Teoria del rischio

Introduzione alla teoria del rischio (Università degli Studi di Firenze)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Introduzione alla teoria delle decisioni in condizioni di rischio

Gianluca Iannucci

Dipartimento di Scienze per l'Economia e l'Impresa
Scuola di Economia e Management
Università degli studi di Firenze

12 ottobre 2022

Indice

Capitolo 2

L'avversione al rischio

Iniziamo il nostro percorso introducendo i concetti di base del modello delle preferenze individuali in condizioni di aleatorietà. Ad esser precisi, il termine aleatorietà è abbastanza generico e comprende due principali elementi, il rischio e l'incertezza. Si sceglie in condizioni di rischio quando la probabilità che un evento si verifichi è affidabile, pertanto il metodo di scelta è oggettivo (si pensi al lancio di un dado non truccato: ad ogni lancio la probabilità che esca un determinato numero è sempre 1/6). Si sceglie in condizioni di incertezza se le probabilità sono del tutto inaffidabili e il metodo di scelta è soggettivo (si pensi ad un sacchetto contente 4 palline che possono essere bianche o nere: la probabilità che venga estratta una pallina nera dipende dalla distribuzione dei due tipi che non conosciamo). Spesso si è di fronte a scelte in condizioni miste, ovvero nonostante non si abbiano tutte le informazioni, si è in grado di scegliere formulando probabilità affidabili (si pensi alle operazioni finanziarie). Ovviamente, se la scelta avviene usufruendo di probabilità affidabili, allora siamo in condizioni di rischio. In queste dispense si farà sempre riferimento alle scelte in condizioni di rischio e quando introdurremo l'incertezza lo faremo assegnando ad essa delle probabilità predefinite.

Il comportamento umano nei confronti del rischio dipende fortemente dall'avversione ad esso. Gli individui, in media, valutano le potenziali perdite più delle potenziali vincite, con la conseguenza che l'aspettativa matematica non è uno strumento adeguato per scegliere in condizioni di rischio. Tenere in conto dell'avversione al rischio significa usare uno strumento leggermente di-

Tabella 2.1
Paradosso di San Pietroburgo

n	1	2	3	...	10	...	20	...
x_n	2	4	8	...	1024	...	$\simeq 1mln$	...
p_n	50%	25%	12.5%	...	0.098%	...	0.000009%	...

verso ed attento a valutazioni soggettive, come l'utilità attesa, che consente all'agente di valutare il rischio, quanto si è disposti a spendere per coprirlo, e quanto si è avversi.

2.1 Oltre l'aspettativa matematica

Nel 1738, il matematico svizzero Daniel Bernoulli scrive l'articolo *Specimen theoriae novae de mensura sorti*, tradotto in inglese nel 1954. L'obiettivo dell'articolo è mostrare come due persone che affrontano la stessa lotteria possano valutarla diversamente a causa di differenze nella psicologia. L'idea è abbastanza nuova, dato che famosi scienziati prima di lui (tra questi Pascal e Fermat) avevano concluso che il valore di una lotteria è pari all'aspettativa matematica e pertanto la scelta è uguale per tutti gli individui, indipendentemente dalle attitudini al rischio.

Al fine di giustificare la sua idea, Bernoulli fornisce tre esempi. Il più famoso è il "paradosso di San Pietroburgo", e mette in risalto il ruolo della psicologia nelle scelte in condizioni di rischio. E' il seguente. Peter lancia una moneta ripetutamente fino a quando non esce testa per la prima volta. Peter pagherà a Paul 2 ducati se dovesse uscire testa al primo lancio, 4 ducati se dovesse uscire testa al secondo lancio, 8 ducati se dovesse uscire testa al terzo lancio, e così via, raddoppiando il pagamento per ogni lancio addizionale necessario affinché esca testa per la prima volta. Adesso ci chiediamo: "Quanto è disposto Paul a pagare Peter per accettare di giocare questo gioco?" La risposta non è univoca, perché ognuno di noi ha un'attitudine diversa nei confronti del rischio. Secondo Bernoulli, pochi sarebbero disposti a spendere più di tanto per giocare. In effetti, già pagare 8 euro sembra eccessivo: la probabilità che la vincita superi la somma versata è solo 12.5% (si veda Table 2.1). Il criterio della media, quindi, non è universale.

Si seguirà un altro esempio sempre esposto in Bernoulli (1954), meno famoso del paradosso di San Pietroburgo, che riguarda le scelte di un mercante di nome Sempronio, il quale possiede beni nel suo paese di residenza per un totale di 4000 ducati e beni per un valore di altri 8000 ducati in un paese estero il cui unico collegamento possibile è via mare.[1] Si supponga che Sempronio voglia rimpatriare i propri beni. Tuttavia, per esperienza si sa che ogni due navi una affonda nel tragitto. Pertanto, si sta affermando che Sempronio opera in condizioni di rischio con la sua ricchezza. Tale ricchezza può essere rappresentata da una lotteria. La lotteria di Sempronio assume un valore pari a 4000 ducati (ovvero, 4000 + 0) con probabilità 1/2 se la nave affonda, oppure 12000 ducati (ovvero, 4000 + 8000) con probabilità 1/2 se la nave arriva a destinazione. Denotiamo tale lotteria distribuita come:

$$\tilde{a} = \left(4000, \frac{1}{2};\ 12000, \frac{1}{2}\right)$$

Il suo valore atteso è:

$$E\tilde{a} = \frac{1}{2} \cdot 4000 + \frac{1}{2} \cdot 12000 = 8000 \text{ ducati}$$

Supponiamo che Sempronio invece di mettere tutti i suoi 8000 ducati in una sola nave li distribuisca equamente in due navi. Assumendo che le navi seguano un indipendente ma equamente pericoloso percorso, Sempronio ora affronta una più diversificata lotteria, distribuita come

$$\tilde{b} = \left(4000, \frac{1}{4};\ 8000, \frac{1}{2};\ 12000, \frac{1}{4}\right)$$

Sono possibili quindi tre esiti: i) tutte e due le navi affondano, ii) una sola arriva a destinazione, iii) tutte e due arrivano a destinazione. Siccome i due rischi sono indipendenti, la probabilità di questi eventi congiunti è uguale al prodotto degli eventi presi individualmente.[2] Pertanto, la probabilità che entrambe le navi affondino è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Lo stesso vale per la probabilità congiunta che entrambe le navi arrivino a destinazione. Diversamente, la probabilità che una navi affondi e l'altra arrivi a destinazione è pari a $\frac{1}{2}$, ovvero il complemento a 1 degli altri due esiti con probabilità $\frac{1}{4}$, ovvero $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

[1] Si sono modificate le probabilità dell'esempio originale di Bernoulli per semplificare i conti.

[2] Gli eventi $A, B \in \mathcal{A}$ sono indipendenti se e solo se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Essendo universalmente riconosciuto che la diversificazione sia una buona pratica, ci aspetteremmo che il valore atteso associato a $\tilde{b}$ sia maggiore di quello associato a $\tilde{a}$. Tuttavia, se calcoliamo il valore atteso, otteniamo

$$E\tilde{b} = \frac{1}{4} \cdot 4000 + \frac{1}{2} \cdot 8000 + \frac{1}{4} \cdot 12000 = 8000 \text{ ducati}$$

esattamente lo stesso valore di $E\tilde{a}$. Pertanto, se Sempronio misurasse il suo benessere solo in base alla sua ricchezza futura attesa sarebbe indifferente tra le due lotterie, ovvero tra diversificare e non diversificare. Ma allora perché la maggior parte delle persone preferirebbe la lotteria $\tilde{b}$ a $\tilde{a}$? Questo esempio, così come il paradosso di San Pietroburgo esposto in precedenza, evidenzia il limite dell'approccio dell'aspettativa matematica nel prendere decisioni in condizioni di rischio.

