

La teoria della probabilità è il fondamento della **STATISTICA**, in quanto fornisce un mezzo per modellare la popolazione, gli esperimenti o tutto ciò che può essere considerato un fenomeno casuale.

Attraverso questi modelli gli statistici sono in grado di fare inferenza sulla popolazione, esaminando solo una parte del tutto.

### È fondamentale LA TEORIA DEGLI INSIEMI:

La probabilità è una funzione d'insieme e gli insiemi sono il dominio di questa funzione.

L'obiettivo degli statistici è trovare conclusioni su una popolazione effettuando un esperimento.

Per prima cosa bisogna identificare **SPAZIO CAMPIONARIO S**, cioè tutti i possibili risultati.

Gli spazi possono essere **numerabili** ( $n^\circ$  finito di elementi) oppure **non numerabili** ( $n^\circ$  infinito di elementi).

Ad esempio, nel lancio di una moneta, i possibili risultati sono 2: testa o croce.

L' **EVENTO** è una qualsiasi serie di possibili risultati di un esperimento. È un sottoinsieme dello spazio campionario S, incluso S stesso.

Quindi, Sia A un evento e sottoinsieme di S. Diciamo che un evento si verifica quando il risultato dell'esperimento appartiene ad A.

L'evento può avere anche più esiti, quindi basta che se ne verifichi uno per poter considerare l'evento realizzato.

- Esistono due importanti relazioni tra gli insiemi:

**Se A contenuto in B e x appartiene A allora x appartiene B (SOTTOINSIEME)**

**Se A = B e A contenuto in B allora B contenuto in A (EGUAGLIANZA)**

- Dati due eventi A e B, possiamo effettuare delle **operazioni elementari**:

**UNIONE**, cioè l'insieme degli elementi che appartengono ad A, a B o ad entrambi  
 $A \cup B = \{ x \text{ tale che } x \text{ appartiene ad A } \cup x \text{ appartiene B } \}$

**INTERSEZIONE**, cioè l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A e sia a B  
 $A \cap B = \{ x \text{ tale che } x \text{ appartiene ad A } \cap x \text{ appartiene a B } \}$

**COMPLEMENTAZIONE**, il complementare di A è l'insieme degli elementi che non appartengono ad A

A complementare =  $\{ x \text{ tale che } x \text{ non appartiene ad A} \}$

### TEOREMA:

Dati gli eventi A, B e C, definiti in uno spazio campionario S, valgono le seguenti proprietà:

**PROPRIETA' COMMUTATIVA :**  $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

**PROPRIETA' ASSOCIATIVA :**  $A \cup ( B \cup C ) = ( A \cup B ) \cup C$

$A \cap ( B \cap C ) = ( A \cap B ) \cap C$

**PROPRIETA' DISTRIBUTIVA :**  $A \cap ( B \cup C ) = ( A \cap B ) \cup ( A \cap C )$

$A \cup ( B \cap C ) = ( A \cup B ) \cap ( A \cup C )$

**LEGGI DI MORGAN:** ( A unito B ) complementare = A complementare intersecato B complementare  
 ( A intersecato B ) complementare = A complementare unito B complementare

#### DEFINIZIONE:

Due eventi A e B si dicono **DISGIUNTI o MUTUALMENTE ESCLUSIVI** se non hanno nessun punto in comune, quindi: **A intersecato B =  $\emptyset$**

Ad esempio A : numeri pari B : numeri dispari

#### LE BASI DELLA TEORIA DELLA PROBABILITA':

Quando viene effettuato un esperimento , l'esito appartiene allo spazio campionario. Se l'esperimento viene ripetuto un certo n° di volte, possono verificarsi esiti differenti in ogni prova oppure alcuni risultati possono ripetersi nelle varie prove. Gli esiti più probabili sono quelli che si verificano più spesso, cioè hanno una maggiore frequenza.

#### FONDAMENTI ASSIOMATICI:

Per ogni evento A nello spazio campionario, vogliamo associare ad A un numero tra 0 e 1 che chiamiamo probabilità di A -> P(A).

Non è possibile definire il dominio di P (cioè l'insieme in cui gli argomenti della funzione sono definiti) con ogni sottoinsieme di S.

#### DEFINIZIONE:

Una serie di sottoinsiemi S viene definito **SIGMA ALGEBRA O CAMPO DI BOREL**, indicato con B, se soddisfa 3 condizioni:

- **L'insieme vuoto è un elemento di B**
- **B è un insieme chiuso per complementazione**
- **B è un insieme chiuso per unioni numerabili**

Inoltre, l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualsiasi insieme.  **$\emptyset$  contenuto in S**

Dal momento che **S =  $\emptyset$  complementare**, S è sempre contenuto in B.

Inoltre, dalle leggi di morgan ricaviamo che B è un insieme chiuso per intersezioni numerabili.

#### DEFINIZIONE:

Dato uno spazio campionario S e un sigma algebra B ad esso associato, la funzione di probabilità è una funzione P con dominio B che soddisfa gli **ASSIOMI DI**

#### KOLMOGOROV:

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A$  appartenente B
- la probabilità dell'evento certo è pari a 1
- La probabilità dell'unione di un numero finito di eventi disgiunti è pari alla somma delle probabilità di questi eventi

Quindi, ogni funzione che soddisfa questi 3 assiomi è chiamata funzione di probabilità.

#### TEOREMA:

Sia S un insieme finito,

Sia B un qualsiasi sigma algebra del sottoinsieme di S,

Sia  $p_1, p_2 \dots p_n$  una serie di numeri non negativi la cui somma è pari a 1:

Per qualsiasi A appartenente a B abbiamo che la probabilità di A è uguale alla somma delle probabilità di  $p_i$ .

