Metodi Matematici (CLEC L-Z) – Prova scritta dell'11 febbraio 2020

Cognome **Nome** **Matricola**

Riporta le risposte, complete di passaggi e motivazioni, esclusivamente nello spazio che segue la domanda o nel foglio bianco allegato.

Esercizio 1. Sia data la funzione $f(x) = \log\left(\frac{1+3x}{2x}\right)$.

a. Indicarne: dominio; intersezioni con gli assi; segno; eventuali asintoti orizzontali e verticali.

b. Indicare la derivata prima di f e disegnare il grafico di f.

c. Indicare il codominio di f.

Esercizio 2. Siano:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & h \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix}.$$

a. Risolvere il sistema lineare $A \cdot x = b$, al variare del parametro h.

b. Risolvere il sistema lineare omogeneo $A \cdot x = 0$, al variare del parametro h.

Esercizio 3. Sia data la funzione $f(x,y) = 2^{x^2y-4y+x}$.

a. Disegnare il dominio di f e provare che f non è limitata superiormente.

b. Indicare gli eventuali punti stazionari di f.

c. Determinare i punti di massimo e minimo assoluto di f nel rettangolo R di vertici $A = (0,-1), B = (3,-1), C = (3,1), D = (0,1)$. Indicare poi il codominio di f ristretta al rettangolo R.

Esercizio 4. (Facoltativo: da risolvere solo dopo aver risolto i tre esercizi precedenti)
Mostrare che non esiste alcun $k \in \mathbf{R}$ tale che la retta $y - x - k = 0$ sia tangente alla curva di livello 1 della funzione $f(x, y) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$.

Metodi Matematici (CLEC L-Z) – Prova scritta del 13 gennaio 2020

Cognome **Nome** **Matricola**

Riporta le risposte, complete di passaggi e motivazioni, esclusivamente nello spazio che segue la domanda o nel foglio bianco allegato.

Esercizio 1. Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{4x-3}\,e^{3x}$.

a. Indicarne dominio, intersezioni con gli assi, segno ed eventuali asintoti orizzontali e verticali.

b. Indicare la derivata prima di f e disegnare il grafico di f.

c. Indicare il codominio di f.

Esercizio 2. Siano:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ k & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -k \end{pmatrix}.$$

a. Risolvere il sistema lineare $A \cdot x = b$, al variare del parametro k.

b. Risolvere il sistema lineare omogeneo $A \cdot x = 0$, al variare del parametro k.

Esercizio 3. Sia data la funzione $f(x, y) = \log(xy - 2y) + 2$.

a. Disegnare il suo dominio, specificando se è convesso, e la curva di livello 2.

b. Provare che f non è limitata superiormente.

c. Determinare i punti di massimo e minimo assoluto di f nel triangolo T di vertici A=$(3, 1)$, B=$(5, 1)$, C=$(3, 3)$. Indicare poi il codominio di f ristretta al triangolo T.

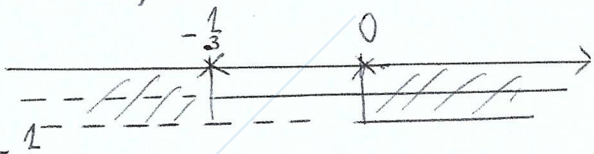
Esercizio 4. (Facoltativo: da risolvere solo dopo aver risolto i tre esercizi precedenti)

Sia data la funzione $f(x) = \sqrt{e^{tx-2tx^2}}$, dove t è un parametro reale.
Si studi la monotonia di f ed il suo comportamento a $+\infty$ e a $-\infty$, al variare di t.

METODI MATEMATICI - 11 FEBBRAIO 2020

Ex. 1 $f(x) = \log\left(\frac{1+3x}{2x}\right)$

a. $\frac{1+3x}{2x} > 0$



$1+3x > 0$ per $x > -\frac{1}{3}$

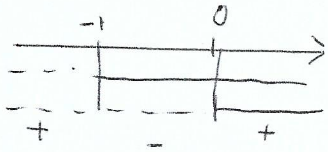
$2x > 0$ per $x > 0$

$dom(f) = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

Non ci sono intersezioni con l'asse y perché $x = 0 \notin dom(f)$

$f(x) = 0 \iff \log\left(\frac{1+3x}{2x}\right) = 0 = \log 1 \iff \frac{1+3x}{2x} = 1 \iff \frac{1+3x-2x}{2x} = 0 \iff x = -1 \quad P = (-1, 0)$