Bernoulli, infatti, dimostra come il valore atteso di una lotteria non è uno strumento adeguato per la misura del suo valore. Il matematico suggerisce che una lotteria andrebbe valutata in base all'utilità attesa che essa genera, ovvero l'aspettativa dell'utilità della ricchezza. Questo perché, ciò che realmente conta per il decisore è quanto sia soddisfatto o quanto può ricevere dall'esito monetario, piuttosto che l'esito monetario stesso. La relazione tra esito monetario e grado di soddisfazione può essere rappresentato da una funzione di utilità $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che per ogni livello di ricchezza x è associato un livello di soddisfazione o utilità, $u(x)$. Ovviamente, questo livello di soddisfazione deriva dal consumo dei beni e servizi che il decisore può acquistare con la ricchezza x. Mentre gli esiti sono oggettivi, la funzione di utilità è soggettiva e specifica per ogni decisore, in relazione ai suoi gusti e alle sue preferenze. Si assume (razionalmente) che la funzione di utilità sia crescente all'aumentare della ricchezza. Inoltre, Bernoulli argomenta che l'utilità non solo è crescente ma anche concava in x.

Nell'esempio di Sempronio, Bernoulli assume che la funzione di utilità sia $u(x) = \sqrt{x}$, quindi crescente e concava in x (dato che $u'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ e $u''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$; pertanto l'utilità marginale è decrescente). Usando tale funzione nel confrontare le lotterie $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ abbiamo:

$$Eu(\tilde{a}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4000} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12000} = 86.4$$
$$Eu(\tilde{b}) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4000} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8000} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{12000} = 87.9$$

Il decisore preferisce quindi $\tilde{b}$ ad $\tilde{a}$ in quanto genera un'utilità attesa maggiore.

2.2 Definizione dell'avversione al rischio

Assumiamo che il decisore viva per un solo periodo, il che implica che usa immediatamente tutta la sua ricchezza per acquistare beni e servizi.

Definizione 2.1 *Siano $\tilde{x} : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria e $u : X \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$. Un agente è avverso al rischio se, per ogni x, la seguente disuguaglianza è rispettata*

$$Eu(\tilde{x}) \leqslant u(E\tilde{x}) \tag{2.1}$$

ovvero l'utilità certa $u(E\tilde{x})$ è sempre maggiore dell'utilità incerta $Eu(\tilde{x})$.

Dalla nostra definizione si deduce che un agente avverso al rischio preferisce sempre il certo all'incerto. Questo perché, essendo avverso al rischio, valuta le potenziali perdite più delle potenziali vincite (come si nota, tale ragionamento è soggettivo).

Torniamo al problema di Sempronio con una sola nave. La ricchezza iniziale è pari a 4000 ducati, e il payoff $\tilde{x}$ assume valore 8000 (la nave arriva a destinazione) o 0 (la nave affonda) con eguale probabilità. Se Sempronio è avverso al rischio, allora[3]

$$\frac{1}{2}u(12000) + \frac{1}{2}u(4000) \leqslant u(8000) \tag{2.2}$$

Il punto f della Fig. 2.1 rappresenta il lato destro della disuguaglianza (2.1) sulla curva di utilità u. Il lato sinistro è, invece, rappresentato dal punto c. Non è un caso che i due triangoli abc e cde siano identici. Si noti come f sia sopra c, ovvero il benessere derivato dalla lotteria $\tilde{x}$ è minore del benessere associato al payoff atteso $E\tilde{x}$ con certezza. Tradotto: per Sempronio, agente avverso al rischio, la potenziale perdita di 4000 ducati riduce la sua utilità più di quanto la faccia aumentare una potenziale vincita di 4000 ducati. Tale fenomeno si verifica solo se la funzione di utilità è crescente e concava. Diversamente, se la funzione di utilità è convessa, allora la disuguaglianza (2.1) è invertita di segno e l'agente è propenso al rischio. In questo caso, la potenziale perdita

[3]Vi invito a verificare la disuguaglianza (2.2) usando una funzione di utilità radice quadrata.

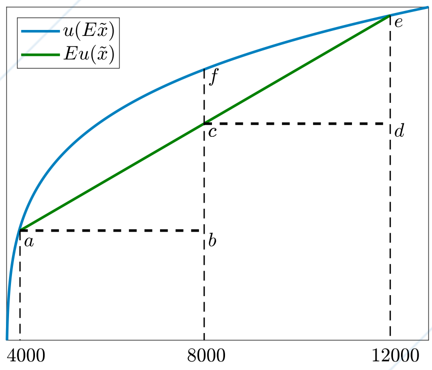


Fig. 2.1. Utilità attesa della ricchezza finale $(4000, \frac{1}{2}; 12000, \frac{1}{2})$.

riduce la sua utilità meno di quanto la faccia aumentare una potenziale vincita. Infine, se u è lineare, allora l'agente è neutrale al rischio, ed è indifferente tra l'esito certo e quello incerto $(Eu(\tilde{x}) = u(E\tilde{x}))$. La seguente proposizione mette in relazione l'avversione al rischio con la concavità della funzione di utilità.

Proposizione 2.1 (Disuguaglianza di Jensen) *Siano $\tilde{x} : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria e $u : X \to \mathbb{R}$ derivabile due volte su $Int(X)$, con $\Omega \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$. La disuguaglianza (2.1) si verifica se e solo se $u(x)$ è concava, ovvero se $u''(x) \leqslant 0 \, \forall x \in Int(X)$.*

Dimostrazione. Se u è concava allora la retta tangente di un qualsiasi punto del suo grafico deve giacere al di sopra di essa. Questo ovviamente anche per $\tilde{x} = E\tilde{x}$, ovvero:[4]

$$u(\tilde{x}) \leqslant u(E\tilde{x}) + u'(E\tilde{x})(\tilde{x} - E\tilde{x})$$

Supponendo che tale funzione sia concava per ogni x, allora lo è anche nel valore medio:

$$Eu(\tilde{x}) \leqslant u(E\tilde{x}) + u'(E\tilde{x})E(\tilde{x} - E\tilde{x})$$

Dato che $E(\tilde{x} - E\tilde{x}) = E\tilde{x} - E\tilde{x} = 0$, si verifica $Eu(\tilde{x}) \leqslant u(E\tilde{x})$. □

[4] Si ricordi che, data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}$, la retta tangente del punto x_0 coincide con l'approssimazione lineare di $f(x)$ in un intorno di $x = x_0$.

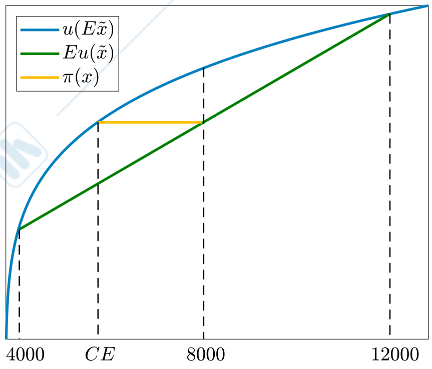


Fig. 2.2. Premio per il rischio di Sempronio, lotteria $(4000, \frac{1}{2}; 12000, \frac{1}{2})$.

