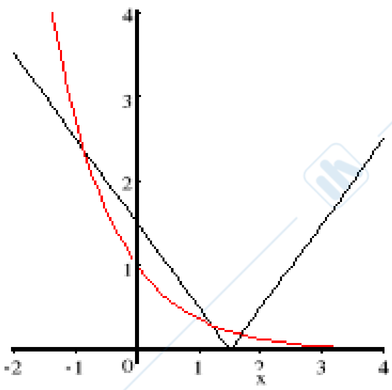
□

4.26 Risolvere graficamente le seguenti disequazioni:

ii) $e^x \left|x - \frac{3}{2}\right| > 1$

*Soluzione:*

ii) Come si vede dal grafico, la funzione $f(x) = \left|x - \frac{3}{2}\right|$ (linea nera) incontra il grafico della funzione $g(x) = e^{-x}$ (linea rossa) in tre punti, $\alpha, \beta$ e $\gamma$, con $-2 < \alpha < -1$ e $1 < \beta < \gamma < 2$.




La disequazione è risolta per

$\alpha < x < \beta$ e $x > \gamma$.

□

## 5. Una parentesi discreta

5.3 Stabilire se i seguenti insiemi sono finiti, infiniti numerabili o infiniti con la potenza del continuo: $A = \left\{\frac{2n-1}{n}, n \geq 7\right\}$, $B = \left\{\frac{n-1}{2n}, 0 < n \leq 5\right\}$.

*Soluzione:* L'insieme $A$, formato dagli elementi $\left\{\frac{13}{7}, \frac{15}{8}, \frac{17}{9}, \ldots\right\}$ è infinito numerabile. L'insieme $B$ è finito. Esso contiene gli elementi $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}\right\}$.

□

5.6 Per ognuna delle seguenti successioni, esprimere $s_n$ in funzione di $n$:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} s_0 = 2 \\ s_n = s_{n-1} + 5 \end{cases} \qquad \text{iii)} \quad \begin{cases} s_0 = 2 \\ s_n = 5s_{n-1} \end{cases}$$

*Soluzione:*

i) Si ha:

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 + 5 \\ s_2 &= 2 + 5 + 5 = 2 + 5 \cdot 2 \\ s_3 &= 2 + 5 + 5 + 5 = 2 + 5 \cdot 3 \\ &\ldots \\ s_n &= 2 + 5n \end{aligned}$$

iii) Si ha:

$$\begin{aligned} s_1 &= 5 \cdot 2 \\ s_2 &= 5 \cdot 5 \cdot 2 \\ s_3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \\ &\ldots \\ s_n &= 2 \cdot 5^n \end{aligned}$$

□

5.7 Data la successione

$$\begin{cases} s_0 = 4 \\ s_{n+1} = \frac{s_n + 4}{s_n + 1} \end{cases}$$

calcolare $s_1, s_2, s_3$. Esprimere $s_{n+2}$ in funzione di $s_n$.

*Soluzione:* Si ha:

$$s_1 = \frac{s_0 + 4}{s_0 + 1} = \frac{4 + 4}{4 + 1} = \frac{8}{5};$$

$$s_2 = \frac{s_1 + 4}{s_1 + 1} = \frac{\frac{8}{5} + 4}{\frac{8}{5} + 1} = \frac{\frac{28}{5}}{\frac{13}{5}} = \frac{28}{13};$$

$$s_3 = \frac{s_2 + 4}{s_2 + 1} = \frac{\frac{28}{13} + 4}{\frac{28}{13} + 1} = \frac{\frac{28+52}{13}}{\frac{41}{13}} = \frac{80}{13} \cdot \frac{13}{41} = \frac{80}{41}.$$

Infine:

$$s_{n+2} = \frac{s_{n+1} + 4}{s_{n+1} + 1};$$

$$s_{n+2} = \frac{s_{n+1} + 4}{s_{n+1} + 1} = \frac{\frac{s_n+4}{s_n+1} + 4}{\frac{s_n+4}{s_n+1} + 1} = \frac{\frac{s_n+4+4s_n+4}{s_n+1}}{\frac{s_n+4+s_n+1}{s_n+1}} = \frac{5s_n + 8}{2s_n + 5}.$$

□

5.10 Per ognuna delle seguenti successioni, dire se è limitata o illimitata, crescente o decrescente:

$$\text{i)} \quad \{s_n\} = \left\{\log\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)\right\} \qquad \text{ii)} \quad \{s_n\} = \left\{e^{-1+\frac{1}{n}}\right\}$$

*Soluzione:*

i) I primi termini della successione sono:

$s_1 = \log 2$

$s_2 = \log \frac{3}{2}$

$s_3 = \log \frac{4}{3}$

$s_4 = \log \frac{5}{4}$

$\dots \; \dots.$

La successione assume valori sempre più piccoli (ricordando il grafico della funzione $f(x) = \log x$, con $x \in \mathbf{R}$). Si conclude che la successione è limitata sia inferiormente (da $\log 1 = 0$) sia superiormente e decrescente.

ii) I primi termini della successione sono:

$s_1 = 1$

$s_2 = e^{-\frac{1}{2}}$

$s_3 = e^{-\frac{2}{3}}$

$s_4 = e^{-\frac{3}{4}}$

$\dots \; \dots.$

La successione è limitata, poichè non assume valori più grandi di 1 e più piccoli di 0 ed è decrescente (strettamente).

□

5.12 Calcolare $D_{4,2} + P_3 + C'_{7,3}$.

*Soluzione:*

$$\begin{aligned} D_{4,2} + P_3 + C'_{7,3} &= 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + \binom{7+3-1}{3} \\ &= 12 + 6 + \frac{9!}{3!6!} = 18 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 18 + 84 = 102. \end{aligned}$$

□

5.16 Risolvere, per $n \in \mathbf{N}$, l'equazione $D_{n,1} + D_{n,3} - D_{n+1,3} + 55 = 0$.

*Soluzione:* Si ha:

$$\begin{aligned} D_{n,1} + D_{n,3} - D_{n+1,3} + 55 &= n + n(n-1)(n-2) - (n+1)n(n-1) + 55 \\ &= n + (n^2 - n)(n-2) - (n^2 + n)(n-1) + 55 \\ &= n + n^3 - 3n^2 + 2n - n^3 + n + 55 \\ &= -3n^2 + 4n + 55 = 0. \end{aligned}$$

Calcoliamo il discriminante di $-3x^2 + 4x + 55 = 0$ con $x \in \mathbf{R}$, ovvero $\Delta = 4 + 165 = 169$ e le radici $x_{1,2} = \frac{-2 \pm 13}{-3}$ e concludiamo che la soluzione è $n = 5$.

□

5.21 Verificare che $n = 3$ è soluzione dell'equazione $C_{n,2} + 3C_{n,3} = 2C_{n,1}$.

*Soluzione:* Sostituendo $n = 3$, si ha:

$$\begin{aligned} C_{n,2} + 3C_{n,3} - 2C_{n,1} &= C_{3,2} + 3C_{3,3} - 2C_{3,1} \\ &= \frac{3!}{2!} + 3\frac{3!}{3!} - 2\frac{3!}{2!} = 3 + 3 - 6 = 0. \end{aligned}$$

□

5.28 Gli abitanti di una città crescono ogni anno del 3%. Nel 2007 la popolazione era di 35.000 abitanti. Calcolare il numero di abitanti previsto per il 2010.

*Soluzione:* Il numero di abitanti previsto per il 2008 è $35.000\,(1 + 0,03)$, nel 2009 è $35.000\,(1 + 0,03)\,(1 + 0,03)$ mentre nel 2010 è $35.000\,(1 + 0,03)^3 = 38.245$ circa. □

5.30 Calcolare il numero di possibili anagrammi della parola "numero".

*Soluzione:*

$$P_6 = 6! = 720.$$

□

5.33 Calcolare il numero di possibili anagrammi della parola “topologia”.

*Soluzione:*

$$P'_{1,3,1,1,1,1,1} = \frac{9!}{3!} = 60.480.$$

□

5.35 Calcolare quanti sono i numeri di quattro cifre, tutte fra loro diverse, divisibili per cinque.

*Soluzione:* Un numero è divisibile per cinque se l'ultima cifra, quella delle unità, è zero oppure cinque. Distinguiamo i due casi: ultima cifra zero e ultima cifra cinque. Se l'ultima cifra è zero, la prima la posso scegliere in 9 modi diversi, la seconda in 8 e la terza in 7; dunque i numeri di quattro cifre tra loro diverse che terminano con zero sono:

$$D_{9,3} = 9 \times 8 \times 7 = 504.$$

Se l'ultima cifra è cinque, allora la prima cifra la posso scegliere in 8 modi diversi (non posso considerare lo zero, altrimenti non avrei più un numero di quattro cifre), la seconda in 8 modi diversi e infine la terza in 7; dunque i numeri di quattro cifre diverse che terminano con cinque sono:

$$D_{8,1} \cdot D_{8,2} = 8 \times 8 \times 7 = 448.$$

Sommando, si ottiene il numero cercato: $504 + 448 = 952$. □

5.41 Stabilire quanti sono i numeri composti da 3 cifre distinte e ordinate per valori decrescenti.

*Soluzione:* I numeri formati da 3 cifre distinte sono tanti quante le disposizioni semplici di 10 oggetti (le cifre da 0 a 9) di classe 3: $D_{10,3} = 720$, se si considerano anche gli allineamenti la cui prima cifra è 0.
Se tutti questi numeri vengono suddivisi in gruppi di 3! elementi, in modo che ad ogni gruppo appartengano tutti e soli i numeri composti dalle stesse cifre, si vede che in ogni raggruppamento c'è solo un numero che soddisfa la condizione che le cifre siano ordinate per valori decrescenti. Il numero cercato è pertanto $\frac{D_{10,3}}{3!} = C_{10,3} = 120$. □

5.43 Determinare il numero di possibili applicazioni da un insieme $A$ composto di 4 elementi, in un insieme $B$ costituito da 5 elementi.

*Soluzione:* Si tratta delle disposizioni con ripetizione $D'_{5,4} = 5^4 = 625$. □

5.47 Dati 12 punti di un piano, tre dei quali non risultano mai allineati, calcolare quante rette si possono tracciare congiungendo i punti a due a due.

*Soluzione:* Sono le combinazioni semplici $C_{12,2} = \binom{12}{2} = 66$. □



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

5.53 Calcolare quante parole di 4 lettere (anche prive di significato) si possono costruire con le 21 lettere dell'alfabeto senza doppie, ovvero senza che due lettere uguali siano consecutive.

*Soluzione:* $21 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 168.000$. □

5.58 Mauro ha 15 libri di Analisi, 15 di Geometria e 6 di storia della Matematica. Calcolare in quanti modi può allinearli su uno scaffale, in modo che i libri di uno stesso argomento siano vicini.

*Soluzione:* I 15 libri di Analisi possono essere ordinati in 15! modi diversi, quelli di Geometria in 15! modi e quelli di storia della Matematica in 6! modi. Infine Mauro deve decidere come ordinare i tre gruppi (per esempio, prima Analisi; poi Geometria e infine storia della Matematica) e lo può fare in 3! modi. In totale Mauro può disporre i suoi libri in $P_{15}P_{15}P_6P_3 = 15!15!6!3!$ modi diversi. □

5.65 Scegliendo a caso un numero intero compreso tra 4 e 20 (4 e 20 esclusi), calcolare la probabilità che sia un numero divisibile per 2 o per 3.

*Soluzione:* Tra 4 e 20 (4 e 20 esclusi) ci sono 15 numeri. Quelli che non sono divisibili nè per due nè per tre sono : $5, 7, 11, 13, 17, 19$ ovvero 6 numeri. La probabilità cercata è:

$$\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

□

5.67 Su un campione di 30 persone, qual è la probabilità che non vi siano persone nate nello stesso giorno dell'anno (supponendo un anno sempre formato da 365 giorni)?

*Soluzione:* Le possibili date di nascita sono tante quante le disposizioni (con ripetizione) di 30 oggetti scelti tra 365. I casi favorevoli sono quelli in cui non ci sono persone nate nello stesso giorno e pertanto sono tanti quanti le disposizioni precedenti, considerate però senza ripetizioni. La probabilità richiesta è:

$$p = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 336}{(365)^{30}}.$$

□

5.70 Calcolare la probabilità che, lanciando due dadi (non truccati),

i) la somma delle facce sia 2;

ii) la somma delle facce sia 3.

*Soluzione:*

i) La somma delle facce è due solo se esce 1 e 1. La probabilità che per il primo dado esca 1 è $\frac{1}{6}$. Moltiplicandola per la probabilità che anche per il secondo dado esca 1, si ha $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

ii) Si ottiene 3 come $2+1$ oppure $1+2$. In entrambi i casi, la probabilità è $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Dunque la probabilità cercata è $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$.

□

## 6. La definizione di limite

6.1 Calcolare, se esiste, il limite di $s_n = (-1)^n$, per $n \to +\infty$.

*Soluzione:* Il limite di $s_n$ per $n \to +\infty$ non esiste. Infatti, se consideriamo $n$ pari, la corrispondente successione delle immagini è costante e vale 1, mentre per $n$ dispari vale $-1$. I due comportamenti diversi per $n \to +\infty$ della funzione permettono di concludere che il limite non esiste. □

6.4 Calcolare, se esiste, il limite per $x \to +\infty$ di:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } \; x \in \mathbf{Q} \\ 2, & \text{se } \; x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

*Soluzione:* Il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ non esiste. Per esempio, per $s_n = n, \; n \in \mathbf{N}$, la corrispondente successione delle immagini tende a $-\infty$, mentre per $s_n = n\pi, \; n \in \mathbf{N}$, tende a 2. □

6.6 Calcolare, utilizzando il teorema del confronto, $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n+\cos n}{n^2-1}\right|$.

*Soluzione:* Vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$0 \leq \left|\frac{n+\cos n}{n^2-1}\right| \leq \left|\frac{n+1}{n^2-1}\right| = \frac{1}{n-1}.$$

Osservando che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, si conclude che anche il limite proposto è uguale a zero. □

6.7 Calcolare, utilizzando il teorema del confronto, $\lim_{x\to 0} 2x\left(3+\cos^2\frac{1}{x}\right)$.

*Soluzione:* Poichè i valori della funzione coseno sono compresi fra $-1$ e 1, abbiamo: $0 \leq \cos^2\frac{1}{x} \leq 1$. In particolare, valgono le seguenti disuguaglianze:

$$6x \leq 2x\left(3+\cos^2\frac{1}{x}\right) \leq 8x,$$

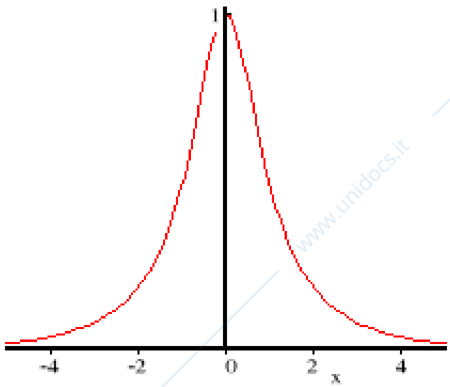
e poichè le funzioni $y = 6x$ e $y = 8x$ tendono a 0 per $x \to 0$, si ha:

$$\lim_{x\to 0} 2x\left(3+\cos^2\frac{1}{x}\right) = 0.$$

□

6.11 Dare un esempio di funzione sempre positiva ma il cui limite, per $x \to \pm\infty$, non è positivo.

*Soluzione:* Per esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, definita su tutto l'asse reale, è sempre positiva poichè rapporto di quantità sempre strettamente maggiori di zero, ma il suo limite, per $x \to \pm\infty$, è zero.




□

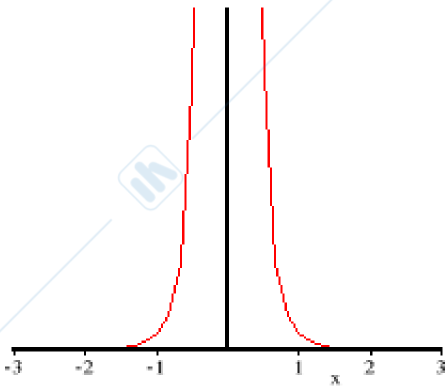
6.14 Individuare il comportamento di $f(x) = \frac{1}{x^4}$ per $x \to -\infty$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$, precisando se ci sono asintoti verticali e orizzontali.

*Soluzione:* Come si vede dal grafico, si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty.$$

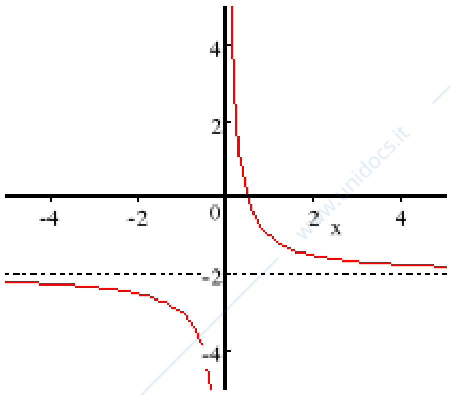
La retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, mentre la retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^\pm$.




□

6.17 Individuare eventuali asintoti verticali e orizzontali di $f(x) = \frac{1-2x}{x}$.

*Soluzione:* Si tratta di un'iperbole equilatera il cui centro di simmetria è $(0, -2)$. Come si vede dal grafico, la retta di equazione $y = -2$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, mentre la retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^{\pm}$.

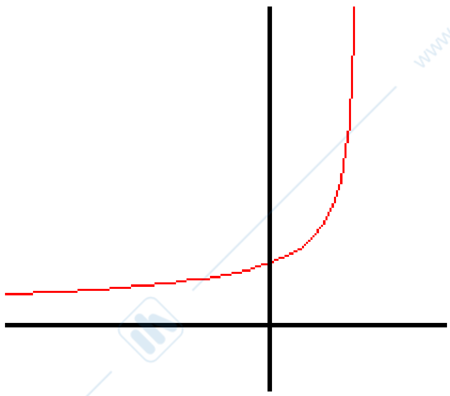



□

6.20 Individuare eventuali asintoti verticali e orizzontali di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

*Soluzione:* La funzione data è definita per $x < 1$. Si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0^+, \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty.$$

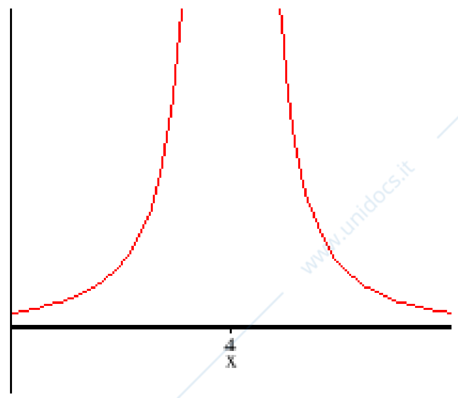


La retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$; la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale per $x \to 1^-$. □

6.24 Scrivere l'espressione analitica di una funzione per cui $x = 4$ sia asintoto verticale per $x \to 4^-$ e per $x \to 4^+$.