$f(x) > 0 \iff \log\left(\frac{1+3x}{2x}\right) > 0 = \log 1 \iff \frac{1+3x}{2x} > 1 \iff \frac{x+1}{2x} > 0$



f è positiva su $\left]-\infty, -1\right[$ e su $\left]0, +\infty\right[$

$\lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{1+3x}{2x}\right) = \log\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ è un asintoto orizzontale destro

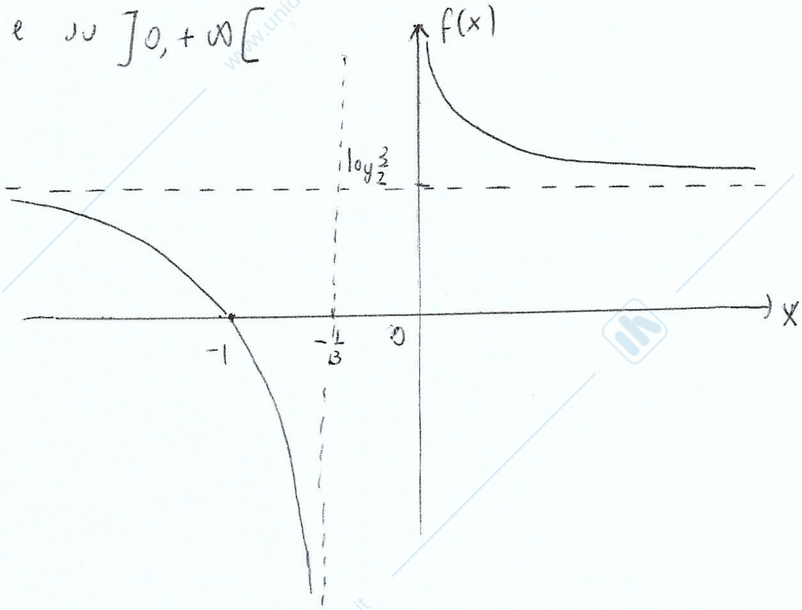
$\lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{1+3x}{2x}\right) = \log\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ è un asintoto orizzontale sinistro

$\lim_{x \to 0^+} \log\left(\frac{1+3x}{2x}\right) = +\infty \Rightarrow x = 0$ è un asintoto verticale

$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} \log\left(\frac{1+3x}{2x}\right) = -\infty \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ è un asintoto verticale

b. $f'(x) = \frac{2x}{1+3x} \cdot \left[\frac{3 \cdot 2x - 2(1+3x)}{4x^2}\right] = -\frac{2}{2x(1+3x)} < 0, \quad \forall x \in dom(f)$

f è stiett. decrescente su $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ e su $\left]0, +\infty\right[$



c. $Cod(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\log\frac{3}{2}\right\}$

Ex. 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & h \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix}$$

a. $|A| = -2(1-3h) + 4(3-4) = -2 + 6h - 4 = -6 + 6h$

Se $h \neq 1$, il sistema è determinato e l'unica soluzione è data da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & h \\ 2h & 3 & 1 \end{vmatrix}}{6h-6} = \frac{-4(1-3h)+4(-2h)}{6h-6} = \frac{-4+12h-8h}{6h-6} = \frac{4h-4}{6h-6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & h \\ 4 & 2h & 1 \end{vmatrix}}{6h-6} = \frac{4(1-4h)-2h(-2h-4)}{6h-6} = \frac{4-16h+4h^2+8h}{6h-6} = \frac{4h^2-8h+4}{6h-6} = \frac{2}{3}(h-1)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2h \end{vmatrix}}{6h-6} = \frac{-2(2h)-4(3-4)}{6h-6} = \frac{-4h+4}{6h-6} = \frac{4(1-h)}{6(h-1)} = -\frac{2}{3}$$

Se $h = 1$, $r(A) = 2$ perché $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$$A|b = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2(2) - 4(3-4) = -4 + 4 = 0 \Rightarrow r(A|b) = 2 \Rightarrow$$ il sistema è indeterminato.