2.3 Premio per il rischio e certo equivalente

Un agente avverso al rischio non gradisce l'incertezza ed è disposto a pagare per liberarsi dal rischio. Tale importo è definito *premio per il rischio* (π) ed è tale da eguagliare il valore atteso della lotteria con l'ammontare certo della lotteria, definito *certo equivalente* (CE, si veda la Fig. 2.2). La condizione da soddisfare è la seguente:

$$Eu(\tilde{x}) = u(E\tilde{x} - \pi) \tag{2.3}$$

ovvero l'agente deve essere indifferente tra accettare il rischio (il lato sinistro dell'equazione (2.3)) e pagare per liberarsi dal rischio (il lato destro dell'equazione (2.3)). Si nota subito come $\pi > 0$ se l'agente è avverso al rischio, mentre $\pi < 0$ se l'agente è propenso al rischio (come si vede anche graficamente nella Fig. 2.2 ove è rappresentato il premio per il rischio di Sempronio). In termini operativi, il valore esatto del premio per rischio è:

$$\pi = E\tilde{x} - CE$$

E' possibile derivare il premio per il rischio anche in un altro modo, attraverso una stima dell'ammontare che l'agente è disposto a pagare per liberarsi dal rischio. Tale metodo è molto usato nelle applicazioni finanziarie ove le funzioni soddisfano tutta una serie di proprietà. Vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.2 (Approssimazione di Arrow-Pratt) *Siano $\tilde{x} : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria e $u : X \to \mathbb{R}$ derivabile due volte su $Int(X)$, con $\Omega \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$. Il valore approssimato del premio per il rischio è:*

$$\pi \simeq \frac{1}{2}\sigma^2_{\tilde{x}} A(x) \tag{2.4}$$

ove $\sigma^2_{\tilde{x}}$ è la varianza di $\tilde{x}$ e la funzione $A(x)$ definita come

$$A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} \tag{2.5}$$

rappresenta l'avversione assoluta al rischio.

Dimostrazione. Usando un'approssimazione lineare e quadratica per il lato destro e sinistro dell'equazione (2.3), rispettivamente, ovvero $u(E\tilde{x} - \pi)$ in un intorno $E\tilde{x} - \pi = E\tilde{x}$:

$$u(E\tilde{x} - \pi) \simeq \; u(E\tilde{x}) - u'(E\tilde{x})\pi$$

e $Eu(\tilde{x})$ in un intorno $\tilde{x} = E\tilde{x}$

$$Eu(\tilde{x}) \simeq E\left[u(E\tilde{x}) + u'(E\tilde{x})(\tilde{x} - E\tilde{x}) + \frac{1}{2}u''(E\tilde{x})(\tilde{x} - E\tilde{x})^2\right]$$

Considerando che $E(\tilde{x} - E\tilde{x}) = E\tilde{x} - E\tilde{x} = 0$ e $E(\tilde{x} - E\tilde{x})^2 = \sigma^2_{\tilde{x}}$, allora diventa:

$$Eu(\tilde{x}) \simeq u(E\tilde{x}) + \frac{1}{2}u''(E\tilde{x})\sigma^2_{\tilde{x}}$$

Si denoti $E\tilde{x} = x$ e si eguaglino le due approssimazioni:

$$u(x) - u'(x)\pi = u(x) + \frac{1}{2}u''(x)\sigma^2_{\tilde{x}}$$

Possiamo ora risolvere per il premio per il rischio:

$$\pi \simeq \frac{1}{2}\sigma^2_{\tilde{x}} A(x)$$

ove $A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}$. □

Se l'agente è avverso al rischio, allora la funzione $A(x)$ è positiva. Diversamente, è nulla o negativa se l'agente è neutrale o propenso al rischio, rispettivamente. La funzione $A(x)$ definisce il grado di avversione assoluta al rischio. L'equazione (2.4) è nota come approssimazione di Arrow-Pratt, sviluppata indipendentemente dai due economisti matematici (si veda Arrow, 1963 e Pratt, 1964, oltre al lavoro pionieristico di De Finetti, 1952).

2.4 Avversione assoluta e relativa al rischio

Il valore dell'avversione assoluta al rischio dipende dalla funzione di utilità? La risposta è si perché ovviamente dipende da quanto è avverso al rischio l'agente, ovvero da quanto è concava la funzione di utilità. Vale la seguente proposizione.

Proposizione 2.3 (Teorema di Arrow-Pratt) *Siano $\tilde{x} : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria, $u : X_u \to \mathbb{R}$ e $v : X_v \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq X_u, X_v \subseteq \mathbb{R}$. Si verifica $A_u(x) \leqslant A_v(x)$ se e solo se $\pi_u(x) \leqslant \pi_v(x)$, ovvero se v è più concava di u $\forall x \in Z$, ove $Z = X_u \cap X_v$.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$A_v(x) = \frac{-v''(x)}{v'(x)} \geqslant \frac{-u''(x)}{u'(x)} = A_u(x)$$

per ogni x. Considerato che il rapporto tra derivata seconda e derivata prima è una misura del grado di concavità di una funzione, allora la disuguaglianza precedente è soddisfatta solo se $v(x)$ è più concava di $u(x)$. Infatti, la disuguaglianza precedente è equivalente alla condizione che v sia una trasformazione concava di u, ovvero esiste una funzione ϕ crescente e concava tale che $v(x) = \phi(u(x))$ per ogni x. Infatti, si ha che

$$v'(x) = \phi'(u(x))u'(x)$$
$$v''(x) = \phi''(u(x))(u'(x))^2 + \phi'(u(x))u''(x)$$

sostituendo:

$$\begin{aligned}A_v(x) =& \frac{-\phi''(u(x))(u'(x))^2 - \phi'(u(x))u''(x)}{\phi'(u(x))u'(x)}\\ =& \frac{-\phi''(u(x))u'(x)}{\phi'(u(x))} + \frac{-u''(x)}{u'(x)}\\ =& A_u(x) + \frac{-\phi''(u(x))u'(x)}{\phi'(u(x))}\end{aligned}$$

Pertanto, $A_v(x) \geqslant A_u(x)$ se e solo se $\phi''(u(x)) \leqslant 0$, ovvero se ϕ è concava. Passiamo ora al premio per il rischio. Ricordando che $v(x) = \phi(u(x))$, si verifica:

$$u(E\tilde{x} - \pi_u) = Eu(\tilde{x})$$

$$v(E\tilde{x} - \pi_v) = Ev(\tilde{x}) = E\phi(u(\tilde{x}))$$

Applicando la disuguaglianza di Jensen per funzioni concave $E\phi(\tilde{y}) \leqslant \phi(E\tilde{y})$, e denotando la variabile aleatoria $\tilde{y}$ come $\tilde{y} = u(\tilde{x})$, si ha che:

$$E\phi(u(\tilde{x})) \leqslant \phi(Eu(\tilde{x}))$$

$$v(E\tilde{x} - \pi_v) \leqslant \phi(u(E\tilde{x} - \pi_u))$$

$$v(E\tilde{x} - \pi_v) \leqslant v(E\tilde{x} - \pi_u)$$

Dato che v è una funzione crescente, allora l'ultima disuguaglianza è soddisfatta se e solo se $\pi_v \geqslant \pi_u$. Per un riscontro grafico, si veda la Fig. 2.3. $\square$

Per illustrare la Proposizione 2.3, torniamo da Sempronio con una sola nave, ovvero che affronta la lotteria $\tilde{x} = \left(4000, \frac{1}{2}; 12000, \frac{1}{2}\right)$. Supponiamo due funzioni di utilità, la radice quadrata $u(x) = \sqrt{x}$ e la logaritmica $v(x) = \ln(x)$. Calcoliamo utilità attesa, certo equivalente, premio per il rischio e avversione assoluta al rischio.

$$Eu(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4000} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12000} = 86.395$$

$$Ev(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \cdot \ln(4000) + \frac{1}{2} \cdot \ln(12000) = 8.8434$$

Da cui il certo equivalente:

$$CE_u = 86.395^2 = 7464$$

$$CE_v = e^{8.8434} = 6928$$

Da cui il premio per il rischio:

$$\pi_u = 8000 - 7464 = 536$$

$$\pi_v = 8000 - 6928 = 1072$$

Si ha quindi $\pi_u < \pi_v$, dato che $v(x)$ è più concava di $u(x)$ (si veda la Fig. 2.3). Calcoliamo infine l'avversione assoluta al rischio per entrambe le funzioni:

$$A_u(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = \frac{(1/4) \cdot x^{-3/2}}{(1/2) \cdot x^{-1/2}} = \frac{1}{2x}$$
$$A_v(x) = \frac{-v''(x)}{v'(x)} = \frac{1/x^2}{1/x} = \frac{1}{x}$$

Ricordando che $x = E\tilde{x}$, si ha che $A_u = 0.0000625$ e $A_v = 0.000125$, ovvero $A_v > A_u$.