*Soluzione:* Può essere, ad esempio, $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$. La funzione $f(x)$ non è definita per $x = 4$. Si ha:

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2} = \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$$




$\square$

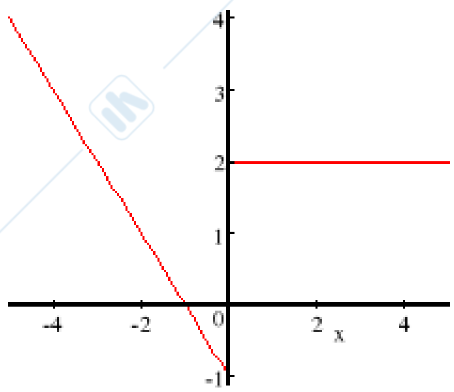
## 7. Le funzioni continue e il calcolo dei limiti

7.1 Precisare la natura dei punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -x-1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

*Soluzione:*

i) Dal grafico si vede che il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie. Infatti, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.



ii) La funzione ha in $x = 1$ una discontinuità eliminabile, infatti si ha: $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ mentre $f(1) = 0$.

$\square$

7.5 Determinare, se esistono, i valori dei parametri $a, b \in \mathbf{R}$ per cui la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + b, & \text{se } x \leq 1 \\ \log_2(x+7), & \text{se } 1 < x < 2 \\ x + 2a, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

sia continua in $\mathbf{R}$.

*Soluzione:* La funzione $f(x)$ è continua in ogni punto di $\mathbf{R}$, ad eccezione di $x = 1$ e $x = 2$, per ogni $a, b \in \mathbf{R}$. Perchè la funzione sia continua in $x = 1$, bisogna imporre la condizione:

$$\lim_{x\to 1^-} (ax^2 + x + b) = \lim_{x\to 1^+} \log_2(x+7)$$

ovvero: $a + b + 1 = \log_2 8 \iff a + b = 2$.
Perchè la funzione $f(x)$ sia continua in $x = 2$, occorre imporre la condizione:

$$\lim_{x\to 2^-} \log_2(x+7) = \lim_{x\to 2^+} (x + 2a)$$

ovvero: $2\log_2 3 = 2 + 2a \iff \log_2 3 = 1 + a$.
I parametri cercati sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ \log_2 3 = 1 + a \end{cases}$$

risolto per $a = \log_2 3 - 1$ e $b = 2 - \log_2 3 + 1 = 3 - \log_2 3$. $\square$

7.8 Determinare i parametri reali $a_n$ e $b_n$ $(n \in \mathbf{N} \setminus \{0\})$ per cui la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -n \\ a_n + b_n x, & \text{se } -n < x \leq n \\ 1, & \text{se } x > n \end{cases}$$

sia continua in $\mathbf{R}$.

*Soluzione:* Si ha:

$$f(-n) = 0, \quad \lim_{x\to -n^+} f(x) = a_n - nb_n$$

$$f(n) = a_n + nb_n \quad \lim_{x\to n^+} f(x) = 1.$$

I parametri cercati risolvono il sistema:

$$\begin{cases} a_n - nb_n = 0 \\ a_n + nb_n = 1 \end{cases}$$

soddisfatto per $a_n = \frac{1}{2}$ e $b_n = \frac{1}{2n}$. $\square$

7.12 Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbf{R}$, la funzione:

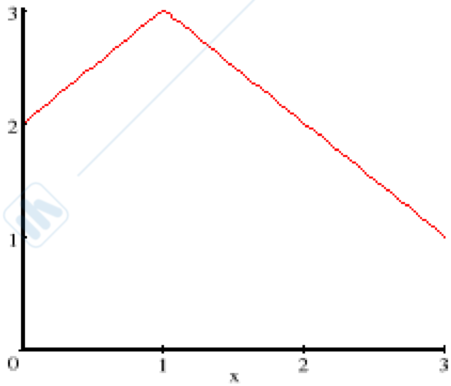
$$f(x) = \begin{cases} x + a, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x, & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[0, 3]$. Determinare poi il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione.

*Soluzione:* Perchè siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass, si deve imporre la continuità della funzione in $[0, 3]$ ovvero:

$$\lim_{x \to 1^-} (x + a) = \lim_{x \to 1^+} (4 - x)$$

che porta a $1 + a = 3 \iff a = 2$. Per $a = 2$, il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza del valore massimo e del valore minimo. La funzione è rappresentata da:




e come si può vedere il suo valore massimo è 3 (assunto per $x = 1$) mentre il suo valore minimo è 1, assunto per $x = 3$. $\square$

7.14 Data la funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, stabilire se soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri nell'intervallo $[-3, 3]$ e, in caso affermativo, stabilire quali sono gli zeri della funzione nell'intervallo considerato.

*Soluzione:* La funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-3, 3]$. Inoltre:

$$f(-3) = -27 + 18 + 3 - 2 = -8$$
$$f(3) = 27 + 18 - 3 - 2 = 40.$$

Le ipotesi del teorema degli zeri sono soddisfatte. Dunque, esiste almeno un punto $c \in (-3, 3)$ tale che $f(c) = 0$. Si ha:

$$\begin{aligned} f(c) = 0 &\iff c^3 + 2c^2 - c - 2 = 0 \\ &\iff c^2(c + 2) - (c + 2) = 0 \\ &\iff (c + 2)(c^2 - 1) = 0 \\ &\iff c_1 = -2,\ c_2 = -1,\ c_3 = 1. \end{aligned}$$

Nell'intervallo considerato la funzione data ha tre zeri. □

7.15 Calcolare i seguenti limiti di successione:

iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2-n)(n-3)}{n^2+1}$ iv) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+e^n)}{n}$

v) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3-n+3}{4n^3-5n}$ vi) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{n}{n+5}$

*Soluzione:*

iii) Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2-n)(n-3)}{n^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-n^2+5n-6}{n^2+1} = -1.$$

iv) Sostituendo si incontra la forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$. Trascurando gli infiniti di ordine inferiore, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+e^n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(e^n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

v) Sostituendo si incontra la forma di indecisione $\infty - \infty$. Poichè al numeratore e denominatore si ha una somma di infiniti, si trascurano gli ordini inferiori e si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3-n+3}{4n^3-5n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{4n^3} = \frac{1}{2}.$$

vi) Poichè $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$. Inoltre:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Si conclude che $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{n}{n+5} = 1$.

□

7.16 Calcolare i seguenti limiti di successione:

i) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+3} - n\right)$ iv) $\lim_{n\to+\infty} \log_5 \sqrt{\frac{2n^2+7}{50n^2+1}}$

*Soluzione:*

i) Sostituendo si arriva alla forma di indecisione $+\infty - \infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+3} - n\right) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+3} - n\right) \frac{\left(\sqrt{n^2+4n+3}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+4n+3}+n\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4n+3-n^2}{\left(\sqrt{n^2+4n+3}+n\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{2n} = 2
\end{aligned}$$

iv) Sostituendo si arriva alla forma di indecisione $\infty/\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \log_5 \sqrt{\frac{2n^2+7}{50n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \log_5 \sqrt{\frac{2n^2}{50n^2}} = \log_5 \frac{1}{25} = -2$$

□

7.17 Sia $s_n = \frac{n!}{n^2}$. Calcolare il limite della successione $\frac{s_{n+1}}{s_n}$.

*Soluzione:* Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = \infty.$$

□

7.19 Calcolare i seguenti limiti:

iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$ vii) $\lim_{x\to1} (2+x)^{3x}$

*Soluzione:*

iii) Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

vii) Sostituendo, si ha: $\lim_{x\to1} (2+x)^{3x} = 3^3 = 27$

□

7.20 Calcolare i seguenti limiti:

iii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{8x+36^x}{2x-\log|x|}$ vi) $\lim_{x\to+\infty} \log(x^3-3x^2)$

*Soluzione:*

iii) Sostituendo si ha la forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$. Trascurando a numeratore e denominatore gli infiniti di ordine inferiore, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x+36^x}{2x-\log|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{2x} = 4.$$

vi) Sostituendo si incontra la forma di indecisione $\infty - \infty$. Nelle somme di infiniti si trascurano gli ordini inferiori, ovvero: $\lim_{x\to+\infty} \log(x^3 - 3x^2) = \lim_{x\to+\infty} \log(x^3) = +\infty$.

$\square$

7.21 Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to+\infty} (\log_3(x+1) - \log_3(x+5))$

ii) $\lim_{x\to+\infty} (\log_7(x+3) - \log_7(7x+10))$

*Soluzione:*

i) Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} (\log_3(x+1) - \log_3(x+5)) = \lim_{x\to+\infty} \log_3 \frac{x+1}{x+5} = 0$$

ii) Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} (\log_7(x+3) - \log_7(7x+10)) = \lim_{x\to+\infty} \log_7 \frac{x+3}{7x+10} = \log_7 \frac{1}{7} = -1.$$

$\square$

7.22 Calcolare i seguenti limiti:

ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{2x+1+\sqrt{x^2+x-1}}$

*Soluzione:*

ii) Sostituendo, si arriva alla forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{2x+1+\sqrt{x^2+x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+x} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

7.23 Calcolare i seguenti limiti:

ii) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-x}\right)$

*Soluzione:*

ii) Sostituendo si arriva alla forma di indecisione $\infty - \infty$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-x}\right)\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2+x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x-x} = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

□

7.24 Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0}\left(x+1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$.

*Soluzione:* Poichè $\sqrt{x^2} = |x|$ è opportuno distinguere due casi:

- $\lim_{x\to 0^+} x+1+\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 2$.
- $\lim_{x\to 0^-} x+1+\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 0$.

Si conclude che il limite $\lim_{x\to 0}\left(x+1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$ non esiste. □

7.25 Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

*Soluzione:*

i) Sostituendo, si arriva alla forma di indecisione $0/0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-3} = -3
\end{aligned}$$

□

7.26 Calcolare l'ordine di infinito di $f(x) = 2x^4 + x^3 + x$ per $x \to +\infty$ (rispetto a $g(x) = x$).

*Soluzione:* Si tratta di calcolare per quale valore di $a \in \mathbf{R}$, il limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x^3+x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^a}$$

risulta finito e diverso da 0. L'ordine di infinito è 4. □

7.27 Calcolare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$ (rispetto a $g(x) = x$), delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = 2x^4 + x^3 + x$

*Soluzione:*

i) Si tratta di calcolare per quale valore di $a \in \mathbf{R}$, il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^4 + x^3 + x}{x^a} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^a}$$

risulta finito e diverso da 0. L'ordine di infinitesimo è 1.

□

7.28 Calcolare l'ordine di infinitesimo, per $x \to +\infty$ (rispetto a $g(x) = \frac{1}{x}$) delle seguenti funzioni:

iii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$

*Soluzione:*

iii) Si tratta di calcolare per quale valore di $a \in \mathbf{R}$, il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{3x-2}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^a},$$

risulta finito e diverso da 0. Per $a = \frac{1}{2}$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{3x-2}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x-2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

L'ordine di infinitesimo è $\frac{1}{2}$.

□

7.32 Confrontare con $x^2$ le seguenti funzioni inifinitesime per $x \to 0$:

i) $y = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ ii) $y = x^2 \cos \frac{1}{x}$

*Soluzione:*

i) $y = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ è infinitesimo per $x \to 0$, pur non esistendo il limite di $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$; infatti da

$$\left| x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x^3| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \le |x^3|$$

segue, per il teorema del confronto, che $\lim_{x\to 0} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ esiste e vale 0. Poichè, analogamente, si prova che $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x^2} = 0$, risulta che la funzione data è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $y = x^2$.

ii) $y = x^2 \cos \frac{1}{x}$ è per $x \to 0$ un infinitesimo non confrontabile con $y = x^2$, in quanto $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ non esiste.

$\square$

7.35 Stabilire se la relazione $f = o(g)$, per $x \to +\infty$, è vera essendo $f(x) = x^3 + 2x^2 + 7$ e $g(x) = x^3 + 1$.

*Soluzione:* Poichè $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2+7}{x^3+1} = 7$ si conclude che la relazione $f = o(g)$ non è vera. $\square$

7.39 Determinare, se esistono, gli asintoti obliqui delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ ii) $f(x) = \log(e^{2x} - 2e^x + 2)$

*Soluzione:*

i) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ è una funzione pari, definita in $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Consideriamo il comportamento della funzione per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$$

Dunque, è possibile che esista asintoto obliquo. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) \frac{(\sqrt{x^2-1} + x)}{(\sqrt{x^2-1} + x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{x^2-1} + x} = 0.
\end{aligned}$$

Si conclude che la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Data la simmetria rispetto all'asse delle ordinate, la retta $y = -x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

ii) La funzione data è definita per $e^{2x} - 2e^x + 3 > 1$ ovvero quando $e^{2x} - 2e^x + 2 > 0$ soddisfatta per ogni $x \in \mathbf{R}$. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \log(e^{2x} - 2e^x + 3) = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty.$$

La funzione potrebbe dunque avere un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^{2x} - 2e^x + 3)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2 \qquad \text{e}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[\log(e^{2x}-2e^x+3)-2x\right] &= \lim_{x\to+\infty}\log(e^{2x}-2e^x+3)-\log e^{2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\log\frac{e^{2x}-2e^x+3}{e^{2x}}\\ &= \log 1 = 0.\end{aligned}$$

Si deduce che la retta di equazione $y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Indaghiamo ora il comportamento della funzione per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\log(e^{2x}-2e^x+3) = \log 3.$$

Non esiste asintoto obliquo per $x \to -\infty$, ma la funzione ammette asintoto orizzontale di equazione $y = \log 3$.

□

7.43 Determinare, se esistono, gli asintoti delle seguenti funzioni:

ii) $f(x) = \frac{\log x}{\log x - 2}$ iii) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \log(x+1)$

*Soluzione:*

ii) Il campo di esistenza è determinato dalle condizioni:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

da cui segue che la funzione data è definita in $(0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{\log x - 2} = 1; \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\log x - 2} = 1;$$

$$\lim_{x\to e^{2-}}\frac{\log x}{\log x - 2} = -\infty; \qquad \lim_{x\to e^{2+}}\frac{\log x}{\log x - 2} = +\infty.$$

Si conclude che:
la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$;
la retta di equazione $x = e^2$ è asintoto verticale per $x \to e^2$.

iii) Il campo di esistenza è determinato dalla condizione $x + 1 > 0$, soddisfatta per $x > -1$. Dunque, la funzione data è definita in $(-1, +\infty)$. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to-1^+}\left[\sqrt[3]{x}+\log(x+1)\right] = -\infty$$

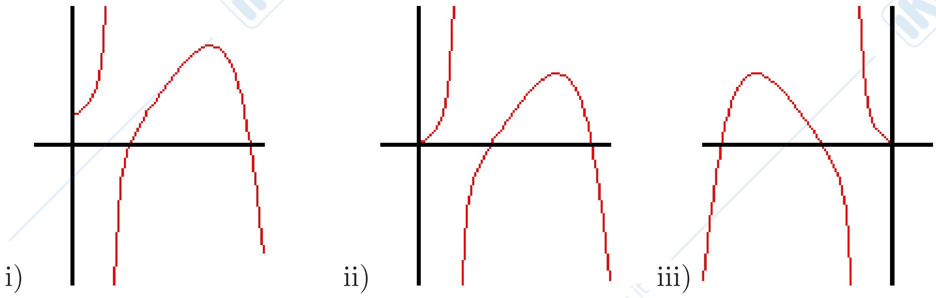
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x}+\log(x+1)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\log(x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = 0.$$

Si conclude che la retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale per $x \to -1^+$.

□

7.44 Il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3 - e^x}{3 \log x}$ è:




*Soluzione:* La funzione $f(x) = \frac{x^3 - e^x}{3 \log x}$ è definita in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, e questo permette di escludere il grafico iii). Calcolando i limiti agli estremi del dominio, in particolare:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - e^x}{3 \log x} = 0^+$$

si può escludere il grafico i). La risposta esatta è grafico ii). □

## 8. Le derivate

8.2 Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

ii) $f(x) = \sqrt[7]{x}(x-2)^{-2}$ iii) $f(x) = 27^x \cdot \log_3 x$

*Soluzione:*

ii) Il primo fattore, $\sqrt[7]{x}$ ha per derivata $\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$, mentre il secondo fattore ha per derivata $-2(x-2)^{-3} = -\frac{2}{(x-2)^3}$. Si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}(x-2)^{-2} - \frac{2\sqrt[7]{x}}{(x-2)^3} &= \frac{x - 2 - 14x}{7\sqrt[7]{x^6}(x-2)^3} \\ &= \frac{-13x - 2}{7\sqrt[7]{x^6}(x-2)^3}. \end{aligned}$$

iii) Si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 27^x \log 27 \log_3 x + 27^x \cdot \frac{1}{x \log 3} = 27^x \left[ 3 \log 3 \log_3 x + \frac{1}{x \log 3} \right] \\ &= 27^x \left[ 3 \log 3 \frac{\log x}{\log 3} + \frac{1}{x \log 3} \right] = 27^x \left[ \frac{3x \log 3 \log x + 1}{x \log 3} \right]. \end{aligned}$$

□

8.3 Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

iii) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+1}$ iv) $f(x) = \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

*Soluzione:*

iii) Si ha:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) - 2x(1+\sqrt{x})}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{x^2+1-4x\sqrt{x}-4x^2}{2\sqrt{x}}}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-3x^2 - 4x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}.$$

iv) Si ha:

$$f'(x) = \frac{\cos x(1+\cos x) + \operatorname{sen} x(1+\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos x + \operatorname{sen} x + 1}{(1+\cos x)^2}.$$

$\square$

8.5 Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

ii) $f(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{(x+1)^3}$

v) $f(x) = \operatorname{sen} x e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ vi) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

*Soluzione:*

ii) Si ha:

$$f'(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x+1)^3 - 3(x+1)^2(1+\sqrt{x})^2}{(x+1)^6}$$
$$= \frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x+1) - 3(1+\sqrt{x})^2}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x + 1 - 3\sqrt{x}(1+2\sqrt{x}+x)}{\sqrt{x}(x+1)^4}$$
$$= \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x + 1 - 3\sqrt{x} - 6x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)^4}$$
$$= \frac{1 - 5x - 2\sqrt{x}(1+x)}{\sqrt{x}(x+1)^4}.$$

v) Si ha:

$$f'(x) = \cos x e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} + \operatorname{sen} x e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \left(-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \left(\cos x - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$$
$$= e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \left(\cos x - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right).$$

vi) La derivata del denominatore è: $-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. Si ha:

$$f'(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}xe^{\frac{1}{x}}}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{x + xe^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

□

8.6 Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$

*Soluzione:*

i) Da $f(x) = e^{\operatorname{sen} x \log x}$, si ha:

$$f'(x) = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \log x + \frac{1}{x}\operatorname{sen} x\right)$$
$$= x^{\operatorname{sen} x - 1}(x \cos x \log x + \operatorname{sen} x).$$

□

8.7 Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

iii) $f(x) = \left|x^2 - x - 2\right| + |x|$ iv) $f(x) = \log\left|\frac{x^2-1}{x+2}\right|$

*Soluzione:*

iii) Per la definizione di modulo, si ha:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2, & \text{se } x \le -1 \\ -x^2 + 2, & \text{se } -1 < x < 0 \\ -x^2 + 2x + 2, & \text{se } 0 \le x < 2 \\ x^2 - 2, & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$$

e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{se } x < -1 \\ -2x, & \text{se } -1 < x < 0 \\ -2x + 2, & \text{se } 0 < x < 2 \\ 2x, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

iv) Consideriamo la derivata di $g(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$. Si ha:

$$g'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2-1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}.$$

La derivata richiesta è data da:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}}{\frac{x^2-1}{x+2}} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)(x^2-1)}.$$

□

8.11 Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = e^{-2x}$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

*Soluzione:* Per scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto considerato, dobbiamo calcolare:

- $f(0) = 1$;
- $f'(x) = -2e^{-2x}$ e dunque $f'(0) = -2$.