$$\begin{cases} -2x = -4 - 4z \\ x + y = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 + 2z \\ y = -z - 2 - 2z = -3z - 2 \end{cases} \qquad (2+2z, -3z-2, z),\ z \in \mathbb{R}$$

b. Se $h \neq 1$, il sistema ha solo la soluzione nulla: $(0, 0, 0)$

Se $h = 1$, il sistema ha infinite soluzioni:

$$\begin{cases} -2x = -4z \\ x + y = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2z \\ y = -z - x = -3z \end{cases} \qquad (2z, -3z, z),\ z \in \mathbb{R}$$

Ex. 3 $\quad f(x,y) = 2^{x^2y-4y+x}$

a. $\boxed{\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2}$

Dominio convesso e non limitato

Sulla restrizione $y=0$:

$f(x,0) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty \Rightarrow$ f NON è limitata superiormente.

b. $f'_x(x,y) = 2^{x^2y-4y+x}\log 2\,(2xy+1)$

$f'_y(x,y) = 2^{x^2y-4y+x}\log 2\,(x^2-4)$

$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2xy+1=0 \\ x^2-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{1}{4} \\ x=2 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} y=\frac{1}{4} \\ x=-2 \end{cases}$

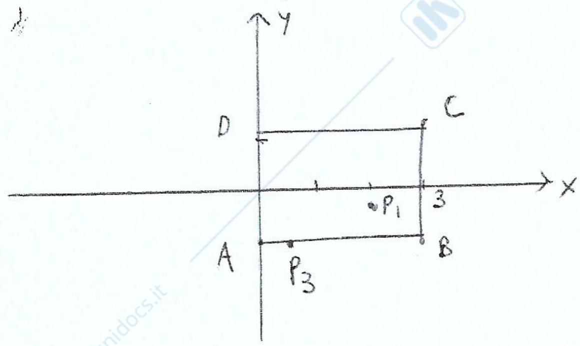
f ha due punti stazionari : $\boxed{P_1 = \left(2,-\frac{1}{4}\right)}$ e $\boxed{P_2 = \left(-2,\frac{1}{4}\right)}$

c. P_1 è un punto stazionario interno al rettangolo R

Lato $\overline{AB}$ $\quad y=-1,\ x\in[0,3]$

$f_{\overline{AB}} = 2^{-x^2+4+x}$

$f'(x) = 2^{-x^2+4+x}(-2x+1)\log 2 = 0 \iff x=\frac{1}{2} \qquad P_3 = \left(\frac{1}{2},-1\right)$