Si noti che l'avversione assoluta al rischio è il tasso di crescita (negativo) dell'utilità marginale. Più precisamente, l'avversione assoluta al rischio misura il tasso al quale l'utilità marginale varia all'aumentare di un euro della ricchezza. In generale, sia $f : X \to \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}$, il rapporto $f'(x)/f(x)$ rappresenta il tasso di crescita di $f(x)$. Pertanto, $f''(x)/f'(x)$ rappresenta il tasso di crescita di $f'(x)$, che nel nostro caso è $u'(x)$, ovvero l'utilità marginale. In conclusione, l'avversione assoluta al rischio è il tasso di crescita dell'utilità marginale. Tuttavia, tale tasso è una variazione assoluta in quanto viene misurato con la stessa unità di misura della variabile dipendente (la ricchezza nel nostro caso). Il problema è risolto utilizzando variazioni relative, come l'elasticità. In generale, sia $f : X \to \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}$, l'elasticità di f rispetto a x è data da $xf'(x)/f(x)$. Nel nostro caso, la variazione relativa si chiama avversione relativa al rischio, che rappresenta quindi il tasso al quale l'utilità marginale decresce all'aumentare della ricchezza dell'1%:

$$R(x) = \frac{-xu''(x)}{u'(x)} = xA(x) \tag{2.6}$$

ovvero, il prodotto della ricchezza x con l'avversione assoluta al rischio $A(x)$.

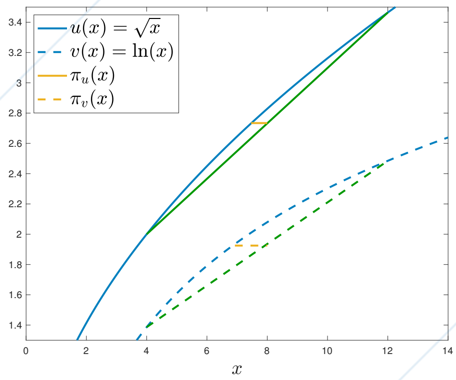


Fig. 2.3. Funzione di utilità radice quadrata (continua) e logaritmica (tratteggiata). Si nota chiaramente come $\pi_v(x) > \pi_u(x)$.

2.5 Funzioni di utilità più usate

In questo paragrafo si introdurranno le classi di funzioni di utilità più usate in letteratura economica e finanziaria (in tutti gli esempi, sia $u : X \to \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}$). Prima di presentarle, è importante discutere di una loro proprietà, ovvero come varia l'avversione assoluta al rischio al variare della ricchezza. Sono possibili tre esiti:

a) $A'(x) > 0$, proprietà IARA (Increasing Absolute Risk Aversion);

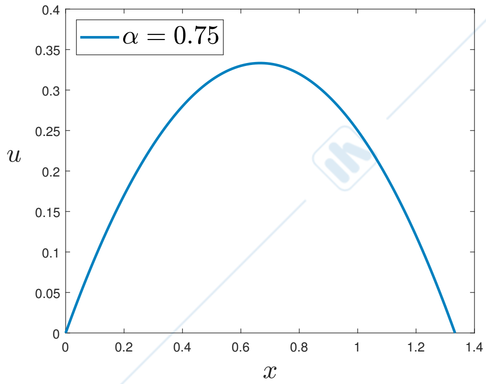
b) $A'(x) = 0$, proprietà CARA (Constant Absolute Risk Aversion);

c) $A'(x) < 0$, proprietà DARA (Decreasing Absolute Risk Aversion).

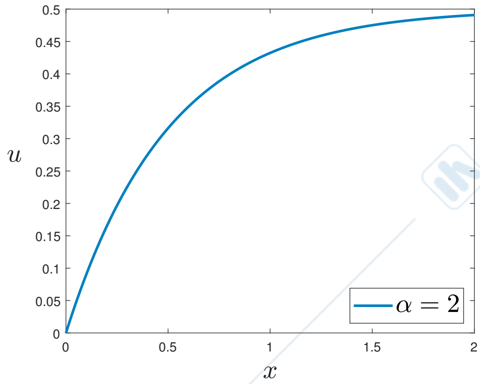
Le classi di funzioni di utilità che vedremo in questo paragrafo[5] sono la quadratica, la CARA e la CRRA (Constant Relative Risk Aversion). Cominciamo con la quadratica, molto usata in teoria della finanza:

$$u(x) = x - \alpha x^2$$

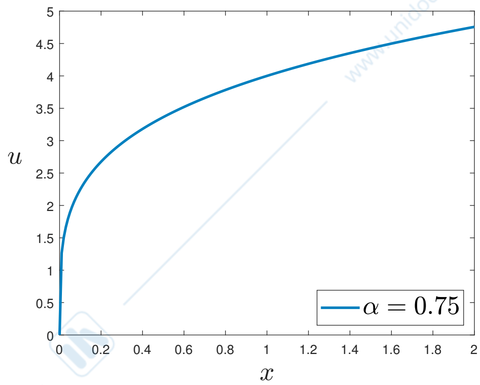
[5] Nei paragrafi precedenti abbiamo già usato due tipi di funzioni, la radice quadra e la logaritmica, entrambe con proprietà DARA (si invita lo studente ad accertarsi di ciò).



(a) Funzione quadratica.



(b) Funzione CARA.



(c) Funzione CRRA.

Fig. 2.4. Funzioni di utilità.

con $\alpha > 0$. Si noti che la funzione quadratica è crescente solo per $x \leqslant (2\alpha)^{-1}$ (si veda Fig. 2.4(a)). Inoltre, essa assume un'avversione assoluta al rischio crescente (proprietà IARA):

$$A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = \frac{2\alpha}{1-2\alpha x}$$

$$A'(x) = \frac{4\alpha^2}{(1-2\alpha x)^2} > 0$$

Diversamente, le CARA sono funzioni esponenziali del seguente tipo (sempre $\alpha > 0$, si veda Fig. 2.4(b)):

$$u(x) = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}$$

Caratteristica delle CARA, come dice il nome, è un'avversione assoluta al rischio costante:

$$A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha x}} = \alpha$$
$$A'(x) = 0$$

proprietà spesso utile quando si deve analizzare il processo di scelta tra diverse alternative ed elimina l'effetto reddito quando si trattano decisioni effettuate con un rischio la cui grandezza non varia a seguito di cambiamenti del reddito. Tuttavia, la principale critica alle CARA è proprio un'avversione assoluta costante piuttosto che decrescente.