L'equazione della retta cercata è: $y = -2x + 1$. □

8.23 Determinare, se esistono, i valori dei parametri $a, b \in \mathbf{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{se } x \leq 0 \\ \left(\frac{1}{e}\right)^x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $\mathbf{R}$.

*Soluzione:* La funzione data è continua e derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ per qualsiasi valore di $a, b \in \mathbf{R}$. Perchè sia continua in $x = 0$ imponiamo la condizione:

$$\lim_{x \to 0^-} (ax + b) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{e}\right)^x$$

soddisfatta per $b = 1$. Calcoliamo ora la derivata prima della funzione $f$:

$$f'(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x < 0 \\ -\left(\frac{1}{e}\right)^x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Affinchè $f$ sia derivabile in $x = 0$ imponiamo la condizione:

$$\lim_{x \to 0^-} a = \lim_{x \to 0^+} -\left(\frac{1}{e}\right)^x$$

soddisfatta per $a = -1$.
Si conclude che per $a = -1$ e $b = 1$ la funzione data è continua e derivabile su tutto $\mathbf{R}$. □

8.27 Determinare, se esistono, i valori dei parametri $a, b \in \mathbf{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{se } \ x < 0 \\ \cos x, & \text{se } \ x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $\mathbf{R}$.

*Soluzione:* La funzione data è continua e derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ per qualsiasi valore di $a, b \in \mathbf{R}$. Perchè sia continua in $x = 0$ imponiamo la condizione:

$$\lim_{x \to 0^-} (ax^2 + b) = \lim_{x \to 0^+} \cos x$$

soddisfatta per $b = 1$. Calcoliamo ora la derivata prima della funzione $f$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax, & \text{se } \ x < 0 \\ -\operatorname{sen} x, & \text{se } \ x > 0 \end{cases}$$

Affinchè $f$ sia derivabile in $x = 0$, imponiamo la condizione:

$$\lim_{x \to 0^-} 2ax = \lim_{x \to 0^+} (-\operatorname{sen} x)$$

soddisfatta per ogni $a \in \mathbf{R}$.
Si conclude che la funzione data è continua e derivabile su $\mathbf{R}$ per $b = 1$ e per ogni $a \in \mathbf{R}$. $\square$

8.29 Calcolare l'elasticità delle seguenti funzioni, nei punti a fianco indicati:

i) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x)^2}$ $\qquad x = 1$

ii) $f(x) = x + \log x^3$ $\qquad x = 1$

iii) $f(x) = xe^{2x-1}$ $\qquad x = \frac{1}{2}$

*Soluzione:*

i) La derivata prima della funzione composta $f(x)$, in un generico punto $x$, è:

$$f'(x) = \frac{2(2x + 1)}{3\sqrt[3]{x^2 + x}}.$$

Nel punto $x = 1$, si ha: $f(1) = \sqrt[3]{4}$ e $f'(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$, da cui: $E[f(1)] = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 1$.

ii) Si ha:

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{x}; \qquad f(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad f'(1) = 4$$

da cui $E[f(1)] = 4$.

iii) Si ha:

$$f'(x) = e^{2x-1} + 2xe^{2x-1} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

da cui $E\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 2$.

□

## 9. Le derivate vengono usate per...

9.2 Stabilire se la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-2, 2]$. Calcolare poi un punto $c$ che soddisfa l'uguaglianza contenuta nella tesi del teorema.

*Soluzione:* La funzione data è continua in $[-2, 2]$, derivabile in $(-2, 2)$ e $f(-2) = f(2) = e^{-4}$. Le ipotesi del teorema di Rolle sono soddisfatte e dunque esiste almeno un punto $c \in (-2, 2)$ tale che $f'(c) = -2ce^{-c^2} = 0$, ovvero $c = 0$.

□

9.4 Stabilire se la funzione $f(x) = \log(1 + x^2)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2, 2]$. In caso affermativo, determinare il punto $c$ tale che $f'(c) = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$.

*Soluzione:* La funzione data è continua in $[-2, 2]$ e derivabile in $(-2, 2)$. Le ipotesi del teorema di Lagrange sono soddisfatte e dunque esiste un punto $c \in (-2, 2)$ tale che

$$f'(c) = \frac{2c}{1 + c^2} = \frac{\log 5 - \log 5}{4} = 0$$

Il punto cercato è $c = 0$.

□

9.5 Calcolare i seguenti limiti, applicando il teorema di De l'Hôpital:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{2\text{sen}\, x^2+3-3\cos x}{x^2}$     iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^3 x}{x\cos x - \text{sen}\, x}$

v) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$     vi) $\lim_{x\to 2}(3 - x)^{\frac{1}{2-x}}$

*Soluzione:*

i) Il limite presenta la forma di indecisione $0/0$. Applicando il teorema di De l'Hôpital, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{2\text{sen}\, x^2 + 3 - 3\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{4x\cos x^2 + 3\text{sen}\, x}{2x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4\cos x^2 - 8x^2\text{sen}\, x^2 + 3\cos x}{2} = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

iv) Il limite presenta la forma di indecisione $0/0$. Applicando il teorema di De L'Hôpital, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x\cos x-\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen}^2 x\cos x}{\cos x - x\operatorname{sen} x-\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen} x\cos x}{-x}=\frac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)}{-1}=-3\end{aligned}$$

v) Il limite da calcolare presenta la forma di indecisione $1^\infty$ ed è equivalente a: $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\log\cos x}$. Applicando il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1}=\lim_{x\to 0}-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=0$$

da cui il limite cercato è $e^0=1$.

vi) Il limite presenta la forma di indecisione $1^\infty$ ed è equivalente a:

$$\lim_{x\to 2} e^{\frac{\log(3-x)}{2-x}}$$

Applicando il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log(3-x)}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{-\frac{1}{3-x}}{-1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(3-x)}=1$$

Si conclude che $\lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{2-x}}=e$.

□

9.6 Scrivere lo sviluppo in formula di Taylor, arrestato al terzo ordine, con punto iniziale $x=2$, di $f(x)=5x^2+7x-2$.

*Soluzione:* La funzione data è un polinomio di secondo grado. Dunque, le derivate di ordine successivo al secondo sono tutte nulle. Segue che $P_3(x;2)=32+27(x-2)+5(x-2)^2$. □

9.10 Calcolare i seguenti limiti:

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x}$ iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$

*Soluzione:*

ii) Il limite presenta la forma di indecisione $0/0$. Sviluppando la funzione $\operatorname{sen} 3x$ e la funzione $\operatorname{sen} 4x$, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+o(3x)}{4x+o(4x)}=\frac{3}{4}$$

iii) Il limite presenta la forma di indecisione 0/0. Sviluppando la funzione $\cos^2 x$, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

□

9.11 Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to+\infty} x\left[e^{\frac{1}{x}}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]$

iii) $\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg} x}{x-\pi}$

*Soluzione:*

i) Il limite presenta la forma di indecisione $\infty\cdot 0$. Sviluppando le funzioni $e^{\frac{1}{x}}$ e $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ si ha:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} x\left[e^{\frac{1}{x}}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\\&=\lim_{x\to+\infty} x\left[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]\\&=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=0\end{aligned}$$

iii) Poniamo $t=x-\pi$ e osserviamo che per $x\to\pi$, si ha $t\to 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg} x}{x-\pi}&=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}=1\end{aligned}$$

□

9.12 Calcolare i seguenti limiti:

v) $\lim_{x\to 0}\frac{5x\operatorname{sen}(7x)+\cos(2x)-1}{x^2}$ vi) $\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{x}\log(1+\sqrt{x})}$

*Soluzione:*

v) Il limite presenta la forma di indecisione 0/0. Sviluppando $\operatorname{sen}(7x)$ e $\cos(2x)$, si ha:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{5x\operatorname{sen}(7x) + \cos(2x) - 1}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{5x(7x + o(x)) + (1 - 2x^2 + o(x^2)) - 1}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{35x^2 + 1 - 2x^2 - 1 + o(x^2)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{33x^2}{x^2} = 33
\end{aligned}$$

vi) Il limite presenta la forma di indecisione 0/0. Sviluppando $\sqrt{1+2x}$ e $\log(1+\sqrt{x})$, si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x - \sqrt{1+2x}}{\sqrt{x}\log(1+\sqrt{x})} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} + o(x)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x - (1 + x + o(x))}{x + o(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = 1
\end{aligned}$$

□

9.14 Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^{3x}$ vi) $\lim_{x\to +\infty} x^3 \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)$

*Soluzione:*

i) Il limite presenta la forma di indecisione $0 \cdot \infty$. Ricordando il limite notevole $\lim_{x\to -\infty} xe^x = 0$, si ha:

$$\lim_{x\to -\infty} x^2 e^{3x} = \lim_{x\to -\infty} (xe^x)^2 \cdot e^x = 0$$

vi) Il limite presenta la forma di indecisione $0 \cdot \infty$. Sviluppando la funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, si ha:

$$\lim_{x\to +\infty} x^3 \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} x^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{6}$$

□

9.15 Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ iv) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}\right)^{\log_3 e^{-x}}$

*Soluzione:*

i) Il limite presenta la forma di indecisione $0^0$. Si ha:

$$\lim_{x\to 0} e^{\log x^{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x \log x}$$

dove $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \log x = \lim_{x\to 0}(x+o(x))\log x = 0$. Dunque, si conclude che il limite cercato è $e^0 = 1$

iv) Il limite presenta la forma di indecione $1^\infty$ ed è equivalente a:

$$\lim_{x\to -\infty} e^{\log_3 e^{-x} \log \frac{x^2+2x+5}{x^2+1}}$$

Utilizzando le proprietà dei logaritmi e lo sviluppo della funzione logaritmo, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \log_3 e^{-x}\cdot \log\left(1+\frac{4+2x}{x^2+1}\right) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{\log 3}\cdot\frac{4+2x}{x^2+1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{x^2\log 3} = -\frac{2}{\log 3}\end{aligned}$$

Si conclude che $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}\right)^{\log_3 e^{-x}} = e^{-\frac{2}{\log 3}}$

□

9.17 Determinare i valori di $a \in \mathbf{R}$ per cui $\lim_{x\to+\infty} x^a\left(\frac{1}{x} - \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ esiste finito e non nullo.

*Soluzione:* Sviluppando $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^a\left(\frac{1}{x}-\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x^a\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x^a\left(\frac{1}{6x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6}x^{a-3}\end{aligned}$$

Segue che per $a = 3$ il limite esiste finito ed è pari a $\frac{1}{6}$ □

9.21 Determinare gli eventuali massimi e minimi della funzione $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 1$ nell'intervallo $[0, 2]$.

*Soluzione:* La funzione è derivabile ovunque e la ricerca dei suoi estremanti va condotta prendendo in considerazione i valori assunti agli estremi dell'intervallo in questione e i punti che annullano la derivata prima.
Nell'intervallo in questione, la derivata prima $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12 = 3(x-1)(x+4)$ si annulla in $x = 1$, è positiva in $(1, 2)$ mentre è negativa in $(0, 1)$. La funzione è dunque crescente nell'intervallo $(1, 2)$ mentre decresce nell'intervallo $(0, 1)$ e in particolare assume i valori:

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = 8+18-24+1 = 3 \qquad f(1) = 1+\frac{9}{2}-12+1 = -\frac{11}{2}$$

Si deduce che $x = 0$ è punto di massimo relativo, $x = 2$ è di massimo assoluto mentre $x = 1$ è di minimo assoluto. □

9.25 Determinare gli intervalli di crescita e decrescita della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 16}$$

*Soluzione:* La funzione è definita $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \neq \pm 4$. Calcoliamo la derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+3)(x^2-16) - 2x(x^2+3x+5)}{(x^2-16)^2} \\ &= \frac{-3x^2 - 42x - 48}{(x^2-16)^2} \end{aligned}$$

Il segno della derivata prima dipende da quello del numeratore:

$$-3x^2 - 42x - 48 \geq 0 \iff x^2 + 14x + 16 < 0$$

Si ha: $\Delta = 49 - 16 = 33 > 0$ e $x_{1,2} = -7 \pm \sqrt{33}$. La derivata prima si annulla in $x = 7 \pm \sqrt{33}$; dallo studio del segno di $f'$ segue che la funzione è crescente nell'intervallo $(-7-\sqrt{33}, -7+\sqrt{33})$, per $x \neq -4$ mentre è decrescente per $x < -7 - \sqrt{33}$ e per $x > -7 + \sqrt{33}$ con $x \neq 4$. □

9.27 Determinare gli intervalli di crescita e decrescita della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 9, & \text{se } \ x < 0 \\ 3\log_3(x+27), & \text{se } \ x \geq 0 \end{cases}$$

*Soluzione:* Per $x > 0$ la funzione è crescente (poichè composta tramite funzioni crescenti). Per $x < 0$, la derivata prima è: $f'(x) = 2x + 10$ ed è positiva per $x > -5$. Osserviamo che $f(0) = 9$ e $\lim_{x\to 0^-} x^2 + 10x + 9 = 9$. Dallo studio del segno di $f'$ segue che la funzione è crescente nell'intervallo $(-5, +\infty)$ mentre decresce nell'intervallo $(-\infty, -5)$. □

9.29 Determinare per quali valori del parametro reale $a$ la funzione $f(x) = ax^3 + 3x$ risulta crescente su tutto il dominio.

*Soluzione:* Calcoliamo la derivata prima: $f'(x) = 3ax^2 + 3$ e cerchiamo per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ è soddisfatta la disuguaglianza:

$$3ax^2 + 3 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Se $a \geq 0$ la derivata prima è sempre positiva e dunque la funzione è sempre crescente mentre se $a < 0$ la derivata prima è in parte positiva, in parte negativa. Si conclude che la richiesta è soddisfatta per $a \in [0, +\infty)$. □

9.32 Studiare l'andamento delle seguenti funzioni:

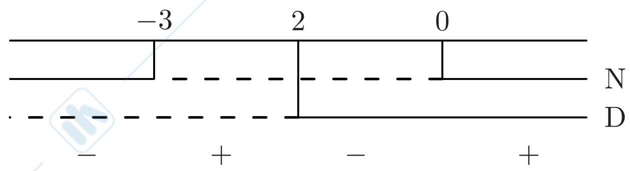
ii) $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+2}$

*Soluzione:*

ii) La funzione è definita $\forall x \in \mathbf{R},\ x \neq -2$.
Il grafico di $f$ interseca gli assi cartesiani solo nell'origine.
Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{x^2+3x}{x+2} \geq 0$$

Il numeratore $x(x+3) \geq 0 \iff x \leq -3$ e $x \geq 0$. Il denominatore $x+2 > 0 \iff x > -2$. Riepilogando i segni di numeratore e denominatore su uno stesso grafico:




si conclude che la funzione è positiva nell'intervallo $(-3, -2)$ e per $x > 0$.
I punti $x = -3$ e $x = 0$ sono le intersezioni con l'asse delle ascisse.
Poichè risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x}{x+2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to-2^{\mp}} \frac{x^2+3x}{x+2} = \pm\infty$$

possiamo concludere che la retta $x = -2$ è asintoto verticale e la funzione non ammette asintoti orizzontali. Per la ricerca di eventuali asintoti obliqui consideriamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x}{x(x+2)} = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+3x}{x+2} - x\right) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x-x^2-2x}{x+2} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+2} = 1\end{aligned}$$

$y = x + 1$ è dunque l'equazione dell'asintoto obliquo.

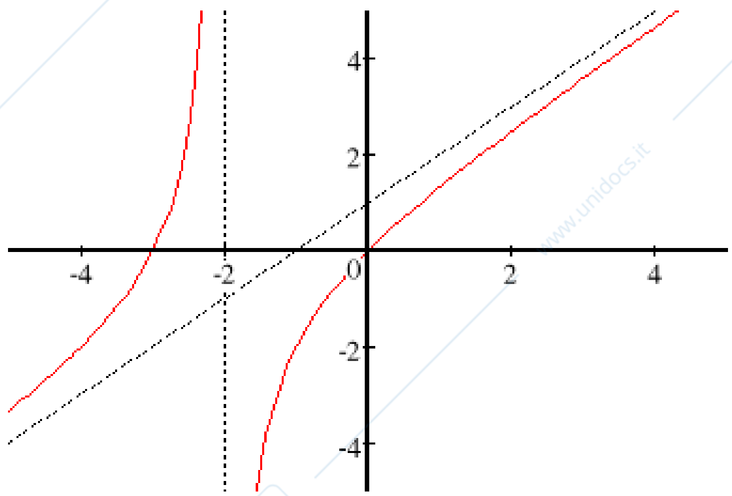
Calcoliamo la derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+3)(x+2) - x^2 - 3x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 3x + 6 - x^2 - 3x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 6}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

La funzione è sempre crescente e non ci sono estremanti.
Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2+4x+6)}{(x+2)^4} \\ &= -\frac{4}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

La derivata seconda non si annulla mai; dallo studio del segno di $f''$ segue che la funzione $f$ è convessa per $x < -2$ e concava per $x > -2$ (non esistono punti di flesso).
Un grafico qualitativo della funzione è:




□

9.33 Studiare l'andamento delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$

*Soluzione:*

i) La funzione è definita per $x \leq 0$ e $x \geq 2$.
Il suo grafico interseca gli assi cartesiani solo nell'origine.
Studiamo il segno della funzione:

$$x - \sqrt{x^2 - 2x} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 2x} \leq x$$

Per $x < 0$ la disequazione non è mai soddisfatta mentre per $x \geq 0$ è equivalente a $x^2 - 2x \leq x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 0$. Si conclude che la funzione è positiva per $x \geq 2$ e negativa per $x \leq 0$.
Per $x \to +\infty$ risulta:

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x^2 - 2x} &= x - \sqrt{x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = x - x\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= x - x\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - x + 1 + o(1) = 1 + o(1) \end{aligned}$$

Per $x \to -\infty$ risulta:

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x^2 - 2x} &= x - \sqrt{x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = x + x\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= x + x\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x + o(x) \end{aligned}$$

Possiamo concludere che la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e che $y = 2x - 1$ è l'equazione dell'asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x}}(2x - 2) = 1 - \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

La derivata prima è positiva quando

$$\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 2x}$$

Le soluzioni della disequazione sono date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ \forall x \end{cases} \bigcup \begin{cases} x - 1 > 0 \\ (x - 1)^2 \leq x^2 - 2x \end{cases}$$