Inoltre, la somma di un insieme vuoto è 0.

Quindi, P è una funzione di probabilità su B e questo rimane valido anche se S risulta essere un insieme numerabile.

#### CALCOLO DELLA PROBABILITA'

#### TEOREMA:

Se P è una funzione di probabilità e A è un qualsiasi insieme di B, allora:

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A) \leq 1$$

$$P(\text{A complementare}) = 1 - P(A)$$

**TEOREMA:**

Se  $P$  è una funzione di probabilità e  $A$  e  $B$  sono due qualsiasi insiemi di  $B$ , allora:

$$P(B \text{ intersecato } A \text{ complementare}) = P(B) - P(A \text{ intersecato } B)$$

$$P(A \text{ unito } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ intersecato } B)$$

Se  $A$  è sottoinsieme di  $B$  allora  $P(A) \leq P(B)$

Un esempio è la **DISUGUAGLIANZA DI BONFERRONI:  $P(A \text{ intersecato } B) \geq P(A) + P(B) - 1$**

è utile quando è difficile calcolare la probabilità dell'intersezione, ma si vuole comunque avere un'idea della grandezza della probabilità.

**TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO:**

Il **calcolo** è uno strumento per costruire assegnazioni di probabilità su spazi campionari finiti.

Se un lavoro consiste in  $k$  differenti compiti, il cui compito  $i$ -esimo può essere svolto in  $n_i$  modi,

con  $i = 1, 2, \dots, k$ , allora il lavoro può essere svolto in  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  modi.

**DIMOSTRAZIONE:**

è sufficiente provare il teorema per  $k=2$ . Il 1° compito può essere svolto in 1 modo, il 2° compito può essere svolto in 2 modi. Quindi il lavoro può essere svolto in  $1 \times 2 = 2$  modi.

**DEFINIZIONE:**

Per un numero non-negativo intero  $n$ , esiste un  $n$  fattoriale, che è uguale al prodotto di tutti i numeri positivi  $\leq n$

Inoltre, **0 fattoriale = 1**

**DEFINIZIONE:**

Per due numeri non-negativi interi  $n$  e  $r$ , dove  $n \geq r$ , abbiamo che  **$n$  su  $r$**  è uguale a:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

**PROBABILITA' CONDIZIONATA:**

La probabilità condizionata esprime la probabilità che si verifichi l'evento  $A$  nell'ipotesi in cui si sia verificato l'evento  $B$ .

**DEFINIZIONE:**

se  $A$  e  $B$  sono eventi in  $S$  e  $P(B) > 0$ , allora la probabilità condizionata di  $A$  dato  $B$  è pari al rapporto tra

$P(A \text{ intersecato } B)$  e  $P(B)$ .

- Se  $B$  diventa lo spazio campionario, la probabilità condizionata di  $B$  dato  $B$  è = 1

- Se  $A$  e  $B$  sono insiemi disgiunti, la probabilità condizionata è = 0

**TEOREMA DI BAYES:**

Siano  $A$  e  $B$  due eventi dipendenti, abbiamo che la probabilità condizionata di  $A$  dato  $B$  è pari a:

$P(A)$  moltiplicato per  $P(B \text{ dato } A)$  tutto fratto  $P(B)$

**DEFINIZIONE:**

Due eventi,  $A$  e  $B$  sono **indipendenti** se  **$P(A \text{ intersecato } B) = P(A) \times P(B)$**

Quindi, significa che il verificarsi di  $A$  non modifica la probabilità di verificarsi di  $B$  (giri della roulette).

**TEOREMA:**

se  $A$  e  $B$  sono eventi indipendenti, allora sono anche indipendenti:

- **A e B complementare**
- **A complementare e B**
- **A complementare e B complementare**

**VARIABILI CASUALI:**

Una **variabile casuale** è una funzione definita sullo spazio campionario  $S$  all'interno dei numeri reali.

Ad ogni variabile casuale  $X$  si associa una **Funzione di distribuzione cumulata**, definita come  $F(x) = P(X \leq x)$  per ogni  $x$

**TEOREMA:**

La funzione  $F(x)$  è una funzione di distribuzione cumulata se e solo se

$$-\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

-  **$F(x)$  è una funzione non decrescente di  $x$**

-  **$F(x)$  è continua a destra, per ogni numero  $x_0$  tale che  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$**   $\square$

**DEFINIZIONE:**

Le variabili casuali  $X$  e  $Y$  sono identicamente distribuite se, per ogni insieme  $A$  appartenente a  $B$ ,

la  $P(X \text{ appartenente } A) = P(Y \text{ appartenente } A)$ . Ma non per forza devono essere uguali.

**TEOREMA:**

Le affermazioni "**le variabili casuali  $X$  e  $Y$  sono identicamente distribuite**" e " **$F_X(x) = F_Y(x)$  per ogni  $x$** " sono equivalenti.

**FUNZIONE DI MASSA E DENSITA'**

Associata alla variabile casuale  $X$  c'è anche la funzione di densità (se la variabile casuale è continua) oppure di massa (se la variabile casuale è discreta).

Quindi, la funzione di probabilità di massa di una variabile casuale discreta  $X$  è data da:

$$f(x) = P(X=x) \quad \text{per ogni } x$$

**TEOREMA:**

una funzione  $f(x)$  è una funzione di probabilità di massa se e solo se:

-  **$f(x) \geq 0$  per ogni  $x$**

-  **$\sum f(x) = 1$**