Un altro gruppo di funzioni molto usate in letteratura, in particolare in teoria della crescita, è di tipo potenza ($\alpha > 0, \alpha \neq 1$, si veda Fig. 2.4(c)):[6]

$$u(x) = \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

si ha che:

$$A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = \frac{\alpha x^{-\alpha-1}}{x^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{x}$$
$$A'(x) = -\frac{\alpha}{x^2} < 0$$

Con proprietà DARA. Invece, come dice il nome, l'avversione relativa al rischio è costante nelle CRRA, $R(x) = \alpha$. E' stato definito che $\alpha \neq 1$, perché diventerebbe una indeterminata del tipo $0/0$. Applichiamo quindi la regola di de l'Hopital, calcolando così il limite per $\alpha \to 1$ della funzione di utilità CRRA:

$$\lim_{\alpha\to 1} \frac{xx^{-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \lim_{\alpha \to 1} \frac{-xx^{-\alpha}\ln(x)}{-1} = \frac{-xx^{-1}\ln(x)}{-1} = \ln(x)$$

Possiamo riassumere nel seguente modo:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{per } \alpha > 0,\ \alpha \neq 1, \\ \ln(x) & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}$$

[6] In Fig. 2.4(c) è rappresentata la funzione di base, ovvero $\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, mentre nel testo si studia la sua versione modificata, nota anche come isoelastica.

Capitolo 3

Criteri di scelta

Nel capitolo precedente abbiamo studiato come si comporta un individuo nei confronti di un rischio. In particolare abbiamo analizzato il caso di un individuo avverso al rischio e visto l'importanza della sua funzione di utilità. In questo capitolo, invece, introdurremo i criteri per scegliere quale tra due o più variabili aleatorie è la meno rischiosa (continueremo ad immaginare un agente rappresentativo avverso al rischio). Questo perché alla variabile aleatoria meno rischiosa corrisponde un più alto livello di utilità attesa o di rendimento atteso. Per scegliere, tuttavia, dobbiamo introdurre un indice di preferenza che ci consenta di scegliere nel modo più adeguato. I criteri più usati sono due: l'utilità attesa, che già conosciamo, e la media-varianza. Nei prossimi capitoli useremo il primo per studiare le scelte di assicurazione e il secondo per le scelte di portafoglio.

3.1 Indici di preferenza

Iniziamo definendo cosa è un indice di preferenza.

Definizione 3.1 *Siano $\tilde{x} : \Omega_x \to \mathbb{R}$ e $\tilde{y} : \Omega_y \to \mathbb{R}$ due variabili aleatorie, con $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}$ e $\Omega_y \subseteq \mathbb{R}$. Si definisce indice di preferenza $I = I(\cdot)$ un indice che a ogni variabile aleatoria assegna un numero che descrive il suo grado di desiderabilità. La preferenza è così definita da*

$$\tilde{x} \succcurlyeq \tilde{y} \iff I(\tilde{x}) \geqslant I(\tilde{y})$$

Se $I(\tilde{x}) = I(\tilde{y})$, allora $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ sono equivalenti e scriviamo $\tilde{x} \approx \tilde{y}$. Se invece $I(\tilde{x}) > I(\tilde{y})$, allora $\tilde{x}$ è strettamente preferito a $\tilde{y}$ e scriviamo $\tilde{x} \succ \tilde{y}$.

Un indice di preferenza può essere costruito in diversi modi, tuttavia deve rispettare le seguenti proprietà:[1]

- completezza: date due variabili aleatorie $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, una e una sola delle seguenti condizioni si verifica

$$\tilde{x} \succ \tilde{y} \quad \text{o} \quad \tilde{y} \succ \tilde{x} \quad \text{o} \quad \tilde{x} \approx \tilde{y}$$

  ovvero le due variabili aleatorie sono sempre confrontabili;

- transitività: date tre variabili aleatorie $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ e $\tilde{z}$, si ha

$$\tilde{x} \succcurlyeq \tilde{y} \quad \text{e} \quad \tilde{y} \succcurlyeq \tilde{z} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{x} \succcurlyeq \tilde{z}$$

Siccome noi stiamo studiando le scelte in condizioni di rischio, ovvero assumiamo che le probabilità siano date, allora gli indici di preferenza (e le preferenze stesse) dipenderanno dalle variabile aleatorie solo attraverso le loro distribuzioni.

Il più semplice indice di preferenza è il valore atteso di una variabile aleatoria:

$$I(\tilde{x}) = E\tilde{x}$$

ma abbiamo già visto nel capitolo precedente che non è adeguato perché non considera le attitudini al rischio dell'individuo, come l'avversione al rischio. I più importanti criteri di scelta in condizioni di rischio sono:

- il criterio dell'utilità attesa, ove l'indice di preferenza è del tipo

$$I(\tilde{x}) = Eu(\tilde{x})$$

  con $u : X \to \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$, che abbiamo già incontrato nel capitolo precedente, e

[1] Gli assiomi della teoria dell'utilità attesa si devono a Von Neumann and Morgenstern (1944).

- il criterio media-varianza, in cui l'indice di preferenza è del tipo

$$I(\tilde{x}) = \phi(m, v) \qquad m = E\tilde{x},\ v = \sigma^2_{\tilde{x}}$$

con $\phi : \Phi \to \mathbb{R}$ e $\Phi \subseteq \mathbb{R}$, che dipende solo dal valore atteso e dalla varianza di una variabile aleatoria.

Vediamo adesso come scegliere la variabile aleatoria meno rischiosa con i due criteri presentati.

3.2 Il criterio dell'utilità attesa

Caratterista peculiare del criterio dell'utilità attesa è che si basa sul concetto di utilità, che è soggettivo. Questo significa che ognuno di noi ha, come visto nel capitolo precedente, una diversa attitudine al rischio. Tuttavia, sono possibili dei casi in cui in modo unanime tutti gli agenti preferiscono una lotteria piuttosto che un'altra. In questo caso si parla di dominanza stocastica.

Definizione 3.2 *Siano $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{x} : \Omega_x \to \mathbb{R}$ e $\tilde{y} : \Omega_y \to \mathbb{R}$ due variabili aleatorie, con $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}$ e $\Omega_y \subseteq \mathbb{R}$. Si ha che $\tilde{x}$ domina stocasticamente $\tilde{y}$,*

1) al primo ordine, e si scrive $\tilde{x} \succcurlyeq_{DS1} \tilde{y}$, se

$$Eu(\tilde{x}) \geqslant Eu(\tilde{y}) \tag{3.1}$$

per ogni funzione di utilità u crescente.

2) al secondo ordine, e si scrive $\tilde{x} \succcurlyeq_{DS2} \tilde{y}$, se la disuguaglianza (3.1) vale per ogni funzione di utilità u crescente e concava

In altre parole, $\tilde{x} \succcurlyeq_{DS1} \tilde{y}$ se ogni agente reputa $\tilde{x}$ non peggiore di $\tilde{y}$. Se si restringe il campo ai soli agenti avversi al rischio, abbiamo $\tilde{x} \succcurlyeq_{DS2} \tilde{y}$, che equivale a dire che $\tilde{x}$ è meno rischiosa di $\tilde{y}$ (Rothschild and Stiglitz, 1970, 1971). E' evidente quindi che la dominanza al primo ordine implica quella al secondo, ma il viceversa non è vero. In entrambi i casi, si parla di dominanza stretta se almeno un individuo preferisce strettamente $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$. E' possibile confrontare le variabili aleatorie attraverso le funzioni di ripartizione, dato che se due variabili aleatorie hanno la stessa funzione cumulativa allora esse hanno la stessa distribuzione, e viceversa.

Proposizione 3.1 *Siano* $\tilde{x} : \Omega_x \to \mathbb{R}$ *e* $\tilde{y} : \Omega_y \to \mathbb{R}$ *due variabili aleatorie, con* $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\Omega_y \subseteq \mathbb{R}$*. Si ha*

$$\tilde{x} \succcurlyeq_{DS1} \tilde{y} \iff F(\tilde{x}) \leqslant F(\tilde{y}) \tag{3.2}$$

e

$$\tilde{x} \succcurlyeq_{DS2} \tilde{y} \iff \int_{-\infty}^{x} F(\tilde{x})\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{y} F(\tilde{y})\, dy \tag{3.3}$$

entrambe le disuguaglianza devono valere su tutto l'insieme di esistenza.