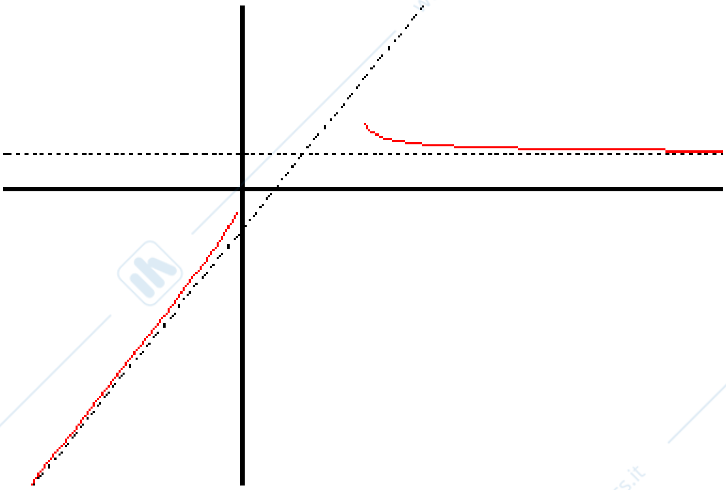
$$\begin{cases} x \leq 1 \\ \forall x \end{cases} \bigcup \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 1 - 2x \leq x^2 - 2x \end{cases}$$

Dallo studio del segno di $f'$ segue che la funzione è crescente per $x < 0$ mentre decresce per $x > 2$. Il punto $x = 0$ è di massimo relativo mentre

$x = 2$ è di massimo assoluto.
Confrontando l'insieme di definizione di $f$ con quello di $f'$, vediamo che la derivata prima non è definita in $x = 0$ e in $x = 2$. Da $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty$ segue che nel punto $x = 0$, il grafico ha tangente (sinistra) verticale. Risulta anche $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = -\infty$.
Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{x^2-2x} + (x-1)\cdot \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}}{x^2-2x} = \frac{1}{(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}}$$

Dallo studio del segno di $f''$, deduciamo che $f$ è convessa su tutto il suo dominio.
Un grafico qualitativo della funzione è il seguente:



$\square$

9.34 Studiare l'andamento delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \log(x^2 - 4x + 3)$ iv) $f(x) = e^{\frac{1+2x+x^2}{x^2}}$

*Soluzione:*

i) Per determinare il campo di esistenza è necessario imporre la condizione $x^2 - 4x + 3 > 0$. Segue che la funzione è definita in $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. La funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, \log 3)$.
Studiamo il segno della funzione:

$$\begin{aligned}\log(x^2-4x+3) \geq 0 &\iff x^2-4x+3 \geq 1 \\ &\iff x^2-4x+2 \geq 0\end{aligned}$$

La funzione è positiva in $(-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, +\infty)$.
Poichè risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log(x^2-4x+3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \log(x^2-4x+3) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} \log(x^2-4x+3) = -\infty$$

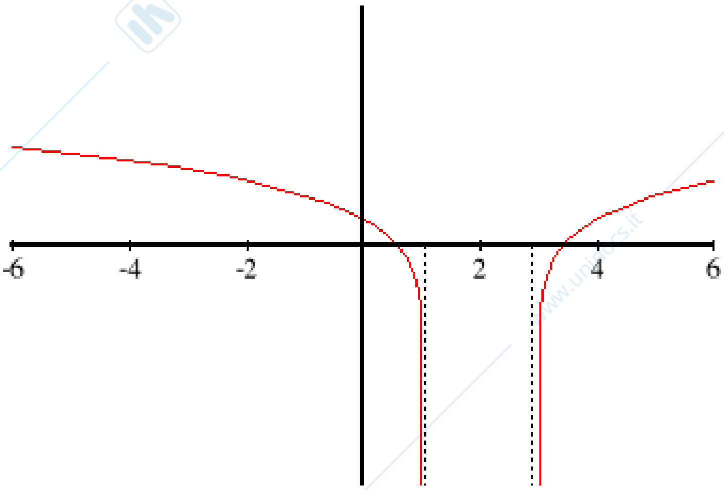
possiamo concludere che le rette $x = 1$ e $x = 3$ sono asintoti verticali. Non ci sono asintoti orizzontali e neppure asintoti obliqui (come è facile verificare).
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3}$$

Dallo studio del segno di $f'$ segue che la funzione è crescente nell'intervallo $(3, +\infty)$ mentre decresce per $x < 1$. Non esistono estremanti.
Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-4x+5)}{(x^2-4x+3)^2}$$

Il segno dipende dipende da $x^2 - 4x + 5 \geq 0$. Segue che la funzione è concava su tutto il suo dominio. Un grafico qualitativo della funzione è il seguente:




iv) La funzione è definita $\forall x \in \mathbf{R},\ x \neq 0$.
Poichè risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1+2x+x^2}{x^2}} = e; \qquad \lim_{x\to 0^\pm} e^{\frac{1+2x+x^2}{x^2}} = +\infty$$

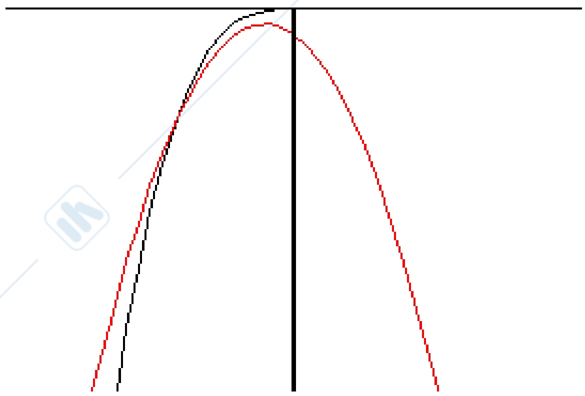
possiamo concludere che la retta $y = e$ è asintoto orizzontale, la retta $x = 0$ è asintoto verticale.
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = e^{\frac{1+2x+x^2}{x^2}} \left( -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2} \right) = e^{\frac{1+2x+x^2}{x^2}} \left( \frac{-2x-2}{x^3} \right)$$

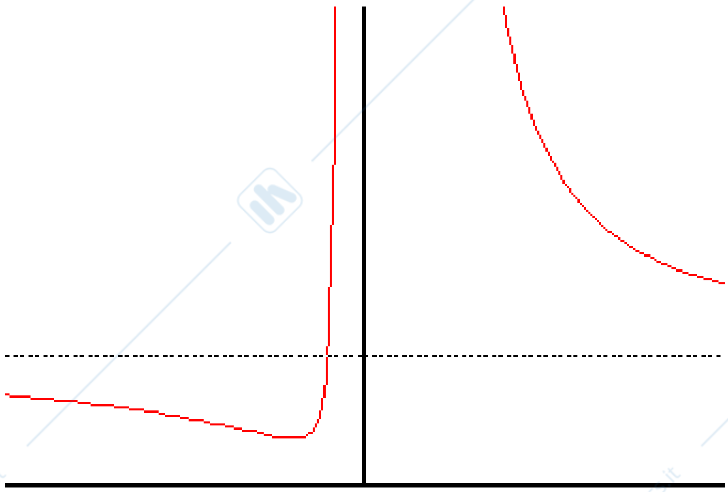
La funzione è crescente per $-1 \leq x < 0$ mentre decresce per $x < -1$ e per $x > 0$. Il punto $x = -1$ è di minimo assoluto (con $f(-1) = 1$).
Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} & e^{\frac{1+2x+x^2}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}\right)^2 + e^{\frac{1+2x+x^2}{x^2}} \left(\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^3}\right) \\ &= e^{\frac{1+2x+x^2}{x^2}} \left[\frac{4}{x^6} + \frac{4}{x^4} + \frac{8}{x^5} + \frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^3}\right] \\ &= 2e^{\frac{1+2x+x^2}{x^2}} \left[\frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 2}{x^6}\right] \end{aligned}$$

Il segno della derivata seconda dipende da $2x^3 + 5x^2 + 4x + 2$. Come si vede dal grafico di $y = 2x^3$ e della parabola di equazione $y = -5x^2 - 4x - 2$ (linea rossa):



le due curve si incontrano in un solo punto di ascissa $\alpha$ con $-2 < \alpha < -1$. Dallo studio del segno di $f''$, deduciamo che $f$ è convessa per $x > \alpha$ mentre è concava nell'intervallo $(-\infty, \alpha)$; il punto $x = \alpha$ è di flesso.
Un grafico qualitativo della funzione è:



□

9.35 Studiare l'andamento delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)}e^{-(x+1)}$ v) $f(x) = \log\left(1 - \left|\frac{x}{x-1}\right|\right)$

*Soluzione:*

i) La funzione è definita $\forall x \in \mathbf{R}$. Il suo grafico incontra l'asse delle ordinate nel punto $\left(0, -\frac{1}{e}\right)$.
Studiamo il segno:

$$\sqrt[3]{(x^2-1)}e^{-(x+1)} \geq 0 \iff x^2 - 1 \geq 0$$

concludiamo che la funzione interseca l'asse delle ascisse nei punti $x = \pm 1$, è positiva per $x < -1$ e per $x > 1$ mentre è negativa nell'intervallo $(-1, 1)$.
Poichè risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{(x^2-1)}e^{-(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)}}{e^{x+1}} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{(x^2-1)}e^{-(x+1)} = +\infty$$

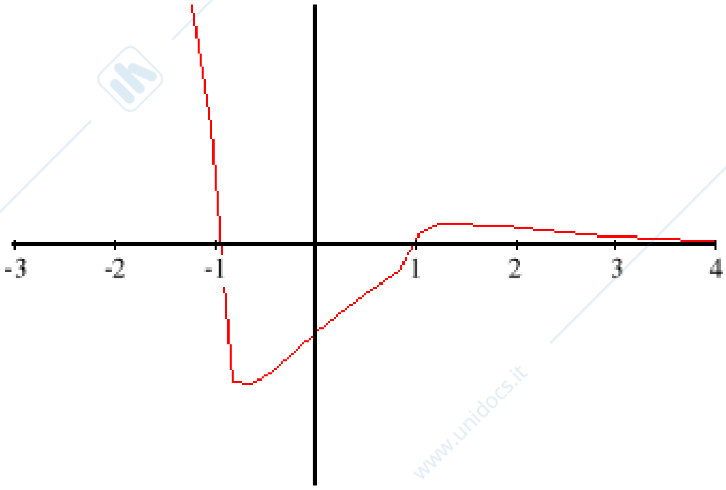
possiamo concludere che la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e non ci sono asintoti verticali (e neanche obliqui).
Calcoliamo la derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}e^{-(x+1)} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}e^{-(x+1)} \\ &= -\frac{3x^2 - 2x - 3}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}e^{-(x+1)} \end{aligned}$$

La derivata prima si annulla in $x = \frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$; dallo studio del segno di $f'$ segue che la funzione è crescente nell'intervallo $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$ mentre decresce altrove. Il punto $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$ è di minimo relativo mentre $x = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$ è di massimo relativo. Confrontando l'insieme di definizione di $f$ con quello di $f'$, vediamo che la derivata prima non è definita in $x = \pm 1$.
Poichè risulta:

$$\lim_{x\to-1} f'(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty$$

concludiamo che nei punti di ascissa $x = \pm 1$ il grafico della funzione presenta dei punti a tangente verticale.
Un grafico qualitativo della funzione è il seguente:




v) La funzione è definita per:

$$1 - \left|\frac{x}{x-1}\right| > 0 \iff |x| < |x-1| \iff x < \frac{1}{2}$$

La funzione non è mai positiva, poichè è $1 - \left|\frac{x}{x-1}\right| \leq 1$ per ogni punto del dominio e il suo grafico interseca gli assi cartesiani solo nell'origine. Osserviamo che:

$$f(x) = \log\left(1 - \left|\frac{x}{x-1}\right|\right) = \begin{cases} \log\left(-\frac{1}{x-1}\right), & \text{se } x \leq 0 \\ \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right), & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Poichè risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(-\frac{1}{x-1}\right) = -\infty; \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = -\infty$$

possiamo concludere che la retta $x = \frac{1}{2}$ è asintoto verticale (destro) e non ci sono asintoti orizzontali (e neppure obliqui).
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-1}, & \text{se } x < 0 \\ \frac{-1}{(2x-1)(x-1)}, & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

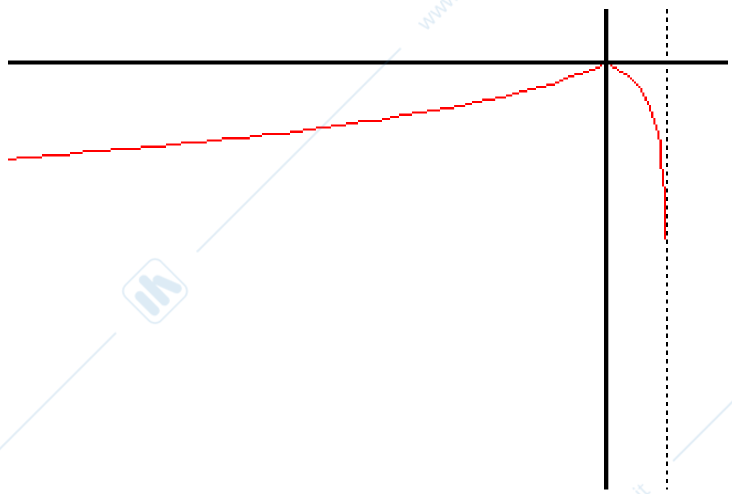
Dallo studio del segno di $f'$ segue che la funzione è crescente per $x < 0$ mentre decresce nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Confrontando l'insieme di definizione di $f$ con quello di $f'$, vediamo che la derivata prima non è definita in $x = 0$. Poichè risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(2x-1)(x-1)} = -1; \quad \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x-1} = 1$$

si deduce che la funzione presenta in $x = 0$ un punto angoloso. $x = 0$ è anche il punto di massimo assoluto della funzione.
Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{se } x < 0 \\ \frac{4x-3}{(2x-1)^2(x-1)^2}, & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dallo studio del segno di $f''$ si deduce che la funzione è convessa nell'intervallo $(-\infty, 0)$ mentre è concava in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
Un grafico qualitativo della funzione è:



$\square$

9.36 Studiare l'andamento delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = x^3 + \log x^3$

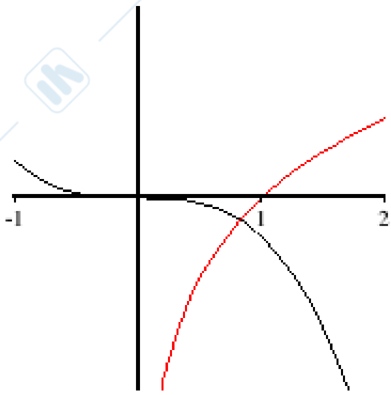
v) $f(x) = 1 - |x-2| + \log(x+1)$ vii) $f(x) = x + 2 - x \log |x|$

*Soluzione:*

i) La funzione data è definita per $x > 0$.
Studiamo il suo segno:

$$x^3 + \log x^3 \geq 0 \iff \log x^3 \geq -x^3 \iff 3 \log x \geq -x^3$$

e dal confronto grafico:




si deduce che la funzione è positiva nell'intervallo $(\alpha, +\infty)$ con $0 < \alpha < 1$ mentre è negativa in $(0, \alpha)$.
Poichè risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^3 + \log x^3\right) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \left(x^3 + \log x^3\right) = -\infty$$

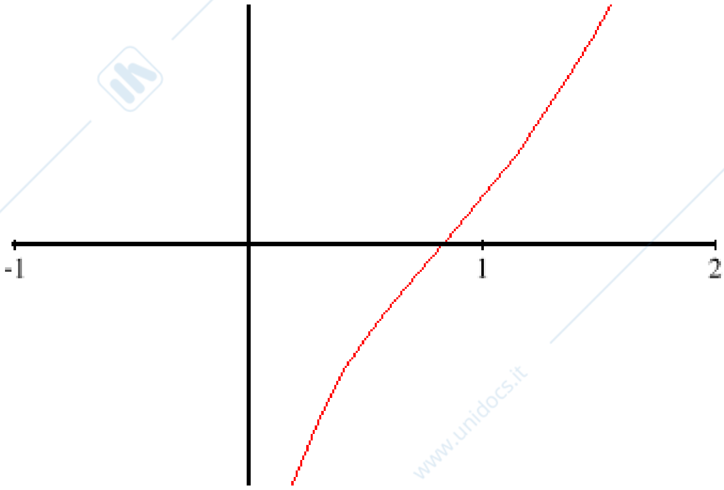
possiamo concludere che la retta $x = 0$ è asintoto verticale mentre non esistono asintoti orizzontali (e neanche obliqui).
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{x}$$

Dallo studio del segno di $f'$ segue che la funzione è sempre crescente e non ha estremanti.
Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 6x - \frac{3}{x^2} = \frac{6x^3 - 3}{x^2}$$

Dallo studio del segno di $f''$, deduciamo che $f$ è convessa per $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e concava nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. Il punto $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ è di flesso.
Un grafico qualitativo della funzione è il seguente:




□

## 10. Si torna indietro

10.2 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

ii) $\int \frac{x+4}{x^2+8x+11}\,\mathrm{d}\,x$ iii) $\int \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

ii) E' un integrale quasi immediato:

$$\int \frac{x+4}{x^2+8x+11}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+4)}{x^2+8x+11}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+8x+11}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\log\left|x^2+8x+11\right| + c.$$

iii) E' un integrale quasi immediato:

$$\int \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x}\,\mathrm{d}\,x = \log|\log x| + c.$$

□

10.3 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

v) $\int \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}\,x$ vii) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,\mathrm{d}\,x$

xi) $\int \frac{1}{2x^2-12x+18}\,\mathrm{d}\,x$ xii) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{2+e^{3x}}}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

v) E' un integrale quasi immediato:

$$\int \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}\sqrt{(3x+1)^3}\cdot\frac{2}{3} + c = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + c.$$

vii) E' un integrale quasi immediato:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,\mathrm{d}\,x = \int x^2(x^3+2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \frac{1}{3}\frac{\sqrt{x^3+2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+2} + c.$$

xi) E' un integrale quasi immediato:

$$\int \frac{1}{2x^2-12x+18}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{2(x^2-6x+9)}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \frac{1}{2}\int (x-3)^{-2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2(x-3)} + c.$$

xii) E' un integrale quasi immediato:

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{2+e^{3x}}}\,\mathrm{d}\,x = \int e^{3x}(2+e^{3x})^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}(2+e^{3x})^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{2+e^{3x}} + c.$$

□

10.4 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

iii) $\int \frac{27}{x^2+x-20}\,\mathrm{d}\,x$ iv) $\int \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

iii) Si ha:

$$\int \frac{27}{x^2+x-20}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{27}{(x+5)(x-4)}\,\mathrm{d}\,x.$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-4} = \frac{27}{(x+5)(x-4)}$$

ovvero $A(x-4) + B(x+5) = 27$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, da cui si origina il sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4A+5B=27 \end{cases}$$

soddisfatto per $A = -3$ e $B = 3$. Riscriviamo l'integrale come:

$$\begin{aligned}\int \frac{27}{(x+5)(x-4)}\,\mathrm{d}\,x &= -3\int \frac{1}{x+5} + 3\int \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}\,x\\ &= -3\log|x+5| + 3\log|x-4| + c\\ &= 3\log\left|\frac{x-4}{x+5}\right| + c.\end{aligned}$$

iv) Poichè $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, cerchiamo $A, B \in \mathbf{R}$ tali che:

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} = \frac{1}{(x+3)(x-3)}$$

ovvero $A(x-3) + B(x+3) = 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. I parametri cercati sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A + 3B = 1 \end{cases}$$

soddisfatto per $A = -\frac{1}{6}$ e $B = \frac{1}{6}$. Si ha:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}\,x &= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}\,x\\ &= -\frac{1}{6}\log|x+3| + \frac{1}{6}\log|x-3| + c\\ &= \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c.\end{aligned}$$

□

10.5 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

i) $\int \frac{14}{x^3-13x-12}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

i) Risolviamo l'equazione di terzo grado $h(x) = x^3 - 13x - 12 = 0$ applicando il teorema di Ruffini. I divisori del termine noto sono $N = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$. In particolare, si ha $h(-1) = h(-3) = h(4) = 0$. Segue che:

$$\int \frac{14}{x^3-13x-12}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{14}{(x-4)(x+1)(x+3)}\,\mathrm{d}\,x.$$

Cerchiamo $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che:

$$\frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} = \frac{14}{(x-4)(x+1)(x+3)}$$

equivalente a:

$$A(x+1)(x+3) + B(x-4)(x+3) + C(x-4)(x+1) = 14 \iff$$
$$A(x^2+4x+3) + B(x^2-x-12) + C(x^2-3x-4) = 14 \text{ per ogni } x \in \mathbf{R},$$

che conduce al sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A-B-3C=0 \\ 3A-12B-4C=14 \end{cases}$$

soddisfatto per $A = \frac{2}{5}$, $B = -\frac{7}{5}$, $C = 1$. Si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{14}{(x-4)(x+1)(x+3)}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{2}{5}\int \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}\,x - \frac{7}{5}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{2}{5}\log|x-4| - \frac{7}{5}\log|x+1| + \log|x+3| + c. \end{aligned}$$

□

10.6 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

i) $\int \frac{x+2}{3x^2-x+7}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

i) Poichè la parabola di equazione $y = 3x^2 - x + 7$ non ammette radici reali, dobbiamo applicare la formula d'integrazione riportata a pagina 263 con i parametri:

$$m = 1, \quad q = 2, \quad a = 3, \quad b = -1, \quad c = 7.$$

Segue che:

$$\begin{aligned} &\int \frac{x+2}{3x^2-x+7}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{6}\log(3x^2-x+7) + \frac{12+1}{\sqrt{(84-1)9}}\ \operatorname{arctg} 2\sqrt{\frac{9}{(83)}}\left(x-\frac{1}{6}\right) + c \\ &= \frac{1}{6}\log(3x^2-x+7) + \frac{13}{3\sqrt{83}}\ \operatorname{arctg} 6\frac{1}{\sqrt{83}}\left(x-\frac{1}{6}\right) + c \\ &= \frac{1}{6}\log(3x^2-x+7) + \frac{13}{3\sqrt{83}}\ \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{83}}(6x-1) + c. \end{aligned}$$

□

10.7 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

i) $\int \frac{8x+1}{4x+3}\,\mathrm{d}\,x$ iv) $\int \frac{21x^2}{1+7x^2}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

i) Grazie alla divisione tra polinomi, si ha:

$$\int \frac{8x+1}{4x+3}\,\mathrm{d}\,x = \int \left(2 - \frac{5}{4x+3}\right)\,\mathrm{d}\,x = 2x - \frac{5}{4}\log|4x+3| + c.$$

iv) Operando la divisione tra polinomi si ha:

$$\begin{aligned}\int \frac{21x^2}{1+7x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \left(3 - \frac{3}{1+7x^2}\right)\,\mathrm{d}\,x &= 3x - 3\int \frac{1}{1+(\sqrt{7}x)^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= 3x - \frac{3}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\,(\sqrt{7}x) + c.\end{aligned}$$

□

10.9 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

v) $\int x\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}\,x$ viii) $\int \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

v) Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{2}{3}x\sqrt{(x+4)^3} - \frac{2}{3}\int \sqrt{(x+4)^3}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{(x+4)^3} - \frac{2}{3}\int (x+4)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{(x+4)^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{(x+4)^5} + c \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{(x+4)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(x+4)^5} + c.\end{aligned}$$

viii) Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}\,x = \int \mathrm{sen}\,x\cdot\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}\,x &= -\mathrm{sen}\,x\cos x + \int \cos^2 x\,\mathrm{d}\,x \\ &= -\mathrm{sen}\,x\cos x + \int (1-\mathrm{sen}^2 x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= -\mathrm{sen}\,x\cos x + x - \int \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

Segue che

$$2\int \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}\,x = -\mathrm{sen}\,x\cos x + x + c$$

Infine: $\int \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x\cos x + \frac{1}{2}x + c$

□

10.11 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

i) $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}\,x$ vi) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

i) Procediamo per sostituzione, ponendo $e^x = t$, da cui $e^x\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,t$:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}+3e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{(e^x+3)e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{t+3}{t+1}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int \left(1+\frac{2}{t+1}\right)\,\mathrm{d}\,t = \int dt + 2\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}\,t \\ &= t + 2\log|t+1| + c = e^x + 2\log(e^x+1) + c.\end{aligned}$$

vi) Poniamo $\log x = t$, da cui $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,t$. Per sostituzione si ha:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}\,t &= \operatorname{arcsen} t + c \\ &= \operatorname{arcsen}(\log x) + c.\end{aligned}$$

□

10.13 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

iv) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}\,x$ v) $\int \frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

iv) Si ha:

$$\int \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{4x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{3}\operatorname{arcsen} x^3 + c.$$

v) Si ha:

$$\begin{aligned}\int \frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{\cos x+\operatorname{sen} x+\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int \mathrm{d}\,x + \int \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= x + \log|\operatorname{sen} x+\cos x| + c.\end{aligned}$$

□

10.14 Calcolare la primitiva della funzione $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ passante per il punto $P = (0,2)$.

*Soluzione:* Calcoliamo l'integrale indefinito della funzione:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}\,\mathrm{d}\,x = \int x^2(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + c.$$

Adesso imponiamo il passaggio per il punto $P = (0, 2)$:

$$-\frac{1}{2}\cdot 1 + c = 2 \iff c = \frac{5}{2}.$$

La primitiva cercata è $F(x) = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + \frac{5}{2}$. □

10.23 Calcolare $f(2)$ sapendo che $f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, e $f(0) = \log 4$.

*Soluzione:* Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+4}{x^2+4}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{4}{x^2+4}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \log(x^2+4) + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c\end{aligned}$$

Imponendo la condizione $f(0) = \log 4$, si ricava $c = 0$. Infine, da $f(x) = \log(x^2+4) + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$, si conclude $f(2) = \log 8 + 2\operatorname{arctg} 1 = 3\log 2 + \frac{\pi}{2}$. □

## 11. L'integrale definito

11.1 Calcolare i seguenti integrali definiti:

i) $\int_{-1}^{1}(x^5 - x)\,\mathrm{d}\,x$ ii) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\log(2x)\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

i) Una anti-derivata di $f(x) = x^5 - x$ è $y = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^2$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x^5-x)\,\mathrm{d}\,x &= \left(\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^2\right)_{x=1} - \left(\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^2\right)_{x=-1} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 0\end{aligned}$$

ii) Calcoliamo l'integrale indefinito $\int x^2\log(2x)\,\mathrm{d}\,x$ per parti:

$$\begin{aligned}\int x^2\log(2x)\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{3}x^3\log(2x) - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\cdot x^3\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{3}x^3\log(2x) - \frac{1}{9}x^3 + c\end{aligned}$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\log(2x)\,\mathrm{d}\,x &= \left(\frac{1}{3}x^3\log(2x) - \frac{1}{9}x^3\right)_{x=1} - \left(\frac{1}{3}x^3\log(2x) - \frac{1}{9}x^3\right)_{x=\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{9}\right) - \left(-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{3}\log 2 - \frac{7}{72}\end{aligned}$$

□

11.4 Calcolare l'integrale definito $\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ essendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

*Soluzione:*

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-3}^{0} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x + \int_{0}^{3} (x^2+3)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= (\log|x-1|)_{x=0} - (\log|x-1|)_{x=-3} + \left(\frac{1}{3}x^3+3x\right)_{x=3} - \left(\frac{1}{3}x^3+3x\right)_{x=0}$$
$$= -\log 4 + 18$$

□

11.9 Calcolare l'area della parte di piano individuata dall'asse $x$ e dalle seguenti curve (negli intervalli a fianco indicati):

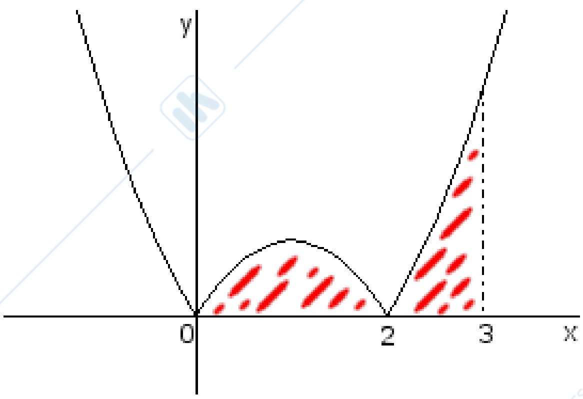
i) $y = |2x - x^2|$ in $[0,3]$

ii) $y = \frac{x-2}{x^2+2x-3}$ in $[2,4]$

*Soluzione:*

i) L'area richiesta è data dal valore di:

$$\int_0^3 |2x-x^2|\,\mathrm{d}\,x = \int_0^2 (2x-x^2)\,\mathrm{d}\,x + \int_2^3 (x^2-2x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)_{x=2} - \left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)_{x=0} + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)_{x=3} + $$
$$- \left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)_{x=2}$$
$$= 4 - \frac{8}{3} + 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{8}{3}$$



ii) Per il calcolo dell'integrale indefinito $\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}\,x$, consideriamo la scomposizione:

$$\frac{x-2}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

da cui segue (per il calcolo di $A$ e $B$), per ogni $x$:

$$A(x-1) + B(x+3) = x-2$$

Ponendo in particolare $x = 1$, otteniamo $4B = -1$ da cui $B = -\frac{1}{4}$. Ponendo invece $x = -3$, otteniamo $-4A = -5$ da cui $A = \frac{5}{4}$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{(x+3)(x-1)}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{5}{4}\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{5}{4}\log|x+3| - \frac{1}{4}\log|x-1| + c\end{aligned}$$

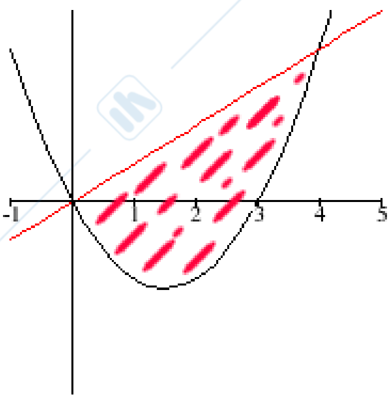
Poichè la funzione $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-3}$ è positiva in $[2,4]$, l'area richiesta è:

$$\begin{aligned}&\int_2^4 \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left(\frac{5}{4}\log|x+3| - \frac{1}{4}\log|x-1|\right)_{x=4} - \left(\frac{5}{4}\log|x+3| - \frac{1}{4}\log|x-1|\right)_{x=2} \\ &= \frac{5}{4}\log 7 - \frac{1}{4}\log 3 - \frac{5}{4}\log 5\end{aligned}$$

□

11.12 Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalla parabola di equazione $y_1 = x^2 - 3x$ e la retta di equazione $y_2 = x$.

*Soluzione:* La parabola di equazione $y_1 = x^2 - 3x$ e la retta di equazione $y_2 = x$ si intersecano nei punti di ascissa $x = 0$ e $x = 4$.



La misura dell'area richiesta porta allora a calcolare:

$$\int_0^4 x \, \mathrm{d}\, x - \int_0^4 (x^2 - 3x) \, \mathrm{d}\, x = \int_0^4 (-x^2 + 4x) \, \mathrm{d}\, x$$
$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right)_{x=0}^{x=4} = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$$

□

11.16 Scrivere la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}\, t$ essendo:

$$f(x) = \begin{cases} -3, & \text{se } \ 0 \leq x < 1 \\ x, & \text{se } \ 1 \leq x < 2 \\ 8 + 6x, & \text{se } \ 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

*Soluzione:* La funzione integrale richiesta può essere calcolata come segue:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x -3 \, \mathrm{d}\, t, & \text{se } \ 0 \leq x < 1 \\ \int_0^1 -3 \, \mathrm{d}\, t + \int_1^x t \, \mathrm{d}\, t, & \text{se } \ 1 \leq x < 2 \\ \int_0^1 -3 \, \mathrm{d}\, t + \int_1^2 t \, \mathrm{d}\, t + \int_2^x (8 + 6t) \, \mathrm{d}\, t, & \text{se } \ 2 \leq x < 4. \end{cases}$$

Segue che:

$$F(x) = \begin{cases} -3x, & \text{se } \ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}, & \text{se } \ 1 \leq x < 2 \\ 3x^2 + 8x - \frac{59}{2}, & \text{se } \ 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

□

11.19 Calcolare il dominio della funzione integrale $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t-3} \, \mathrm{d}\, t$.

*Soluzione:* La funzione integranda $f(t) = \frac{e^t}{t-3}$ è definita per ogni $t \neq 3$ e in tale insieme è continua. Al dominio di $F$ appartengono sicuramente tutti gli $x \in (-\infty, 3)$ Per $t \to 3^-$, la funzione integranda è infinita di ordine 1 e dunque l'integrale non esiste nemmeno in senso improprio.
Si conclude che la funzione integrale è definita in $(-\infty, 3)$. □

11.22 Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3 \, \mathrm{d}\, t}{x^4}$ ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{1}{\log(2+t)} \, \mathrm{d}\, t}{2 \log x}$

*Soluzione:*

i) Utilizzando il teorema di De l'Hôpital e lo sviluppo di $\operatorname{sen} x^3$, si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3 \,\mathrm{d}\, t}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^3}{4x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

ii) Utilizzando il teorema di De L'Hôpital, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{1}{\log(2+t)}\,\mathrm{d}\, t}{2\log x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\log(2+x)}}{\frac{2}{x}} = 0.$$

□

11.25 Calcolare gli eventuali estremanti della funzione integrale $F(x) = \int_1^x (\log^2 t - 5\log t + 6)\,\mathrm{d}\, t$ nell'intervallo $[1, +\infty)$.

*Soluzione:* La funzione integranda è continua nell'intervallo $[1, +\infty)$; il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma allora che:

$$F'(x) = \log^2 x - 5\log x + 6 \geq 0$$

per $x \in [1, e^2]$ e $x \in [e^3, +\infty)$.
Si conclude che $x = e^2$ è massimo relativo, $x = e^3$ e $x = 1$ sono punti di minimo relativo. □

11.27 Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x) = \int_1^x (t^2+3)\,\mathrm{d}\, t$ nel punto di ascissa 1.

*Soluzione:* Il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma che: $F'(x) = x^2 + 3$. Poichè risulta:

$$F(1) = \int_1^1 (t^2+3)dt = 0, \qquad F'(1) = 4$$

l'equazione della retta tangente cercata è $y = 4(x-1) = 4x - 4$ □

11.30 Scrivere in $x_0 = 2$ il polinomio di Taylor di secondo grado per la funzione $F(x) = \int_2^x \frac{1}{t^2+8t+7}\,\mathrm{d}\, t$.

*Soluzione:* Il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma che $F'(x) = \frac{1}{x^2+8x+7}$ da cui $F''(x) = \frac{-2x-8}{(x^2+8x+7)^2}$. Poichè risulta:

$$F(2) = 0, \qquad F'(2) = \frac{1}{27}, \qquad F''(x) = -\frac{4}{243}$$

il polinomio richiesto è:

$$P_2(x; 2) = \frac{1}{27}(x-2) - \frac{2}{243}(x-2)^2 = -\frac{1}{243}(2x^2 - 17x + 26)$$

□

11.34 Data la funzione $f(x) = x^2 + 1$, calcolare il punto $c \in [-2, 2]$ che soddisfa l'uguaglianza contenuta nella tesi del teorema del valor medio per il calcolo integrale.

*Soluzione:* La funzione data è continua sull'intervallo $[-2, 2]$; il teorema del valor medio afferma allora che esiste almeno un punto $c \in [-2, 2]$ tale che

$$\int_{-2}^{2} (x^2 + 1)\,\mathrm{d}\,x = 4(c^2 + 1)$$

Si ha:

$$\int_{-2}^{2} (x^2 + 1)\,\mathrm{d}\,x = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)_{x=-2}^{x=2} = \frac{16}{3} + 4$$

Segue che $\frac{16}{3} + 4 = 4c^2 + 4$ per $c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, entrambi contenuti nell'intervallo $[-2, 2]$ □

11.37 Calcolare i seguenti integrali impropri:

iii) $\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}\,x$ iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

iii) La funzione integranda è definita e continua nell'intervallo $(3, 4]$, ed è illimitata per $x \to 3^+$. Per calcolare l'integrale indefinito, sostituiamo $\sqrt{x-3} = t$ e $\mathrm{d}\,x = 2t\,\mathrm{d}\,t$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{t^2+3}{t}\,2t\,\mathrm{d}\,t = 2\int (t^2+3)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{2}{3}t^3 + 6t + c = \frac{2}{3}(\sqrt{x-3})^3 + 6\sqrt{x-3} + c\end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{c\to 3^+}\left[\frac{2}{3} + 6 - \frac{2}{3}(\sqrt{c-3})^3 - 6\sqrt{c-3}\right] = \frac{20}{3}$$

iv) La funzione integranda è definita e continua nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, ed è illimitata per $x \to 0^+$. Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} + c$$

Di conseguenza:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 c}\right] = \frac{3}{2}$$

□

11.38 Calcolare il valore dei seguenti integrali impropri:

i) $\int_{e^3}^{+\infty} \frac{1}{x(\log^2 x - 4)} \, \mathrm{d}\, x$ iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+8x+17} \, \mathrm{d}\, x$

*Soluzione:*

i) La funzione integranda è definita e continua nell'intervallo $(0, +\infty)$. Per il calcolo dell'integrale indefinito, sostituiamo $\log x = t$ e $\frac{1}{x} \mathrm{d}\, x = \mathrm{d}\, t$

$$\int \frac{1}{x(\log^2 x - 4)} \mathrm{d}\, x = \int \frac{1}{t^2 - 4} \mathrm{d}\, t = \int \frac{1}{(t-2)(t+2)} \mathrm{d}\, t$$

e consideriamo la scomposizione:

$$\frac{1}{(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2}$$

da cui segue (per il calcolo di $A$ e $B$), per ogni $t$:

$$1 = A(t+2) + B(t-2)$$

Ponendo in particolare $t = 2$, otteniamo $4A = 1$ da cui $A = \frac{1}{4}$. Ponendo invece $t = -2$, otteniamo $-4B = 1$ da cui $B = -\frac{1}{4}$. Abbiamo allora:

$$\int \frac{1}{(t-2)(t+2)} \mathrm{d}\, t = \frac{1}{4} \log \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + c$$

Segue che

$$\begin{aligned}
\int_{e^3}^{+\infty} \frac{1}{x(\log^2 x - 4)} \mathrm{d}\, x &= \lim_{c \to +\infty} \int_{e^3}^{c} \frac{1}{x(\log^2 x - 4)} \mathrm{d}\, x \\
&= \lim_{c \to +\infty} \left[ \frac{1}{4} \log \left| \frac{\log x - 2}{\log x + 2} \right| \right]_{x=e^3}^{x=c} \\
&= \lim_{c \to +\infty} \left[ \frac{1}{4} \log \left| \frac{\log c - 2}{\log c + 2} \right| - \frac{1}{4} \log \frac{1}{5} \right] \\
&= \frac{1}{4} \log 5
\end{aligned}$$

iii) La funzione integranda è definita, positiva e continua su tutto l'asse reale. Scriviamo l'integrale generalizzato come somma di integrali generalizzati:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 8x + 17} \mathrm{d}\, x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2 + 8x + 17} \mathrm{d}\, x + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 8x + 17} \mathrm{d}\, x$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 + 8x + 17} \mathrm{d}\, x = \int \frac{1}{x^2 + 8x + 16 + 1} \mathrm{d}\, x &= \int \frac{1}{1 + (x+4)^2} \mathrm{d}\, x \\
&= \operatorname{arctg}(x+4) + c
\end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+8x+17}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 \frac{1}{x^2+8x+17}\,\mathrm{d}\,x + \lim_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{1}{x^2+8x+17}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{c\to-\infty} (\operatorname{arctg}(x+4))_{x=c}^{x=0} + \lim_{c\to+\infty} (\operatorname{arctg}(x+4))_{x=0}^{x=c} \\
&= \lim_{c\to-\infty} (\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg}(c+4)) + \lim_{c\to+\infty} (\operatorname{arctg}(c+4) - \operatorname{arctg} 4) \\
&= \operatorname{arctg} 4 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 4 = \pi
\end{aligned}$$

□

11.39 Stabilire se esistono i seguenti integrali impropri:

v) $\int_{-4}^{-1} \frac{1}{x^2+6x+5}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

v) La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x^2+6x+5}$ presenta, relativamente all'intervallo $[-4,-1]$, un punto di discontinuità in $x=-1$, in un intorno (sinistro) del quale si mantiene illimitata.
Per $x \to -1^-$, la funzione integranda è infinita di ordine 1 e pertanto non risulta integrabile.