Lato $\overline{BC}$ $\quad x=3,\ y\in[-1,1]$

$f_{\overline{BC}} = 2^{9y-4y+3} = 2^{5y+3}$

$f'(y) = 2^{5y+3}\log 2\cdot 5 \neq 0$

Lato $\overline{CD}$ $\quad y=1,\ x\in[0,3]$

$f_{\overline{CD}} = 2^{x^2-4+x}$

$f'(x) = 2^{x^2+x-4}\log 2\,(2x+1) = 0 \iff x=-\frac{1}{2}$ non accettabile

Lato $\overline{AD}$ $\quad x=0,\ y\in[-1,1]$

$f_{\overline{AD}} = 2^{-4y}$

$f'(y) = 2^{-4y}\log 2\,(-4) \neq 0$

I candidati sono : A, B, C, D, P_1, P_3

$f(A) = 2^4$

$f(B) = 2^{-2}$

$\boxed{f(C) = 2^8 \text{ max. assoluto}}$

$\boxed{f(D) = 2^{-4} \text{ min. assoluto}}$

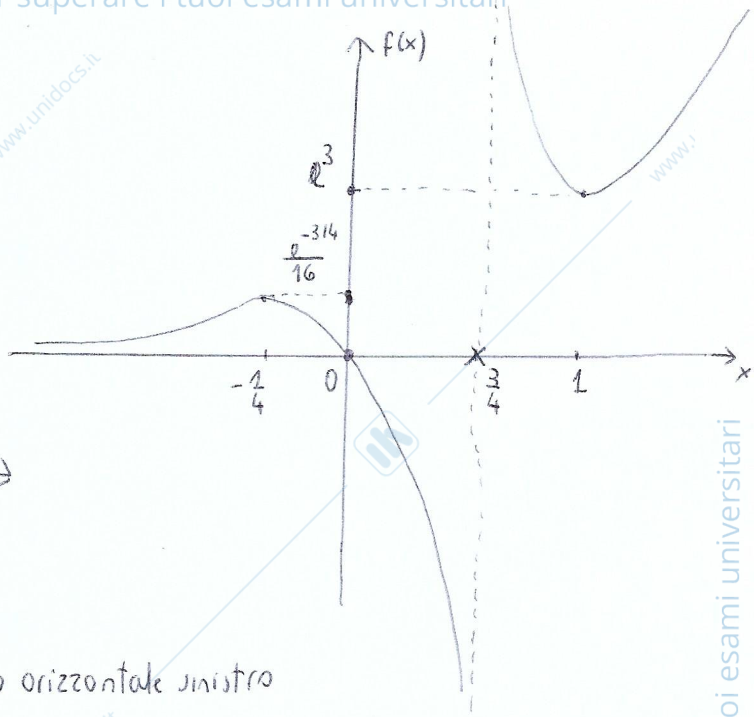
$f(P_1) = 2^2$

$f(P_3) = 2^{17/4}$

$\boxed{\mathrm{Cod}_f R = [2^{-4}, 2^8]}$

13 GENNAIO 2020

Ex. 1 $f(x) = e^{3x} \dfrac{x}{4x-3}$



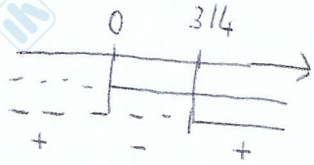
a. $4x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{4}$

$dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$

$f(0) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{4x-3} > 0$



$\lim_{x \to +\infty} e^{3x} \dfrac{x}{4x-3} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^{3x} \dfrac{x}{4x-3} = 0 \Rightarrow y = 0$ è un asintoto orizzontale sinistro

$\lim_{x \to \frac{3}{4}^+} e^{3x} \dfrac{x}{4x-3} = +\infty \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ è un asintoto verticale

$\lim_{x \to \frac{3}{4}^-} e^{3x} \dfrac{x}{4x-3} = -\infty$

b. f è derivabile in ogni punto del suo dominio

$f'(x) = 3e^{3x} \dfrac{x}{4x-3} + e^{3x}\left[\dfrac{4x-3-4x}{(4x-3)^2}\right] = \dfrac{3x(4x-3)-3}{(4x-3)^2} e^{3x} = \dfrac{12x^2-9x-3}{(4x-3)^2} e^{3x} =$

$= \dfrac{3e^{3x}}{(4x-3)^2} \cdot (4x^2-3x-1)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^2-3x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \lor x < -\frac{1}{4}$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 5}{8} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$

f è strett. crescente su $]1, +\infty[$ e su $]-\infty, -\frac{1}{4}[$

$x_0 = 1$ è un punto di minimo relativo; $f(1) = e^3$

$x_1 = -\frac{1}{4}$ è un punto di massimo relativo; $f(-\frac{1}{4}) = \dfrac{e^{-\frac{3}{4}}}{16}$

c. $Cod(f) = \left]-\infty, \dfrac{e^{-3/4}}{16}\right] \cup [e^3, +\infty[$

Ex.2

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ k & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -k \end{pmatrix}$$

a. $|A| = -6-2(2k+1) = -6-4k-2 = -8-4k$

- Se $k \neq -2$, il sistema è determinato e la soluzione è data da:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ -k & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-8-4k} = \frac{4(-6)-2(-10+k)}{-8-4k} = \frac{-24+20-2k}{-8-4k} = \frac{-4-2k}{-8-4k} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ k & -5 & 3 \\ -1 & -k & 0 \end{vmatrix}}{-8-4k} = \frac{-2(-k^2-5)-3(-k+4)}{-8-4k} = \frac{2k^2+10+3k-12}{-8-4k} = \frac{2k^2+3k-2}{-8-4k} =$$

$$= \frac{2(k+2)(k-\frac{1}{2})}{-4(k+2)} = \frac{2k-1}{-4} = \boxed{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ k & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -k \end{vmatrix}}{-8-4k} = \frac{-k+10+4(2k+1)}{-8-4k} = \frac{-k+10+8k+4}{-8-4k} = \frac{7k+14}{-8-4k} = \frac{7(k+2)}{-4(k+2)} = \boxed{-\frac{7}{4}}$$

- Se $k=-2$, $r(A)=2$ perché $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$A|b=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+10+4(-4+1) = 0 \Rightarrow r(A|b)=2$$