In altre parole, se $\tilde{x} \succcurlyeq_{DS1} \tilde{y}$, allora la funzione di ripartizione di $\tilde{x}$ deve giacere al di sotto della funzione di ripartizione di $\tilde{y}$. Similmente, se $\tilde{x} \succcurlyeq_{DS2} \tilde{y}$, allora la funzione integrale della cumulata di $\tilde{x}$ deve giacere al di sotto della funzione integrale della cumulata di $\tilde{y}$.

In queste dispense non approfondiremo le funzioni integrali ma ci concentreremo su un caso particolare della dominanza stocastica del secondo ordine, ovvero quando le due variabili aleatorie hanno la stessa media.

Definizione 3.3 *Siano* $\tilde{x} : \Omega_x \to \mathbb{R}$ *e* $\tilde{y} : \Omega_y \to \mathbb{R}$ *due variabili aleatorie discrete, con* $\Omega_x \subset \mathbb{R}$ *e* $\Omega_y \subset \mathbb{R}$*. Si dice che* $\tilde{y}$ *è un mean-preserving spread (MPS) di* $\tilde{x}$ *se*

1) *hanno la stessa media,* $E\tilde{x} = E\tilde{y}$*;*

2) $\Omega_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *e* $\Omega_y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$*, con* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ *e* $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$*, e con* $x_1 \geqslant y_1$ *e* $x_n \leqslant y_n$*.*

Escludendo il caso limite in cui $x_1 = y_1$ *e* $x_n = y_n$ *si verifica contemporaneamente.*

In altre parole, $\tilde{y}$ è un MPS di $\tilde{x}$ se le due variabili hanno la stessa media e l'estremo inferiore di $\tilde{y}$ è minore dell'estremo inferiore di $\tilde{x}$ e/o l'estremo superiore di $\tilde{y}$ è maggiore dell'estremo superiore di $\tilde{x}$. Il secondo punto della Definizione 3.3 è ottenibile anche aggiungendo un rischio a media zero alla variabile aleatoria meno rischiosa, ovvero $\tilde{y}$ è ottenibile aggiungendo un rischio a media zero $\tilde{\varepsilon}$ a $\tilde{x}$. Vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.2 *Siano $\tilde{x} : \Omega_x \to \mathbb{R}$, $\tilde{y} : \Omega_y \to \mathbb{R}$, e $\tilde{\varepsilon} : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ tre variabili aleatorie discrete, con $\Omega_x \subset \mathbb{R}$, $\Omega_y \subset \mathbb{R}$ e $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}$, e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si supponga che $E\tilde{x} = E\tilde{y}$ e che $E\tilde{\varepsilon} = 0$. Se*

$$\tilde{y} \stackrel{d}{=} \tilde{x} + \tilde{\varepsilon},$$

allora ogni agente con funzione di utilità crescente e concava preferirà $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ perché meno rischiosa, ovvero $Eu(\tilde{x}) \geqslant Eu(\tilde{y})$.

Per chiarire meglio la Proposizione 3.1 e la Proposizione 3.2, torniamo alla lotteria di Sempronio con una sola nave e definiamola come

$$\tilde{x} = \left(4000, \frac{1}{2}; 12000, \frac{1}{2}\right)$$

Nel caso sfavorevole la nave affonda, mentre nel caso favorevole la nave arriva a destinazione. Si assuma che il carico consista in 8000 chili di spezie che verranno vendute al prezzo unitario di 1 ducato al chilo. Supponiamo adesso incertezza nel prezzo delle spezie e che possano essere vendute ad un prezzo unitario di 0.5 o 1.5 ducati con eguale probabilità. In questo caso, l'esito è sempre 4000 se la nave affonda, mentre, se la nave arriva a destinazione l'esito non sarà più 12000 $(4000 + 8000 \cdot 1)$ ma o 8000 $(4000 + 8000 \cdot 0.5)$ oppure 16000 $(4000 + 8000 \cdot 1.5)$ ducati, ovverosia

$$\tilde{y} = \left(4000, \frac{1}{2}; 8000, \frac{1}{4}; 16000, \frac{1}{4}\right)$$

Poniamo adesso la domanda: quale variabile aleatoria è la più rischiosa? Quale delle due lotterie preferisce Sempronio? Dalla Definizione 3.2 sappiamo che $\tilde{x}$ domina stocasticamente al primo ordine $\tilde{y}$ se $Eu(\tilde{x}) \geqslant Eu(\tilde{y})$ per ogni funzione crescente. Calcoliamo allora l'utilità attesa usando sia una funzione crescente e convessa, ad esempio $u(x) = x^2$ e $u(y) = y^2$, che crescente e concava, ad esempio $u(x) = \sqrt{x}$ e $u(y) = \sqrt{y}$. Cominciamo con la funzione convessa:

$$Eu(\tilde{x}) = \frac{1}{2}4000^2 + \frac{1}{2}12000^2 = 80\text{mln}$$
$$Eu(\tilde{y}) = \frac{1}{2}4000^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}8000^2 + \frac{1}{2}16000^2\right] = 88\text{mln}$$

Mentre l'utilità attesa con la funzione concava è:

$$Eu(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{4000} + \frac{1}{2}\sqrt{12000} = 86.4$$
$$Eu(\tilde{y}) = \frac{1}{2}\sqrt{4000} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{8000} + \frac{1}{2}\sqrt{16000}\right] = 85.6$$

Si evince che se Sempronio è propenso al rischio si verifica $Eu(\tilde{x}) < Eu(\tilde{y})$, mentre se è avverso al rischio si verifica il contrario, $Eu(\tilde{x}) > Eu(\tilde{y})$. Pertanto, nessuna delle due variabili aleatorie domina stocasticamente al primo ordine l'altra. Questo risultato lo si vede anche nella Fig. 3.1, dato che non si verifica che $F(\tilde{x}) \leqslant F(\tilde{y})$. E' necessario quindi studiare la dominanza al secondo ordine. Vediamo se una delle due variabili è un MPS dell'altra. Seguendo la Definizione 3.3, come prima cosa calcoliamo la media:

$$E\tilde{x} = \frac{1}{2}4000 + \frac{1}{2}12000 = 8000$$
$$E\tilde{y} = \frac{1}{2}4000 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}8000 + \frac{1}{2}16000\right] = 8000$$

Si noti anche come gli estremi degli stati di natura di $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ siano diversi. In particolare, l'estremo superiore di $\tilde{y}$ sia maggiore, 16000>12000, mentre l'inferiore coincide, 4000. Ancora, si osservi come aggiungendo un disturbo a media zero, del tipo

$$\tilde{\varepsilon} = \left(-4000, \frac{1}{2}; 4000, \frac{1}{2}\right)$$

alla distribuzione di $\tilde{x}$ si ottiene $\tilde{y}$, ovvero

$$\tilde{y} = \left(4000, \frac{1}{2}; 12000 + \tilde{\varepsilon}, \frac{1}{2}\right)$$

che corrisponde a

$$\tilde{y} \overset{d}{=} \tilde{x} + \tilde{\varepsilon}$$

L'incertezza sul prezzo di vendita delle spezie può essere interpretata come un trasferimento di probabilità dal centro agli estremi (in questo caso un solo estremo), preservando così la media.

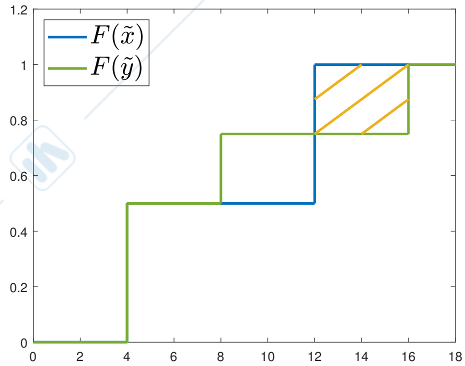


Fig. 3.1. MPS di Sempronio a causa dell'incertezza sul prezzo.