□

11.40 Stabilire se esistono i seguenti integrali impropri:

v) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$

*Soluzione:*

v) La funzione integranda $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ è definita e continua in $\mathbf{R}$. Poichè la funzione integranda è infinitesima di ordine 1, non risulta integrabile.

□

## 12. Le serie

12.1 Studiare il carattere delle seguenti serie:

i) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$ ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{3^n+n}$

*Soluzione:*

i) La serie è a termini positivi e il termine generale è infinitesimo, dunque la condizione necessaria di convergenza è soddisfatta.
Poichè $\forall n \in \mathbf{N},\ \log n < n$ si ha:

$$\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$$

e la serie minorante $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (è la serie armonica), segue che anche la serie maggiorante $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$ è divergente.

ii) Scegliamo (al numeratore e al denominatore) l'infinito di ordine superiore: il termine generale $u_n = \frac{2^n+1}{3^n+n}$, per $n \to +\infty$ si comporta come $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Ne deduciamo che il termine generale della serie è un infinitesimo dello stesso ordine del termine generale di una serie geometrica convergente. La serie è allora convergente.

$\square$

12.2 Scrivere le somme parziali *n-esime* e determinare la somma delle seguenti serie:

i) $\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3}\right)$ ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

*Soluzione:*

i) Si ha:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{3} - 1\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3}\right) \\ &= -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Da $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\frac{3}{2}$, deduciamo che la serie converge e ha per somma $-\frac{3}{2}$.

ii) Il termine generale $\frac{1}{n(n+3)}$ può essere scritto come $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right] \end{aligned}$$

Da $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{11}{18}$, deduciamo che la serie converge e ha per somma $\frac{11}{18}$.

$\square$

12.4 Calcolare, se possibile, la somma delle seguenti serie:

vii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 4^n - 3\cdot 5^n}{20^{n-1}}$

*Soluzione:*

vii) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 4^n - 3\cdot 5^n}{20^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2\cdot 4}{5^{n-1}} - \frac{3\cdot 5}{4^{n-1}}\right)$$
$$= 8\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - 15\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

è convergente, perchè somma di serie geometriche di ragione rispettivamente $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$ (minori di 1). Il valore della somma è:

$$8\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - 15\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 8\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right) - 15\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)$$
$$= 8\cdot\frac{5}{4} - 15\cdot\frac{4}{3} = -10$$

□

12.7 Stabilire per quali valori dal parametro reale $k$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{k}\right)^n$ converge e calcolare poi la sua somma.

*Soluzione:* La serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{k}\right)^n$ è geometrica di ragione $q = 1-\frac{2}{k}$ e converge quando $-1 < \left(1-\frac{2}{k}\right) < 1$ ovvero

$$\begin{cases} 1-\frac{2}{k} < 1 \\ 1-\frac{2}{k} > -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{2}{k} < 0 \\ 2-\frac{2}{k} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k > 0 \\ k < 0 \text{ e } k > 1 \end{cases}$$

per $k > 1$. Per tali valori, la somma è:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{k}\right)^n = \frac{1}{1-\left(1-\frac{2}{k}\right)} = \frac{k}{2}$$

□

12.9 Studiare il carattere delle seguenti serie:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3-n+5}{2n^2+3n-1}$ vi) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}-n}$

*Soluzione:*

i) La serie (a termini positivi) diverge poichè non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza. Il termine generale non è infinitesimo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^3 - n + 5}{2n^2 + 3n - 1} = +\infty$$

vi) La serie diverge poichè non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza. Il termine generale non è infinitesimo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n} - n} = -1$$

$\square$

12.10 Studiare il carattere delle seguenti serie:

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n}{5n-1}\right)^{3n-1}$  vi) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

*Soluzione:*

i) Utilizzando il criterio della radice, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n-1}\right)^{3n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n}{5n-1}\right)^{\frac{3n-1}{n}} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

deducendone che la serie converge.

vi) Utilizzando il criterio della radice, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

deducendone che la serie converge.

$\square$

12.11 Studiare il carattere delle seguenti serie:

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{n!}$  vi) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{17}+1}{n!}$

*Soluzione:*

i) Utilizzando il criterio del rapporto, si ha:

$$\frac{(n+1)^4}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^4} = \frac{(n+1)^4}{n^4(n+1)} = \frac{(n+1)^3}{n^4}$$

Abbiamo allora che $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{n^4} = 0$ e quindi la serie converge.

vi) Utilizzando il criterio del rapporto, si ha:

$$\frac{(n+1)^{17}+1}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^{17}+1}=\frac{(n+1)^{17}+1}{(n+1)(n^{17}+1)}$$

Abbiamo allora che $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{17}+1}{(n+1)(n^{17}+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{17}}{n^{18}}=0$ e quindi la serie converge.

$\square$

12.12 Studiare il carattere delle seguenti serie:

i) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+4)}$ ii) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{n-\log n}$

*Soluzione:*

i) Scegliamo (al denominatore) l'infinito di ordine superiore: il termine generale $u_n=\frac{1}{n(n+4)}$, per $n\to+\infty$ si comporta come $\frac{1}{n^2}$. Ne deduciamo che il termine generale della serie è un infinitesimo del secondo ordine (rispetto a $\frac{1}{n}$). La serie è allora convergente.

ii) La serie è a termini positivi e il termine generale è infinitesimo, dunque la condizione necessaria di convergenza è soddisfatta. Calcoliamo l'ordine di infinitesimo del termine generale:

$$u_n=\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{n-\log n}=\frac{\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n+o(n)}$$

Il termine generale è infinitesimo del terzo ordine e pertanto la serie converge.

$\square$

12.14 Studiare il carattere delle seguenti serie:

i) $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n^3-2}$ iii) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3^{n+1}}{\pi^n}\right)$

*Soluzione:*

i) La serie data è una serie a termini di segno alterno. Consideriamoli in valore assoluto, studiando dunque la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n+2}{n^3-2}$$

Questa serie converge (in quanto il suo termine generale è infinitesimo di ordine 2) e dunque anche la serie data risulta convergente.

iii) La serie si può scrivere come:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3^{n+1}}{\pi^n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot(-1)\frac{3\cdot 3^n}{\pi^n}=-3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{\pi}\right)^n$$

La serie data è irregolare.

□

12.15 Studiare la convergenza assoluta e semplice delle seguenti serie:

i) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \text{sen}\,\frac{1}{n}$ vi) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n2^n+1}$

*Soluzione:*

i) La serie data è una serie a termini di segno alterno. Per il criterio integrale, la serie non converge assolutamente (in quanto il suo termine generale è infinitesimo di ordine 1). Poichè risulta $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$ vale la relazione $u_n\geq u_{n+1}$ e il termine generale è infinitesimo. Dunque la serie converge semplicemente.

vi) La serie data è una serie a termini di segno alterno. Il termine generale $u_n=\frac{2^n}{n2^n+1}$ è infinitesimo. La serie data non converge assolutamente poichè il suo termine generale è un infinitesimo del primo ordine. Tuttavia la successione $\{u_n\}$ è decrescente. Consideriamo infatti (per $x>1$) la funzione:

$$u(x)=\frac{2^x}{x2^x+1}$$

e calcoliamone la derivata prima:

$$\begin{aligned}u'(x)&=\frac{2^x\log 2(x2^x+1)-(2^x+x2^x\log 2)2^x}{(x2^x+1)^2}\\&=\frac{2^{2x}x\log 2+2^x\log 2-2^{2x}-2^{2x}x\log 2}{(x2^x+1)^2}\\&=\frac{2^x\log 2-2^{2x}}{(x2^x+1)^2}\\&=\frac{2^x(\log 2-2^x)}{(x2^x+1)^2}\end{aligned}$$

Poichè la derivata prima è negativa per ogni $x>1$, si deduce che la funzione $u$ è definitivamente decrescente. Segue che la serie data converge semplicemente.

□

12.17 Studiare il carattere delle seguenti serie, in dipendenza dal parametro reale $k$:

vii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^{2n}}{n^3}$

*Soluzione:*

vii) Utilizzando il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{k^{2n}}{n^3}} = k^2 \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = k^2$$

La serie converge per $k^2 < 1$ ovvero per $-1 < k < 1$ mentre diverge per $k < -1$ e $k > 1$. Rimangono da studiare i casi $k = \pm 1$. Sostituendo tali valori nella serie si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ che converge.

□

12.20 Stabilire per quali valori dal parametro reale $k$ le seguenti serie convergono:

iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{k-1}{k^2+1}\right)^n$ iv) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k-9}$

*Soluzione:*

iii) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{k-1}{k^2+1}\right)^n$ è geometrica di ragione $q = \frac{k-1}{k^2+1}$ e converge quando $-1 < \frac{k-1}{k^2+1} < 1$ ovvero per $k < -1$ e $k > 0$.

iv) La serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k-9} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{9-2k}}$$

converge per $9 - 2k > 1$ ovvero per $k < 4$.

□

# 13. Il tempo

13.2 Stabilire se l'equazione differenziale $y' = f(t,y)$ con $f(t,y) = \sqrt{|y|}$ e con la condizione iniziale $y(0) = 0$ soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità.

*Soluzione:* Esplicitando la nozione di valore assoluto:

$$y' = f(t,y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{se } \ y \geq 0 \\ \sqrt{-y}, & \text{se } \ y < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata prima di $f(t,y)$ rispetto a $y$:

$$f'_y(t,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & \text{se } \ y > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{-y}}, & \text{se } \ y < 0 \end{cases}$$

Segue che $f'_y(t,y)$ non è continua in un intorno del punto $(0,0)$ e dunque non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità. □

13.3 Scrivere l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

i) $y' = 2y$ ii) $y' = 3t^2 - 6t + 8$

*Soluzione:*

i) L'equazione $y' = 2y$ è a variabili separabili:

$$\frac{1}{2y}\,\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}\,t, \qquad \int \frac{1}{2y}\,\mathrm{d}\,y = \int \mathrm{d}\,t,$$

$$\frac{1}{2}\log|y| = t + c, \qquad \log|y| = 2(t+c), \qquad y = ce^{2t}$$

ii) L'equazione $y' = 3t^2 - 6t + 8$ è a variabili separabili: da $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = 3t^2 - 6t + 8$ si ha:

$$\int \mathrm{d}\,y = \int (3t^2 - 6t + 8)\,\mathrm{d}\,t, y = t^3 - 3t^2 + 8t + c$$

□

13.4 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

i) $\begin{cases} y' - 2ty = 3t \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ v) $\begin{cases} e^{t+y}y' + t = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

*Soluzione:*

i) L'equazione $y' = 2ty + 3t$ è un'equazione a variabili separabili. Il suo integrale generale (per $y \neq -\frac{3}{2}$) è dato da:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = t(2y+3), \qquad \int \frac{1}{2y+3}\,\mathrm{d}\,y = \int t\,\mathrm{d}\,t$$

$$\frac{1}{2}\log|2y+3| = \frac{t^2}{2} + c, \qquad \log|2y+3| = t^2 + c, \qquad y = ce^{t^2} - \frac{3}{2}$$

Imponendo la condizione $y(0) = \frac{1}{2}$, otteniamo $c = 2$. La soluzione del problema è dunque $y = 2e^{t^2} - \frac{3}{2}$.

v) L'equazione $e^{t+y}y' + t = 0$ è un'equazione a variabili separabili. Il suo integrale generale è dato da:

$$e^t e^y \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -t, \qquad e^y\,\mathrm{d}\,y = -e^{-t}t\,\mathrm{d}\,t, \qquad \int e^y\,\mathrm{d}\,y = -\int e^{-t}t\,\mathrm{d}\,t$$

Integrando per parti per calcolare $\int e^{-t}t\,\mathrm{d}\,t$ si ottiene:

$$e^y = te^{-t} + e^{-t} + c, \qquad y = -t + \log(t+1) + c$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$, otteniamo $c = 0$. La soluzione del problema è dunque $y = -t + \log(t+1)$.

□

13.7 Scrivere l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

i) $y' - 2y = 3$

*Soluzione:*

i) L'equazione $y' = 2y + 3$ è lineare:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\int 2\,\mathrm{d}\,t} \cdot \left[c + \int 3e^{-\int 2\,\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t\right] = e^{2t} \cdot \left[c + 3\int e^{-2t}\,\mathrm{d}\,t\right] \\ &= e^{2t} \cdot \left[c - \frac{3}{2}e^{-2t}\right] = -\frac{3}{2} + ce^{2t} \end{aligned}$$

□

13.10 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

vii) $\begin{cases} y' = \frac{1}{t+1}y + 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

*Soluzione:*

vii) L'equazione $y' = \frac{1}{t+1}y + 2$ è lineare. Il suo integrale generale è dato da:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}\,t} \cdot \left[c + \int 2e^{\int -\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t\right] \\ &= e^{\log(t+1)} \cdot \left[c + 2\int e^{-\log(t+1)}\,\mathrm{d}\,t\right] \\ &= (t+1) \cdot \left[c + 2\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}\,t\right] \\ &= (t+1) \cdot [c + 2\log(t+1)] \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$, otteniamo $c = 1$.
La soluzione cercata è dunque $y = (t+1)(1 + 2\log(t+1))$.

□

13.12 Scrivere l'integrale generale delle seguenti equazioni alle differenze:

i) $y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n = 2$

*Soluzione:*

i) E' un'equazione del primo ordine:

$$y_n = \frac{1}{2^n}c + 2\frac{\frac{1}{2^n} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}c - 4\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) = \frac{c-4}{2^n} + 4$$

$\square$

## 14. Funzioni di due variabili

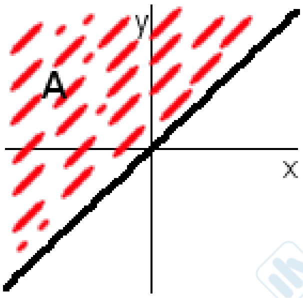
14.1 Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

i) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ iii) $f(x,y) = \log(y-x)$

*Soluzione:*

i) L'insieme di definizione è dato dai punti $(x,y)$ per cui risulta $xy \geq 0$, ovvero $x$ e $y$ sono di segno concorde. In questo caso, l'insieme di definizione è il sottoinsieme $A$ di $\mathbf{R}^2$ costituito dal primo e dal terzo quadrante, assi compresi.

iii) L'insieme di definizione è dato dai punti $(x,y)$ per cui risulta $y - x > 0$, ovvero $y > x$.




In questo caso, l'insieme di definizione è il sottoinsieme $A$ di $\mathbf{R}^2$ costituito dai punti situati al di sopra della bisettrice del primo e del terzo quadrante.

$\square$

14.9 Calcolare, se possibile, i seguenti limiti:

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ vi) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{\text{sen}\,(x^2+y^2)}$

*Soluzione:*

i) Il limite non esiste. Infatti per $(x, y) \to (0, 0)$, quando ci si avvicina lungo la bisettrice di equazione $y = x$, abbiamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

mentre, quando ci si avvicina lungo la bisettrice di equazione $y = -x$, abbiamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

vi) Operando la sostituzione $x^2 + y^2 = t$, il limite dato è equivalente a:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0} \frac{t+o(t)}{t+o(t)} = 1$$

□

14.10 Stabilire se la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua nell'origine.

*Soluzione:* La funzione è continua nell'origine. Infatti, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ risulta:

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} |y| \leq |y|$$

e dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. □

14.14 Calcolare in $t = 0$ la derivata della funzione composta $F(t) = f(x(t), y(t))$ essendo $f(x, y) = x^3 + 6y + 3x$; $x(t) = t^2 + t + 2$; $y(t) = e^t$.

*Soluzione:* Applicando la formula di derivazione delle funzioni composte, abbiamo:

$$F'(t) = f'_x \cdot x'(t) + f'_y \cdot y'(t) = (3x^2 + 3)(2t + 1) + 6e^t$$

da cui $F'(0) = f'_x(2, 1) \cdot x'(0) + f'_y(2, 1) \cdot y'(0) = 15 + 6 = 21$. □

14.18 Sia data l'equazione $x^3 + y^3 + x^2y - 1 = 0$ e il punto $(0, 1)$. Verificare che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Dini e calcolare $g'(0)$.

*Soluzione:* Le ipotesi del teorema di Dini sono soddisfatte: $f(0, 1) = 0$ e per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ la funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y - 1$ è continua e derivabile con continuità. Abbiamo inoltre $f'_y(0, 1) = 3 \neq 0$.