Poiché $r(A)=r(A|b)=2$, il sistema è indeterminato:

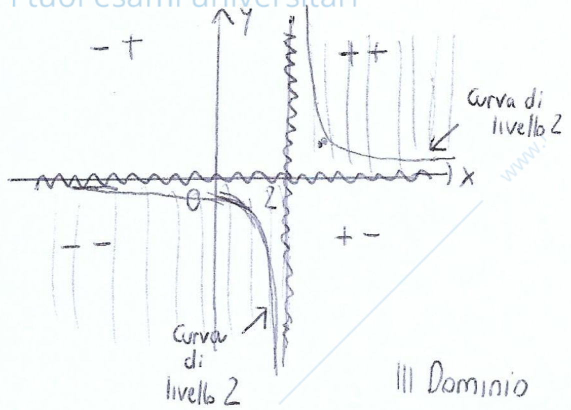
$$\begin{cases} x = 4+2z \\ -2x+y = -5-3z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4+2z \\ y = -5-3z+8+4z = z+3 \end{cases} \qquad \boxed{(4+2z,\ 3+z,\ z),\ z\in\mathbb{R}}$$

b. Se $k \neq -2$, il sistema ha solo la soluzione nulla $\boxed{(0,0,0)}$.

Se $k=-2$, il sistema ha infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x = 2z \\ -2x+y = -3z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z+4z = z \end{cases} \qquad \boxed{(2z,\ z,\ z),\ z\in\mathbb{R}}$$

Ex. 3 $\quad f(x,y) = \log(xy - 2y) + 2$



a. $xy - 2y > 0$ $\qquad$ Dominio non convesso

$y(x-2) > 0$

$C_2(f) = \{(x,y) \in dom(f) : f(x,y) = 2\} =$

$= \{(x,y) \in dom(f) : xy - 2y = 1\} =$

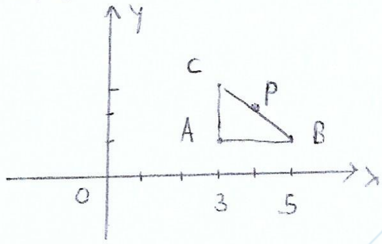
$= \{(x,y) \in dom(f) : y = \frac{1}{x-2}\}$

b. Consideriamo la restrizione $y = 1$

$f(x,1) = \log(x-2) + 2, \quad x \in]2, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x,1) = +\infty \Rightarrow f$ non è limitata superiormente

$A = (3,1)$
$B = (5,1)$
$C = (3,3)$



c. $f'_x(x,y) = \frac{y}{xy-2y}$

$f'_y(x,y) = \frac{x-2}{xy-2y}$

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ $\quad$ Il punto $(2,0)$ non è accettabile perché non appartiene al dominio.

f non ha quindi punti stazionari. Esaminiamo i punti che non sono interni al triangolo, ovvero i lati.

$\overline{AB} \quad y = 1, \quad x \in [3,5]$

$f_{\overline{AB}} = \log(x-2) + 2 \qquad f'(x) = \frac{1}{x-2} \neq 0, \ \forall x \in [3,5]$

$\overline{AC} \quad x = 3, \quad y \in [1,3]$

$f_{\overline{AC}} = \log(3y - 2y) + 2 = \log y + 2 \qquad f'(y) = \frac{1}{y} \neq 0, \ \forall y \in [1,3]$

$\overline{BC} \qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{3-5} = \frac{2}{-2} = -1 \qquad y = -x + q \qquad 1 = -5 + q \Rightarrow q = 6$

$y = -x + 6, \quad x \in [3,5]$

$f_{\overline{BC}} = f(x, -x+6) = \log(x(6-x) + 2x - 12) + 2 = \log(6x - x^2 + 2x - 12) + 2 =$

$= \log(-x^2 + 8x - 12) + 2 \qquad f'(x) = \frac{-2x+8}{-x^2+8x-12} = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$\boxed{P = (4,2)}$

$f(A) = f(3,1) = \log(1) + 2 \leftarrow$ min. ass.

$f(B) = f(5,1) = \log(3) + 2$

$f(C) = f(3,3) = \log(3) + 2$

$f(P) = f(4,2) = \log(4) + 2 \leftarrow$ max. ass.

$Cod_T f = [\min_T f, \max_T f] = [2, \log 4 + 2]$