

# Compito di Metodi Matematici della Fisica

05/02/2020

1. Mostrare che la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(1-x^2)}$$

è sommabile, cioè  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , e calcolarne l'integrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx .$$

2. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < b$ . Dopo aver disegnato il grafico della funzione

$$f(t) = \Theta(t-a) - \Theta(t-b)$$

risolvere, facendo uso della trasformata di Laplace, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 . \end{cases}$$

3. Risolvere, facendo uso della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$4f(t) + \int_0^t f(x) dx + 3 \int_0^t f(t-x)e^x dx = e^t$$

ove  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  rappresenta la funzione incognita.

## Soluzioni

1. La funzione è integrabile perché in  $x = -1, 0, 1$  ha singolarità eliminabili (ivi il seno si annulla) e all'infinito è maggiorata dalla funzione  $1/|x|^3$ . Siccome la funzione seno diverge all'infinito immaginario in entrambi i semipiani, non si può chiudere il cammino su un grande semicerchio. Sfruttiamo il fatto che  $\sin(\pi x) = \text{Im} e^{i\pi x}$ . Non possiamo però portare  $\text{Im}$  fuori dall'integrale, perché  $e^{i\pi x}$  non si annulla in  $x = -1, 0, 1$ , quindi quelle che con il seno erano singolarità eliminabili, con l'esponenziale diventano poli semplici. In questo caso è sufficiente considerare il valore principale dell'integrale:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi x)}{x(1-x^2)} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{Im} e^{i\pi x}}{x(1-x^2)} dx = \text{VP} \int_{\mathbb{R}} \text{Im} \frac{e^{i\pi x}}{x(1-x^2)} dx = \text{Im VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\pi x}}{x(1-x^2)} dx .$$

Cerchiamo quindi di determinare

$$J := \text{VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\pi x}}{x(1-x^2)} dx$$

considerando l'integrale in campo complesso

$$\oint_{\gamma_{r,\varepsilon}} \frac{e^{i\pi z}}{z(1-z^2)} dz \equiv \oint_{\gamma_{r,\varepsilon}} g(z) dz$$

ove  $\gamma_{r,\varepsilon}$  è il circuito formato dal segmento  $[-r, r]$  con l'esclusione di piccoli intervalli di semiampiezza  $\varepsilon$  centrati nei poli semplici, da 3 piccoli semicerchi di raggio  $\varepsilon$  centrati nei poli semplici e situati nel semipiano superiore, ed infine dal grande semicerchio di raggio  $r$  e centrato nell'origine.

Poiché  $\lim_{z \rightarrow \infty} 1/[z(1-z^2)] = 0$ , per il lemma di Jordan l'integrale sul grande semicerchio (nel semipiano superiore!) tende a zero per  $r \rightarrow +\infty$ . Gli integrali sui piccoli semicerchi tendono, per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , a  $-i\pi$  per il residuo dell'integrando in ciascuno dei poli. L'integrale sugli intervalli dell'asse reale tende al valore principale  $J$ . Siccome il circuito non contiene singolarità, si ha che

$$0 = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \oint_{\gamma_{r,\varepsilon}} g(z) dz = (-i\pi)[\text{Res}(g, -1) + \text{Res}(g, 0) + \text{Res}(g, 1)] + \text{VP} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx .$$

Siccome

$$\begin{aligned} \text{Res}(g, -1) &= \text{Res}\left(-\frac{e^{i\pi z}}{z(z-1)(z+1)}, -1\right) = -\frac{e^{-i\pi}}{(-1)(-2)} = +\frac{1}{2} \\ \text{Res}(g, +1) &= +\frac{1}{2} \\ \text{Res}(g, 0) &= +1 \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{VP} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = i\pi 2 \implies I = \text{Im VP} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 2\pi .$$

2. La funzione  $f$  è la funzione caratteristica dell'intervallo  $[a, b]$ . Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri dell'equazione, troviamo

$$s^2 Y(s) - y'(0) - sy(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) = (s+1)^2 Y(s) - 3 = F(s)$$

$$\text{ove } Y(s) = [\mathcal{L}y](s)$$

$$F(s) = [\mathcal{L}f](s) = \int_a^b e^{-st} dt = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$

da cui si ricava

$$Y(s) = \frac{3 + (e^{-as} - e^{-bs})/s}{(s+1)^2}$$

con singolarità in  $s = 0$  ed  $s = -1$ . Quindi l'ascissa di convergenza di  $Y$  è  $\alpha_y = 0$ . Per calcolare  $y$  effettuiamo l'antitrasformata di Laplace ( $c > \alpha_y$ )

$$y(t) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{c-ir}^{c+ir} e^{st} Y(s) ds = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{c-ir}^{c+ir} \left[ \frac{3e^{st}}{(s+1)^2} + \frac{e^{s(t-a)}}{s(s+1)^2} - \frac{e^{s(t-b)}}{s(s+1)^2} \right] ds$$

A causa dei diversi comportamenti degli esponenziali nei 3 termini, conviene considerare i 3 termini separatamente.

i) Nel calcolo di  $y(t)$  è implicito considerare  $t \geq 0$ . In questo caso, nel primo termine possiamo chiudere il cammino di integrazione nel semipiano sinistro e si trova

$$y_1(t) = \text{Res} \left( \frac{3e^{st}}{(s+1)^2}, -1 \right) = \frac{d}{ds} 3e^{st} \Big|_{s=-1} = 3te^{-t}.$$

ii) Nel secondo termine, per  $t < a$  possiamo chiudere il cammino nel semipiano destro, dove non incontriamo singolarità, così che  $y_2(t < a) = 0$ . Per  $t > a$  possiamo chiudere a sinistra, ottenendo

$$y_2(t > a) = \text{Res} \left( \frac{e^{s(t-a)}}{s(s+1)^2}, -1 \right) + \text{Res} \left( \frac{e^{s(t-a)}}{s(s+1)^2}, 0 \right) = e^{a-t}(a-1-t) + 1$$

iii) Analogamente per il terzo termine, sostituendo  $a \rightarrow b$ .

In definitiva

$$y(t) = 3te^{-t} + [e^{a-t}(a-1-t) + 1]\Theta(t-a) - [e^{b-t}(b-1-t) + 1]\Theta(t-b).$$

3. Prendiamo la trasformata di Laplace dei due membri dell'equazione, osservando che il secondo integrale è la convoluzione tra la funzione incognita  $f$  e la funzione esponenziale  $g(t) = e^t$ . Indicando con le maiuscole le rispettive trasformate di Laplace, l'equazione diventa

$$4F(s) + \frac{F(s)}{s} + 3F(s)G(s) = G(s), \quad G(s) = [\mathcal{L}g](s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{G(s)}{4 + \frac{1}{s} + 3G(s)} = \frac{s}{4s^2 - 1} = \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 - (\frac{1}{2})^2}.$$

Calcolando l'antitrasformata di Laplace, oppure ricordando che  $[\mathcal{L} \cosh(at)](s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$  si ottiene

$$f(t) = \frac{1}{4} \cosh \left( \frac{t}{2} \right).$$