Allora esiste una funzione $y = g(x)$, definita con continuità in un intorno di $x_0 = 0$ e tale che $g(0) = 1$, soluzione dell'equazione assegnata. In $x_0 = 0$ il valore della sua derivata è dato da:

$$g'(0) = -\frac{f'_x(0,1)}{f'_y(0,1)} = -\frac{(3x^2 + 2xy)_{(x,y)=(0,1)}}{(3y^2 + x^2)_{(x,y)=(0,1)}} = 0$$

$\square$

14.23 Calcolare in $(1,1)$ il valore $H = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2$ essendo $f(x,y) = x^4y - 3x^2y + 5$.

*Soluzione:* Le derivate parziali prime e seconde sono:

$$f'_x = 4x^3y - 6xy; \quad f'_y = x^4 - 3x^2$$

$$f''_{xx} = 12x^2y - 6y; \quad f''_{yy} = 0; \quad f''_{xy} = 4x^3 - 6x$$

Calcolandole nel punto $(1,1)$, otteniamo: $H = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = -4$. $\square$

14.28 Determinare gli eventuali punti stazionari di $f(x,y) = x^4 + y^3 - \frac{9}{2}x^2 - 3y^2$.

*Soluzione:* I punti stazionari sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 9x = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta per $x = 0$ e $x = \pm\frac{3}{2}$ mentre la seconda per $y = 0$ e $y = 2$. Segue che i punti stazionari sono:

$$(0,0), \quad (0,2), \quad \left(\frac{3}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{3}{2}, 2\right), \quad \left(-\frac{3}{2}, 0\right), \quad \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$\square$

14.36 Determinare gli eventuali estremanti di $f(x,y) = \frac{3xy+1}{x-2}$.

*Soluzione:* Il campo di esistenza è $x \neq 2$, dunque un insieme aperto. Dal sistema:

$$\begin{cases} f'_x = -\frac{6y+1}{(x-2)^2} = 0 \\ f'_y = \frac{3x}{x-2} = 0 \end{cases}$$

ricaviamo il punto stazionario $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$.
Calcoliamo allora le derivate seconde: $f''_{xx} = \frac{2(6y+1)}{(x-2)^3}$; $f''_{xy} = -\frac{6}{(x-2)^2}$; $f''_{yy} = 0$.
Per il punto $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$, abbiamo $H = -\left(-\frac{6}{(x-2)^2}\right)^2$: $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$ è un punto di sella.
Non esistono estremanti. $\square$

14.37 Determinare gli eventuali estremanti di $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2 - 4x^5$.

*Soluzione:* Dal sistema:

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 + 4xy^2 - 20x^4 = 0 \\ f'_y = 4x^2y + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

ricaviamo i punti stazionari $(0,0)$ e $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$.
Calcoliamo allora le derivate seconde: $f''_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 80x^3$; $f''_{xy} = 8xy$; $f''_{yy} = 4x^2 + 12y^2$. Per il punto $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$, abbiamo $H = -\left(\frac{4}{25}\right)^2$: $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$ è un punto di sella.
Per il punto $(0,0)$, abbiamo $H = 0$ e dunque siamo nel caso dubbio. Possiamo osservare che:

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^5 \\ &= x^4(1-4x) + 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

Per $x < \frac{1}{4}$ si ha $\Delta f(0,0) > 0$. Abbiamo trovato un intorno del punto $(0,0)$ in cui è soddisfatta la definizione di minimo relativo. Concludiamo che $(0,0)$ è un minimo relativo per $f$. □

14.43 Determinare gli eventuali punti di massimo assoluto della funzione $f(x,y) = y^2 - 2x^2$ con il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

*Soluzione:* In questo caso, il vincolo può essere esplicitato rispetto a $y^2$ : $y^2 = 1 - x^2$. Sostituendolo nella funzione obiettivo $f$, otteniamo la funzione $f(x, y(x)) = g(x) = 1 - 3x^2$ di una sola variabile $x \in [-1, 1]$.
Derivando $g$ e studiando il segno della derivata prima $g' = -6x$ otteniamo che $x = 0$ è il punto di massimo assoluto. Possiamo allora concludere che i punti $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono i punti di massimo assoluto dell'iniziale problema vincolato. □

14.47 Determinare gli eventuali estremanti della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x - 15$ con il vincolo $y - x + 1 = 0$.

*Soluzione:* Esplicitiamo il vincolo rispetto a $y$ : $y = x - 1$. Sostituendolo nella funzione obiettivo $f$, otteniamo la funzione di una sola variabile:

$$f(x, y(x)) = g(x) = 3x^2 - 8x - 13.$$

Studiando il segno della derivata prima $g' = 6x - 8$, otteniamo che $x = \frac{4}{3}$ è il punto di minimo assoluto. Tornando a sostituire questo valore nella relazione $y = x - 1$, possiamo concludere che il punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è il punto di minimo assoluto dell'iniziale problema vincolato. Non esistono punti di massimo. □

14.51 Determinare gli eventuali estremanti della funzione $f(x, y) = y - 4x$ con il vincolo $6x^2 + y^2 = 4$.

*Soluzione:* In questo caso non è agevole sostituire il vincolo nella funzione obiettivo. Consideriamo allora la funzione lagrangiana $L = y - 4x - \lambda(6x^2 + y^2 - 4)$ e annulliamone le derivate parziali:

$$\begin{cases} -4 - 12\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ 6x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $\lambda = -\frac{1}{3x}$ e, sostituendo nella seconda, otteniamo $y = -\frac{3}{2}x$. Infine sostituendo nella terza, ricaviamo i punti stazionari $\left(\frac{4}{\sqrt{33}}, -\frac{6}{\sqrt{33}}\right)$ per $\lambda = -\frac{\sqrt{33}}{12}$ e $\left(-\frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{6}{\sqrt{33}}\right)$ per $\lambda = \frac{\sqrt{33}}{12}$.
Poichè la funzione $f$ è continua e i punti dell'ellisse $6x^2 + y^2 = 4$ costituiscono un insieme chiuso e limitato, sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass che garantisce l'esistenza di un punto di massimo e di un punto di minimo. Per decidere dunque sulla natura dei punti stazionari trovati calcoliamo:

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{33}}, -\frac{6}{\sqrt{33}}\right) = -\frac{22}{\sqrt{33}}, \quad f\left(-\frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{6}{\sqrt{33}}\right) = \frac{22}{\sqrt{33}}$$

Concludiamo che $\left(\frac{4}{\sqrt{33}}, -\frac{6}{\sqrt{33}}\right)$ è il punto di minimo assoluto mentre $\left(-\frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{6}{\sqrt{33}}\right)$ è il punto di massimo assoluto del problema vincolato. □

14.53 Determinare gli eventuali estremanti di $f(x, y) = y(x^4 + 4 - 4x^2)$ nell'insieme $A = \{(x, y) : y \geq 0\}$.

*Soluzione:* La funzione obiettivo $f(x, y) = y(x^4 + 4 - 4x^2) = y(x^2 - 2)^2$ è il prodotto di due quantità sempre positive. Per $y > 0$ i punti stazionari sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} f'_x = y(4x^3 - 8x) = 0 \\ f'_y = x^4 + 4 - 4x^2 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta per $x = 0$, $y = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$ mentre la seconda per $x = \pm\sqrt{2}$. Segue che i punti stazionari sono della forma $(\pm\sqrt{2}, y)$ con $y > 0$. In tali punti la funzione si annulla, mentre per $y > 0$ e $x \neq \pm\sqrt{2}$, si ha $f(x, y) > 0$. Concludiamo che i punti $(+\sqrt{2}, y)$ e $(-\sqrt{2}, y)$ con $y > 0$ sono punti di minimo assoluto per $f$. Inoltre, per $y = 0$, $f(x, 0) = 0$ e dunque anche i punti di frontiera $(x, 0)$ sono minimi assoluti. □

14.55 Determinare i punti di massimo assoluto e minimo assoluto di $f(x,y) = 4x^2y^2 - x(y-1)$ nell'insieme $A = \{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$.

*Soluzione:* Dal sistema:

$$\begin{cases} f'_x = 8xy^2 - y + 1 = 0 \\ f'_y = 8x^2y - x = 0 \end{cases}$$

si ricava che l'unico punto stazionario (interno ad $A$) è $(0,1)$. Calcoliamo le derivate seconde: $f''_{xx} = 8y^2$; $f''_{xy} = 16xy - 1$; $f''_{yy} = 8x^2$. Per il punto $(0,1)$, abbiamo $H = -1$: il punto $(0,1)$ è di sella.
Occupiamoci della frontiera di $A$, considerando i quattro lati del rettangolo.

- $y = 0$: sostituendo l'equazione del vincolo nella funzione obiettivo, otteniamo la funzione $f_1(x) = x$ con $x \in [-1,1]$. La funzione ha un minimo in $x = -1$ e un massimo in $x = 1$.
- $y = 2$: sostituendo l'equazione del vincolo nella funzione obiettivo, otteniamo la funzione $f_2(x) = 16x^2 - x$ con $x \in [-1,1]$. La funzione ha un minimo in $x = \frac{1}{32}$, un massimo in $x = -1$ e un massimo in $x = 1$.
- $x = -1$: sostituendo l'equazione del vincolo nella funzione obiettivo, otteniamo la funzione $f_3(y) = 4y^2 + y - 1$ con $y \in [0,2]$. La funzione ha un minimo in $y = 0$ e un massimo in $y = 2$.
- $x = 1$: sostituendo l'equazione del vincolo nella funzione obiettivo, otteniamo la funzione $f_4(y) = 4y^2 - y + 1$ con $y \in [0,2]$. La funzione ha un minimo in $y = \frac{1}{8}$, un massimo in $y = 0$ e un massimo in $y = 2$.

I risultati precedenti dicono che i possibili estremanti di $f$ in $A$ sono $(-1,0)$, $(1,0)$, $(-1,2)$, $(1,2)$, $\left(1, \frac{1}{8}\right)$ e $\left(\frac{1}{32}, 2\right)$. Il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di un minimo e di un massimo assoluto. Calcolando i valori della funzione nei punti candidati:

$$f(-1,0) = -1,\ f(1,0) = 1,\ f(-1,2) = 17,\ f(1,2) = 15,$$

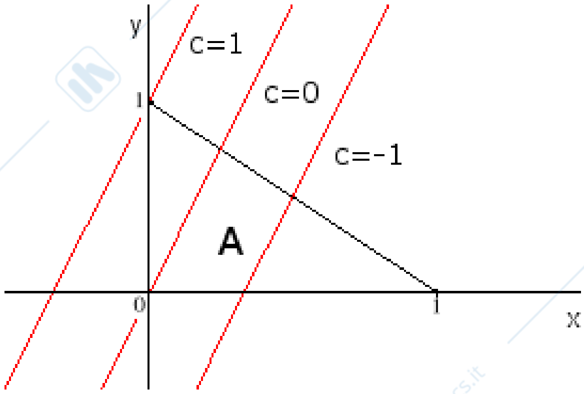
$$f\left(1, \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{16},\ f\left(\frac{1}{32}, 2\right) = -\frac{1}{64}$$

si conclude che il punto $(-1,0)$ è il punto di minimo assoluto mentre $(-1,2)$ è di massimo assoluto.

□

14.56 Utilizzando il metodo delle curve di livello, determinare gli eventuali estremanti di $f(x,y) = y - 3x$ nell'insieme $A = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 - x;\ x \ge 0\}$.

*Soluzione:* Disegnando le curve di livello $f(x,y) = c$ per $c = 0$, $c = 1$ e $c = -1$:




si vede che, spostando le rette verso sinistra, la funzione assume valori via via maggiori. La funzione assumerà allora il valore massimo in corrispondenza del punto $(0, 1)$: da $y - 3x = c$, sostituendo le coordinate del punto, otteniamo $c = 1$. Infine, la funzione assumerà il valore minimo in corrispondenza del punto $(1, 0)$: da $y - 3x = c$, sostituendo le coordinate del punto, otteniamo $c = -3$. In conclusione, il punto di massimo in $A$, per $f$, è il punto $(0, 1)$ e in tale punto la funzione vale 1 mentre il punto di minimo in $A$, per $f$, è il punto $(1, 0)$ e in tale punto la funzione vale $-3$. □

## 15. I vettori di $\mathbf{R}^n$

15.4 Stabilire in base alla definizione se i vettori $\mathbf{x}^1 = (5, 1, 8), \mathbf{x}^2 = (1, -2, -5)$, $\mathbf{x}^3 = (-7, 3, 2)$ sono linearmente dipendenti.

*Soluzione:* Consideriamo una loro combinazione lineare e l'uguaglianza $\sum_{i=1}^{3} k_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0}$, equivalente a $k_1(5, 1, 8) + k_2(1, -2, -5) + k_3(-7, 3, 2) = (0, 0, 0)$. Abbiamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} 5k_1 + k_2 - 7k_3 = 0 \\ k_1 - 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 8k_1 - 5k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}$$

soddisfatto non solo dalla terna $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ma anche da $k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 1$. I vettori in questione sono linearmente dipendenti. □

15.8 Scrivere $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ come combinazione lineare di $\mathbf{e}^1,\ \mathbf{e}^2,\ \mathbf{x}^3 = (1, 1, 1)$.

*Soluzione:* Consideriamo una combinazione lineare di $\mathbf{e}^1,\ \mathbf{e}^2,\ \mathbf{x}^3$ e l'uguaglianza $\sum_{i=1}^{2} k_i \mathbf{e}^i + k_3 \mathbf{x}^3 = \mathbf{x}$ equivalente a $k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$. Abbiamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 1 \\ k_2 + k_3 = 2 \\ k_3 = 3 \end{cases}$$

soddisfatto dalla terna $k_1 = -2,\ k_2 = -1,\ k_3 = 3$. Segue che $\mathbf{x} = -2\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2 + 3\mathbf{x}^3$. □

15.13 Determinare per quali valori del parametro $t$ il vettore $\mathbf{x} = (3, 2, t)$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}^1 = (1, -1, 2)$ e $\mathbf{x}^2 = (1, 3, -1)$.

*Soluzione:* Consideriamo una combinazione lineare di $\mathbf{x}^1,\ \mathbf{x}^2$ e l'uguaglianza $\sum_{i=1}^{2} k_i\mathbf{x}^i = \mathbf{x}$ equivalente a $k_1(1, -1, 2) + k_2(1, 3, -1) = (3, 2, t)$. Abbiamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 3 \\ -k_1 + 3k_2 = 2 \\ 2k_1 - k_2 = t \end{cases}$$

Le prime due equazioni sono soddisfatte dalla coppia $k_1 = \frac{7}{4},\ k_2 = \frac{5}{4}$. Sostituendo questi valori nella terza equazione, si ricava che per $t = \frac{9}{4}$ il vettore $\mathbf{x}$ è combinazione lineare di $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$. □

15.16 Stabilire quali delle seguenti coppie di vettori costituiscono una base di $\mathbf{R}^2$:

ii) $\mathbf{x}^1 = (1, 3)$ e $\mathbf{x}^2 = (3, 1)$
iii) $\mathbf{x}^1 = (1, 0)$ e $\mathbf{x}^2 = (-1, 0)$

*Soluzione:*

ii) I due vettori in questione sono linearmente indipendenti in quanto l'uguaglianza $\sum_{i=1}^{2} k_i\mathbf{x}^i = \mathbf{0}$ è equivalente a $(k_1 + 3k_2, 3k_1 + k_2) = (0, 0)$, che porta al sistema:

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 = 0 \\ 3k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

soddisfatto solo da $k_1 = k_2 = 0$.
Inoltre, ogni $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ può essere espresso come combinazione lineare di $\mathbf{x}^1,\ \mathbf{x}^2$. L'uguaglianza $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{2} k_i\mathbf{x}^i$ conduce, infatti, al sistema:

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 = y_1 \\ 3k_1 + k_2 = y_2 \end{cases}$$

soddisfatto per $k_1 = \frac{1}{8}(3y_2 - y_1),\ k_2 = \frac{1}{8}(3y_1 - y_2)$. Otteniamo così:

$$\mathbf{y} = \frac{1}{8}(3y_2 - y_1)\mathbf{x}^1 + \frac{1}{8}(3y_1 - y_2)\mathbf{x}^2$$

iii) I due vettori in questione non sono linearmente indipendenti in quanto l'uguaglianza $\sum_{i=1}^{2} k_i\mathbf{x}^i = \mathbf{0}$ è equivalente a $(k_1 - k_2, 0) = (0, 0)$, soddisfatta per ogni coppia $(k_1, k_1)$. I vettori $\mathbf{x}^1,\ \mathbf{x}^2$ non costituiscono dunque una base per $\mathbf{R}^2$.

□

15.20 Stabilire quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1 = 4x_2\} \qquad B = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1\}$$
$$C = \{(x_1, x_2) : x_2 = x_1^2\} \qquad D = \{(x_1, x_2) : x_1 - x_2 = 0\}$$
$$E = \{(x_1, x_2) : x_2 = x_1^3\} \qquad F = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 0\}$$

*Soluzione:* Gli insiemi $A, D, F$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^2$.
Siano infatti $\mathbf{y} = (y_1, y_2), \mathbf{z} = (z_1, z_2)$ elementi dell'insieme $A$ e consideriamo una loro combinazione lineare:

$$\begin{aligned} \alpha(y_1, y_2) + \beta(z_1, z_2) &= (\alpha y_1, \alpha y_2) + (\beta z_1, \beta z_2) \\ &= (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2) \\ &= (4\alpha y_2 + 4\beta z_2, \alpha y_2 + \beta z_2) \end{aligned}$$

Poichè $(4\alpha y_2 + 4\beta z_2, \alpha y_2 + \beta z_2) \in A$, si conclude che $A$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.

Siano $\mathbf{y} = (y_1, y_2), \mathbf{z} = (z_1, z_2)$ elementi dell'insieme $D$ e consideriamo una loro combinazione lineare:

$$\begin{aligned} \alpha(y_1, y_2) + \beta(z_1, z_2) &= (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2) \\ &= (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_1 + \beta z_1) \end{aligned}$$

che appartiene a $D$ e pertanto $D$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.

Siano $\mathbf{y} = (y_1, y_2), \mathbf{z} = (z_1, z_2)$ elementi dell'insieme $F$ e consideriamo una loro combinazione lineare:

$$\begin{aligned} \alpha(y_1, y_2) + \beta(z_1, z_2) &= (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2) \\ &= (\alpha y_1 + \beta z_1, -\alpha y_1 - \beta z_1) \end{aligned}$$

che appartiene a $F$ e pertanto $F$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.

L'insieme $B$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$ poichè, ad esempio, i vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono elementi di $B$ ma la loro combinazione lineare con pesi $\alpha = \beta = 1$, equivalente a $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$, non appartiene a $B$.

L'insieme $C$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$ poichè, ad esempio, i vettori $(0, 0)$ e $(1, 1)$ sono elementi di $C$ ma la loro combinazione lineare con pesi $\alpha = \beta = 2$, equivalente a $2(0, 0) + 2(1, 1) = (2, 2)$, non appartiene a $C$.

I vettori $(0, 0)$ e $(1, 1)$ sono anche elementi di $E$ mentre la loro combinazione lineare con pesi $\alpha = \beta = 2$ non appartiene ad $E$ e pertanto $E$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$. $\square$

15.24 Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = (1, 0, 2)$ e $\mathbf{x}^2 = (2, -1, 3)$, determinare l'insieme dei vettori $\mathbf{x}^3 = (x, y, z)$ tali che $\mathbf{x}^3 \cdot \mathbf{x}^1 = 0$ e $\mathbf{x}^3 \cdot \mathbf{x}^2 = 0$.