Ovviamente sono possibili altri disturbi a media zero, come ad esempio

$$\tilde{\varepsilon} = \left(-2000, \frac{5}{6}; 10000, \frac{1}{6}\right)$$
$$\tilde{y} = \left(4000, \frac{1}{2}; 10000, \frac{5}{12}; 22000, \frac{1}{12}\right)$$

oppure

$$\tilde{\varepsilon} = \left(-3000, \frac{5}{8}; 5000, \frac{3}{8}\right)$$
$$\tilde{y} = \left(4000, \frac{1}{2}; 9000, \frac{5}{16}; 17000, \frac{3}{16}\right)$$

E via discorrendo (ricordando sempre che $E\tilde{\varepsilon} = 0$).

3.3 Il criterio media-varianza

Come già accennato, una teoria della scelta alternativa a quella dell'utilità attesa consiste nel riassumere una variabile aleatoria in soli due parametri, la media e la varianza, il cui indice di preferenza è del tipo

$$I(\tilde{x}) = \phi(m, v) \qquad m = E\tilde{x},\ v = \sigma^2_{\tilde{x}}$$

con $\phi : \Phi \to \mathbb{R}$ e $\Phi \subseteq \mathbb{R}$. Inoltre, si assume che ϕ sia crescente in m e decrescente in v. La funzione più usata è $\phi(m, v) = m - \lambda v$, con $\lambda > 0$, che dà luogo al seguente indice di preferenza:

$$I(\tilde{x}) = E\tilde{x} - \lambda\sigma^2_{\tilde{x}} \tag{3.4}$$

Si osservi che tale indice è costante, pertanto il certo equivalente della variabile aleatoria $\tilde{x}$ è proprio $I(\tilde{x})$. Il premio per il rischio è allora

$$\pi(\tilde{x}) = E\tilde{x} - CE(\tilde{x}) = \lambda\sigma^2_{\tilde{x}}$$

Se confrontiamo questa uguaglianza con l'approssimazione di Arrow-Pratt, si vede subito che λ, a meno del fattore $1/2$, è interpretabile come un coefficiente di avversione al rischio (ovviamente costante). Si nota subito come il criterio media-varianza sia molto più facile da mettere in pratica rispetto al quello dell'utilità attesa. Infatti la media-varianza richiede la conoscenza solo dei primi due momenti di una distribuzione e non dell'intera distribuzione.

Facciamo adesso un esempio. Si considerino le seguenti variabili aleatorie

$$\tilde{x} = \left(10, \frac{1}{2}; 20, \frac{1}{2}\right)$$
$$\tilde{y} = \left(8, \frac{1}{2}; 26, \frac{1}{2}\right)$$

e l'indice di preferenza $I(\tilde{x}) = E\tilde{x} - \lambda\sigma^2_{\tilde{x}}$. Calcoliamo i valori attesi e le varianze:

$$E\tilde{x} = 15,\ \sigma^2_{\tilde{x}} = 25,\ E\tilde{y} = 17,\ \sigma^2_{\tilde{y}} = 81.$$

Se $\lambda = 0.1$, si ha

$$I(\tilde{x}) = 15 - 0.1 \cdot 25 = 12.5$$

$$I(\tilde{y}) = 17 - 0.1 \cdot 81 = 8.9$$

Quindi $\tilde{x}$ è preferita a $\tilde{y}$. Tuttavia, per un individuo meno avverso al rischio, ad esempio con

$\lambda = 0.01$, si ha invece

$$I(\tilde{x}) = 15 - 0.01 \cdot 25 = 14.75$$

$$I(\tilde{y}) = 17 - 0.01 \cdot 81 = 16.19$$

Quindi $\tilde{y}$ è preferita a $\tilde{x}$. Possiamo quindi affermare che nell'esempio precedente non vi è una relazione di dominanza tra le variabili aleatorie. Il che ci porta alla domanda: esistono dei casi in cui tutti gli agenti che adoperano il criterio media-varianza ritengano in modo unanime una variabile più rischiosa dell'altra? In altri termini, esiste la dominanza media-varianza?

Definizione 3.4 *Siano $\tilde{x} : \Omega_x \to \mathbb{R}$ e $\tilde{y} : \Omega_y \to \mathbb{R}$, con $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}$ e $\Omega_y \subseteq \mathbb{R}$, due variabili aleatorie, e sia $\phi : \Phi \to \mathbb{R}$, con $\Phi \subseteq \mathbb{R}$ e ϕ crescente nella media e decrescente nella varianza. Si dice che $\tilde{x}$ domina $\tilde{y}$ in media-varianza, e scriviamo $\tilde{x} \succcurlyeq_{MV} \tilde{y}$, se ogni individuo reputa $\tilde{x}$ meno rischiosa di $\tilde{y}$, ovvero se*

$$\phi(E\tilde{x}, \sigma^2_{\tilde{x}}) \geqslant \phi(E\tilde{y}, \sigma^2_{\tilde{y}}) \tag{3.5}$$

Possiamo adesso introdurre la seguente proposizione.

Proposizione 3.3 *La disuguaglianza (3.5) è rispettata, ovvero $\tilde{x} \succcurlyeq_{MV} \tilde{y}$ se e solo se*

$$E\tilde{x} \geqslant E\tilde{y} \quad e \quad \sigma^2_{\tilde{x}} \leqslant \sigma^2_{\tilde{y}}$$

devono valere entrambe le condizioni.

Facciamo un altro esempio. Siano date le seguenti variabili aleatorie:

$$\tilde{w} = \left(1, \frac{1}{2}; 3, \frac{1}{2}\right) \quad \tilde{x} = \left(0, \frac{1}{5}; 2.5, \frac{4}{5}\right)$$
$$\tilde{y} = \left(0, \frac{1}{3}; 3, \frac{2}{3}\right) \quad \tilde{z} = \left(0, \frac{1}{4}; 4, \frac{3}{4}\right)$$

I valori attesi e le varianze sono:

$$E\tilde{w} = 2,\ E\tilde{x} = 2,\ E\tilde{y} = 2,\ E\tilde{z} = 3;$$

$$\sigma^2(\tilde{w}) = 1,\ \sigma^2(\tilde{x}) = 1,\ \sigma^2(\tilde{y}) = 2,\ \sigma^2(\tilde{z}) = 3.$$

si vede subito che

$$\tilde{w} \sim_{MV} \tilde{x} \succ_{MV} \tilde{y}$$

mentre nessuna relazione di dominanza intercorre tra $\tilde{z}$ e una delle altre tre variabili.

Concludiamo il capitolo con una nota. L'indice (3.4) ricorda la funzione di utilità quadratica che abbiamo incontrato nel capitolo precedente. L'avevamo scritta come:

$$u(x) = x - \alpha x^2$$

con $\alpha > 0$ e con il vincolo che $u : [0, (2\alpha)^{-1}] \to \mathbb{R}$, dato che per valori di $x > (2\alpha)^{-1}$ la funzione è decrescente. Si ricordi che, per definizione, la varianza è

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\tilde{x}} =& E[(\tilde{x} - E\tilde{x})^2] \\
=& E[\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}E\tilde{x} + (E\tilde{x})^2] \\
=& E\tilde{x}^2 - 2E\tilde{x}E\tilde{x} + (E\tilde{x})^2 \\
=& E\tilde{x}^2 - 2(E\tilde{x})^2 + (E\tilde{x})^2 \\
=& E\tilde{x}^2 - (E\tilde{x})^2
\end{aligned}$$

Da cui si ottiene:

$$E\tilde{x}^2 = (E\tilde{x})^2 + \sigma^2_{\tilde{x}} \tag{3.6}$$

Facendo l'aspettativa della funzione di utilità quadratica si ha:

$$Eu(\tilde{x}) = E\tilde{x} - \alpha E\tilde{x}^2$$

Sostituendo la (3.6), diventa:

$$Eu(\tilde{x}) = E\tilde{x} - \alpha[(E\tilde{x})^2 + \sigma^2_{\tilde{x}}]$$

ovvero l' utilità attesa è crescente nella media e decrescente nella varianza come l'indice (3.4). Infatti, quando la funzione di utilità è quadratica, una variabile aleatoria è meno rischiosa di un'altra per entrambi i criteri dell'utilità attesa e della media-varianza.