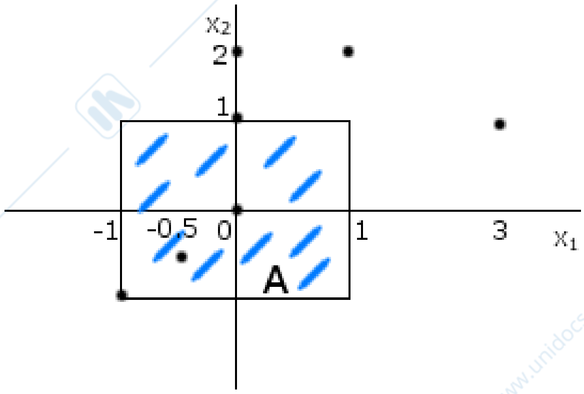
*Soluzione:* Le condizioni date portano a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

soddisfatto da tutte le terne $(-2z, -z, z)$. □

15.28 Dato l'insieme $A = \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 1;\ -1 \leq x_2 \leq 1\}$ dire se i seguenti punti sono interni, esterni o di frontiera per $A$: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,1)$, $(0,2)$, $(-1,-1)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

*Soluzione:* I punti $(0,0)$ e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ sono interni, i punti $(0,1)$ e $(-1,-1)$ sono di frontiera, mentre $(1,2)$, $(3,1)$, $(0,2)$ sono esterni, come si vede nel disegno:



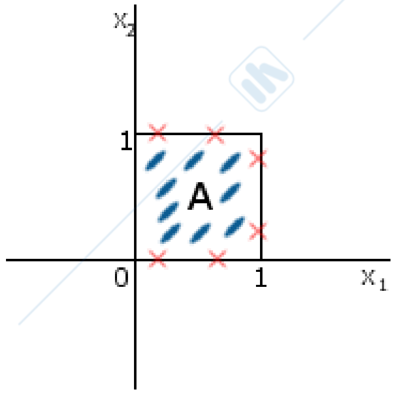

□

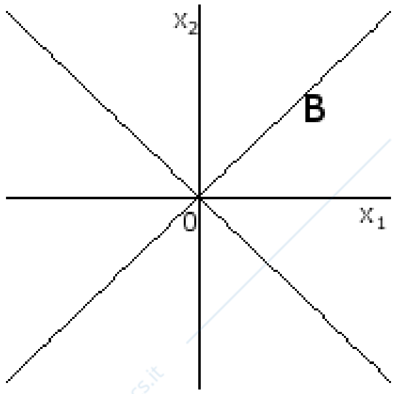
15.30 Stabilire se i seguenti insiemi sono aperti, chiusi o nè aperti nè chiusi:

$A = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$

$B = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2 \ \text{ oppure } \ x_1 = -x_2\}$

*Soluzione:* L'insieme $A$ non è nè aperto nè chiuso. Non è chiuso perchè per esempio il punto $(0,0)$ è di accumulazione per $A$ ma non appartiene ad $A$. Non è aperto perchè i punti $(0, x_2)$ con $0 < x_2 < 1$ sono elementi di $A$ ma non sono interni ad $A$.
L'insieme $B$ è un chiuso e tutti i suoi punti sono di accumulazione.




□

15.33 Dati i vettori $\mathbf{x} = (8, 1, 3)$ e $\mathbf{y} = (0, 4, 5)$, calcolare il loro prodotto scalare, la distanza $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e le loro norme.

*Soluzione:* Applicando le definizioni, si ha:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 8 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 19$$
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(0-8)^2 + (4-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{77}$$
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{64+1+9} = \sqrt{74} \qquad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

□

## 16. Matrici, sistemi e trasformazioni lineari

16.6 Utilizzando il teorema di Laplace, calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Soluzione:* Poichè la seconda colonna della matrice $\mathbf{A}$ si ottiene moltiplicando per 2 la prima, si conclude che $\det \mathbf{A} = 0$.

Fissando l'attenzione sulla terza riga della matrice $\mathbf{B}$, il teorema di Laplace ci dice che:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= 2(-4 + 12 - 3) + 3(12 - 4) \\ &= 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 = 34 \end{aligned}$$

□

16.8 Calcolare l'inversa (se esiste) delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

*Soluzione:* Poichè la matrice $\mathbf{A}$ è non singolare ($\det \mathbf{A} = 6$), calcoliamo la sua inversa:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{agg\,A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Poichè la matrice $\mathbf{B}$ è singolare ($\det \mathbf{B} = 0$), non ammette inversa.
Focalizzando l'attenzione sulla prima colonna della matrice $\mathbf{C}$ il teorema di Laplace ci dice che $\det \mathbf{C} = 8 + 3(2-6) = 8 + 3(-4) = -4$. Calcoliamo $\mathbf{C}^{-1}$:

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{agg\,C} = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -4 \\ 3 & -5 & -1 \\ -6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

16.10 Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha$, risultano invertibili le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2\alpha & 2+2\alpha & 6 \\ \alpha & 4-2\alpha & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha+3 & 3 & 2+\alpha \\ 2 & 2 & \alpha \\ 5 & 4 & 3+\alpha \end{bmatrix}.$$

*Soluzione:* La matrice $\mathbf{A}$ è non singolare quando:

$$\det \mathbf{A} = 18\alpha - 18\alpha^2 \neq 0$$

ovvero per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$.
La matrice $\mathbf{B}$ è non singolare quando:

$$\det \mathbf{B} = -2\alpha^2 + 7\alpha - 4 \neq 0$$

ovvero per $\alpha \neq \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}$. □

16.12 Calcolare $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{B}$, essendo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

*Soluzione:* Poichè la matrice $\mathbf{A}$ è non singolare ($\det \mathbf{A} = 8 - 6 = 2$), ammette inversa. Si ha:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{agg\,A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice richiesta è:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 6 & \frac{11}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

□

16.14 Determinare la matrice $\mathbf{X}$ tale che $(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{A}$ essendo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Soluzione:* La matrice $\mathbf{X}$ deve essere di due righe e di due colonne. La relazione data equivale a $\mathbf{X} = \mathbf{ABA}$ e la matrice richiesta è:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 39 \\ -2 & 41 \end{bmatrix}$$

□

16.19 Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Soluzione:* Il rango della matrice $\mathbf{A}$ è almeno due, poichè il minore $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ha determinante non nullo. A questo punto il rango di $\mathbf{A}$ dipende dai minori

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Poichè entrambi hanno determinante nullo, si deduce che $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2$.
La matrice $\mathbf{B}$ è formata dagli stessi vettori della matrice $\mathbf{A}$, solo in ordine diverso. Concludiamo che anche $\mathrm{r}(\mathbf{B}) = 2$. □

16.22 Risolvere il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ essendo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

*Soluzione:* La matrice $\mathbf{A}$ ha rango 2 poichè, ad esempio, il minore $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ha determinante non nullo. Il teorema di Rouchè-Capelli è soddisfatto e il sistema ammette infinite soluzioni. Il sistema dato è equivalente a:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 - 5z \\ x + 5y = 7 + z \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 1-5z & -2 \\ 7+z & 5 \end{bmatrix}}{17} = \frac{19 - 23z}{17}$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 1-5z \\ 1 & 7+z \end{bmatrix}}{17} = \frac{20 + 8z}{17}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni della forma $\left(\frac{19-23z}{17}, \frac{20+8z}{17}, z\right)$. □

16.24 Risolvere, se possibile, il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x - z = -1 \\ -x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

*Soluzione:* La matrice dei coefficienti

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

è non singolare in quanto $\det \mathbf{A} = 1 + 3 + 1 - 12 = -7 \neq 0$.
Il teorema di Rouchè-Capelli è soddisfatto poichè $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ e dunque esiste un'unica soluzione (poichè $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ è pari al numero delle incognite). Il teorema di Cramer ci fornisce le soluzioni:

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}{-7} = -\frac{6}{7}$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}{-7} = \frac{38}{7}$$

$$z = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}{-7} = -\frac{11}{7}.$$

□

16.29 Discutere e risolvere, al variare del parametro reale $k$, il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ essendo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & k \\ 0 & k & k \\ -k & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2k \\ -1 \end{bmatrix}.$$

*Soluzione:* Da $\det \mathbf{A} = -k^2 + k^3 - k^2 \neq 0 \iff k \neq 0$, deduciamo che $\forall k \neq 0$ è $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 3$. Poichè la matrice orlata $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ $(3 \times 4)$ non può avere rango superiore, la condizione di Rouchè-Capelli è soddisfatta $\forall k \neq 0$ e il sistema è possibile. Poichè il rango è pari al numero delle incognite, esiste una sola soluzione. Per il teorema di Cramer:

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 2k & k & k \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}{k^3} = -\frac{k+1}{k^2}$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 2k & k \\ -k & -1 & 0 \end{bmatrix}}{k^3} = \frac{2k+1}{k}$$

$$z = \frac{\det\begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 2k \\ -k & -1 & -1 \end{bmatrix}}{k^3} = -\frac{1}{k}.$$

La soluzione è dunque: $\left(-\frac{k+1}{k^2}, \frac{2k+1}{k}, -\frac{1}{k}\right)$.
Per $k = 0$, riscrivendo le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}|\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

segue che $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$ mentre risulta $\mathrm{r}(A|\mathbf{b}) = 2$ poichè, ad esempio

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Segue che per $k = 0$ il sistema è impossibile. □

16.32 Determinare per quali valori del parametro reale $k$ il seguente sistema (omogeneo) ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} 3x + 3ky + z = 0 \\ kx + 5y - z = 0 \\ x - y + kz = 0 \end{cases}$$

*Soluzione:* Il sistema ammette infinite soluzioni in corrispondenza dei valori di $k$ per cui la matrice dei coefficienti ha rango minore di tre. La matrice dei coefficienti:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3k & 1 \\ k & 5 & -1 \\ 1 & -1 & k \end{bmatrix}$$

ha determinante $-3k^3+11k-8$. Si vede che $k = 1$ è una sua radice e applicando il teorema di Ruffini, si ha:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -3 & 0 & 11 & -8 \\ & & & & \\ 1 & & -3 & -3 & 8 \\ \hline & -3 & -3 & 8 & \end{array}$$

ovvero $-3k^3 + 11k - 8 = (k-1)(-3k^2 - 3k + 8)$. Si conclude che, per $k = 1$ e $k = \frac{-3\pm\sqrt{105}}{6}$, il rango di $\mathbf{A}$ è minore di tre e dunque esistono infinite soluzioni.

□

16.42 Sia $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una funzione lineare tale che:

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}^1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{e}^2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Calcolare $\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

*Soluzione:* Poichè una trasformazione lineare è additiva e omogenea, si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) &= \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 2\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

16.44 Sia $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una funzione lineare rappresentata dalla matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \\ a^2 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Determinare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, il nucleo di $f$.

*Soluzione:* Si tratta di determinare l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. Poichè risulta:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -1 - 2a = 0 \iff a = -\frac{1}{2}$$

possiamo concludere che, per $a \neq -\frac{1}{2}$, il rango di $\mathbf{A}$ è due e il sistema ammette una sola soluzione: dunque, $\mathbf{N}(\mathbf{f}) = \{0\}$. Per $a = -\frac{1}{2}$, riscrivendo la matrice $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

si osserva che $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$ e dunque il sistema omogeneo si riduce a $2x - y = 0$. Concludiamo che $\mathbf{N}(\mathbf{f}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 2x\}$. □

## 17. Le funzioni di $n$ variabili

17.1 Calcolare, mediante la definizione, $f'_x(0, 0)$ e $f'_y(0, 0)$ con:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Soluzione:* Abbiamo:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1$$

Analogamente, risulta $f'_y(0, 0) = 1$. □

17.3 Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni, nel punto a fianco indicato:

i) $f(x, y, z) = xy + \log(x - 3z)$ $\qquad (0, 2, -1)$

ii) $f(x, y, z) = xe^{-yz} + z^3 - x^2$ $\qquad (1, -1, 1)$

*Soluzione:*

i) Da:

$$f'_x = y + \frac{1}{x-3z}; \qquad f'_y = x; \qquad f'_z = -\frac{3}{x-3z}$$

otteniamo: $\nabla f(0,2,-1) = \left(\frac{7}{3}, 0, -1\right)$.

ii) Da:

$$f'_x = e^{-yz} - 2x; \qquad f'_y = -xze^{-yz}; \qquad f'_z = -yxe^{-yz} + 3z^2$$

otteniamo: $\nabla f(1,-1,1) = (e-2, -e, e+3)$.

$\square$

17.5 Calcolare in $t = 1$ la derivata della funzione composta $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, essendo $f(x,y,z) = x\log^2 y - z\log(xy)$; $x(t) = e^t$; $y(t) = e^{2t}$; $z(t) = 2t^2 - 4$.

*Soluzione:* Applicando la formula di derivazione delle funzioni composte, abbiamo:

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}' = \left(\log^2 y - \frac{z}{x}, \frac{2x\log y - z}{y}, -\log(xy)\right) \cdot (e^t, 2e^{2t}, 4t)$$

da cui:

$$\begin{aligned} F'(1) &= \nabla f(e, e^2, -2) \cdot \mathbf{x}'(1) \\ &= \left(4 + \frac{2}{e},\ \frac{4}{e} + \frac{2}{e^2},\ -3\right) \cdot (e, 2e^2, 4) \\ &= 12e - 6 \end{aligned}$$

$\square$

17.8 Calcolare il differenziale delle seguenti funzioni, nel punto a fianco indicato:

i) $f(x,y,z) = \log(9 - x^2 - y^2 - z^2)$ $\qquad (1,0,2)$

ii) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xy^2) + 3yz^2$ $\qquad \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$

*Soluzione:*

i) Da:

$$f'_x = \frac{-2x}{9-x^2-y^2-z^2}; \; f'_y = \frac{-2y}{9-x^2-y^2-z^2}; \; f'_z = \frac{-2z}{9-x^2-y^2-z^2}$$

(abbiamo quindi $f'_x(1,0,2) = -\frac{1}{2}$, $f'_y(1,0,2) = 0$, $f'_z(1,0,2) = -1$), otteniamo: $\mathrm{d}\, f(1,0,2) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\, x - \mathrm{d}\, z$.

ii) Da:

$$f'_x = y^2\cos(xy^2); \quad f'_y = 2xy\cos(xy^2) + 3z^2; \quad f'_z = 6yz$$

(abbiamo quindi $f'_x\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{4}$, $f'_y\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) = 3$, $f'_z\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) = 3$), otteniamo: $\mathrm{d}\, f(1,0,2) = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}\, x + 3\,\mathrm{d}\, y + 3\,\mathrm{d}\, z$.

$\square$

17.10 Calcolare in $(1,1,1)$ il differenziale secondo della funzione $f(x,y,z) = x^3 + 3xy^2 + xyz$.

*Soluzione:* Le derivate parziali prime e seconde sono:

$$f'_x = 3x^2 + 3y^2 + yz; \qquad f'_y = 6xy + xz; \qquad f'_z = xy$$
$$f''_{xx} = 6x; \qquad f''_{yy} = 6x; \qquad f''_{zz} = 0$$
$$f''_{xy} = 6y + z; \qquad f''_{xz} = y; \qquad f''_{yz} = x$$

Calcolandole nel punto $(1,1,1)$, otteniamo:

$$\mathrm{d}^2 f(1,1,1) = 6\,\mathrm{d}\,x^2 + 6\,\mathrm{d}\,y^2 + 14\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + 2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + 2\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$$

□

17.15 Calcolare la matrice hessiana delle seguenti funzioni, nel punto a fianco indicato:

i) $f(x,y,z) = 3x + y^2 - xz^4$ $\qquad (1,-1,1)$

ii) $f(x,y,z) = x^3y - y^4z$ $\qquad \left(\frac{1}{3}, 1, 0\right)$

*Soluzione:*

i) Da $f'_x = 3 - z^4$, $\quad f'_y = 2y$, $\quad f'_z = -4xz^3$, la matrice hessiana in un generico punto $(x,y,z)$ è $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4z^3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4z^3 & 0 & -12xz^2 \end{bmatrix}$ e dunque nel punto $(1,-1,1)$ si ha: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -12 \end{bmatrix}$.

ii) Da $f'_x = 3x^2y$, $\quad f'_y = x^3 - 4y^3z$, $\quad f'_z = -y^4$, la matrice hessiana in un generico punto $(x,y,z)$ è $\begin{bmatrix} 6xy & 3x^2 & 0 \\ 3x^2 & -12y^2z & -4y^3 \\ 0 & -4y^3 & 0 \end{bmatrix}$ e dunque nel punto $\left(\frac{1}{3}, 1, 0\right)$ si ha: $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

□

17.17 Calcolare i punti stazionari di $f(x,y,z) = x^2 + xy + 3xz + y^2 - 3x - 2y - z$.

*Soluzione:* I punti stazionari sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è soddisfatto per $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$. □

17.19 Verificare che il punto $(0, 1, 1)$ è di minimo relativo per la funzione $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^3 - 2y$ nell'insieme $A = \{(x, y, z) : x^2 + z^3 = 1\}$.

*Soluzione:* Il punto $(0, 1, 1)$ appartiene alla regione ammissibile. Sostituendo $x^2 = 1 - z^3$ direttamente nella funzione obiettivo, ricaviamo che il problema vincolato dato è equivalente a quello della ricerca degli estremanti della funzione (in due variabili):

$$g(y, z) = y^2 - 2y - z^3 + 2$$

tenendo però presente che $z$ può variare solo nell'intervallo $[-1, 1]$. Dallo studio (locale) del segno di $\Delta f = f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1)$, con $k < 0$, si deduce che $(1, 1)$ è punto di minimo relativo per $g$. Segue che $(0, 1, 1)$ è minimo relativo per $f$. □

17.20 Senza calcolare le derivate, stabilire se per la funzione $f(x, y) = x^3 + 2y^3$ l'origine è un estremante.

*Soluzione:* Abbiamo che $f(0, 0) = 0$ mentre per $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, $f(-\varepsilon, -\varepsilon) < 0$ e $f(\varepsilon, \varepsilon) > 0$. Segue che l'origine non è un estremante. □

17.25 Determinare gli eventuali estremanti della funzione:

$$f(x, y, z) = x - y + 4z + 2xy - x^2 - 3y^2 - z^2.$$

*Soluzione:* Il sistema (lineare) ottenuto annullando le derivate prime:

$$\begin{cases} 1 + 2y - 2x = 0 \\ -1 + 2x - 6y = 0 \\ 4 - 2z = 0 \end{cases}$$

dà, come unico possibile estremante, il punto $\left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$. Calcoliamo allora le derivate seconde: $f''_{xx} = -2$, $f''_{yy} = -6$, $f''_{zz} = -2$, $f''_{xy} = 2$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yz} = 0$. Nel punto $\left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$ la matrice hessiana è data da:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Da $H_1 = -2 < 0$, $H_2 = 8 > 0$, $H_3 = H = -16 < 0$, segue che $\left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$ è un punto di massimo relativo. □