Proposizione 3.4 *Siano $\tilde{x} : \Omega_x \to \mathbb{R}$ e $\tilde{y} : \Omega_y \to \mathbb{R}$, con $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}$ e $\Omega_y \subseteq \mathbb{R}$, due variabili aleatorie, e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se la funzione di utilità è di tipo quadratica, allora*

$$\tilde{x} \succcurlyeq_{MV} \tilde{y} \iff Eu(\tilde{x}) \geqslant Eu(\tilde{y})$$

A essere precisi l'ordine di preferenze coincide anche quando u è strettamente crescente e concava e $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ hanno entrambe distribuzione gaussiana. Tuttavia, noi non affrontiamo questo tipo di distribuzione e quindi non approfondiremo questa proprietà.

Capitolo 4

Scelte di assicurazione

Nei capitoli precedenti abbiamo visto come un agente avverso al rischio sia disposto a pagare per liberarsi dal rischio. Lo strumento finanziario più usato per liberarsi dal rischio è l'assicurazione. Dietro il pagamento di un premio, l'assicuratore risarcisce l'assicurato del danno subito in base allo schema d'indennizzo concordato. Nella realtà esistono diversi schemi di indennizzo, ovvero diversi contratti di assicurazione. Noi studieremo i più importanti, ovvero la coassicurazione e la franchigia. Nel primo le parti stabiliscono un tasso di copertura del danno, compreso tra 0 e 1 (se 0 l'agente non è assicurato, se 1 la copertura è totale).[1] Nel secondo invece, l'assicuratore indennizza l'assicurato solo se il danno supera un certo ammontare prefissato, la franchigia appunto. Quale che sia lo schema di indennizzo, l'assicurato sa che deve mediare tra il beneficio di un minor rischio e il costo del premio. Si genera così un trade-off tra rischio e ricchezza attesa. Chiariamo meglio questo punto nella prossima sezione. Prima però è necessaria una nota: quello che noi studieremo è un mondo ideale, dato che l'assicurato può scegliere come e quanto assicurarsi, le compagnie di assicurazioni agiscono in un mercato perfettamente concorrenziale, le probabilità sono note a priori ed ad entrambi gli agenti. Nella realtà tutto questo non si verifica. Ma allora perché studiare un mondo immaginario? Perché noi siamo interessati ad una teoria generale del comportamento umano in condizioni di rischio.

[1] Diversamente dalla teoria economica, nel codice civile italiano con il termine "coassicurazione" si intende un contratto in cui il medesimo rischio è assicurato da più assicuratori secondo una ripartizione in quote.

4.1 L'indennizzo ottimo

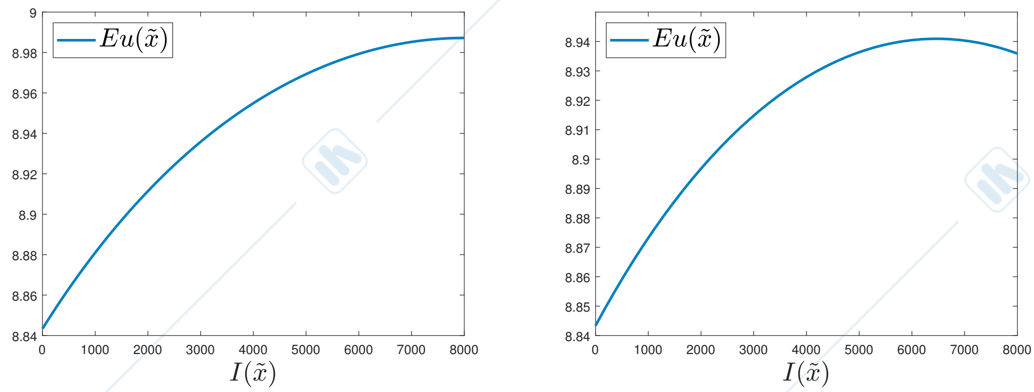
Un contratto di assicurazione prevede che, dietro il pagamento di un premio, l'assicuratore liquidi l'assicurato nel caso in cui si verifichi un danno (o una perdita).

Definizione 4.1 *Siano* $\tilde{x} : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variabile aleatoria e* $u : [x_a, x_b] \to \mathbb{R}$*, con* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *e* $0 \leqslant x_a < x_b$*. Il valore attuariale di un contratto di assicurazione è* $EI(\tilde{x})$*, ovvero il valore atteso dell'indennizzo. Un premio assicurativo è detto equo se* $P = EI(\tilde{x})$*.*

Se la copertura è totale, allora l'assicurato viene indennizzato dell'intero ammontare della perdita e, pertanto, il valore atteso dell'indennizzo sarà pari al valore atteso della perdita, ovvero $EI(\tilde{x}) = E\tilde{x}$. Il premio equo di copertura totale diventa, quindi, $\widehat{P} = E\tilde{x}$. Tuttavia, nella realtà i premi assicurativi non sono equi, perché l'assicuratore sostiene diversi costi aggiuntivi, fino anche al 30% del prezzo del contratto. Si definiscono tali costi con il termine "fattore di carico" e vengono generalmente indicati con la lettera greca λ. In questo caso, il premio diventa $P = (1+\lambda)EI(\tilde{x})$, se di copertura totale $\widehat{P} = (1+\lambda)E\tilde{x}$. Facciamo adesso un esempio per capire cosa cambia per l'assicurato se $\lambda = 0$ o $\lambda > 0$ (nella prossima sezione saremo più formali).

Torniamo da Sempronio con una sola nave. Sia l'assicuratore che Sempronio valutano la probabilità che la nave affondi $1/2$. L'assicuratore è neutrale al rischio (se fosse avverso al rischio non si accollerebbe il rischio di Sempronio) ed offre a Sempronio, al prezzo P, una polizza che prevede il pagamento dell'indennizzo I se la nave affonda. L'indennizzo atteso è il valore attuariale della polizza, ovvero $EI(\tilde{x}) = I/2$ (ovvero $\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}0$). Introducendo l'assicurazione dobbiamo leggermente modificare l'impostazione di Sempronio, separando tra ricchezza e rischio. La ricchezza, w, è 12000 mentre il danno aleatorio è $\tilde{x} = \left(8000, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\right)$, dando luogo a una lotteria così distribuita $\left(w - 8000, \frac{1}{2}; w - 0, \frac{1}{2}\right)$, ovvero la solita lotteria $\left(4000, \frac{1}{2}; 12000, \frac{1}{2}\right)$. Questo perché all'assicuratore non interessa la lotteria complessiva dei suoi assicurati ma solo il rischio ai fini dell'indennizzo. Se $\lambda = 0$ il premio sarà:

$$P = (1+\lambda)EI(\tilde{x}) = EI(\tilde{x}) = \frac{I}{2} = 0.5I$$



(a) $\lambda = 0$. **(b)** $\lambda = 0.1$.

Fig. 4.1. L'utilità attesa funzione dell'indennizzo.

Se, invece, $\lambda > 0$, ad esempio $\lambda = 0.1$, allora

$$P = (1+\lambda)EI(\tilde{x}) = (1+0.1)EI(\tilde{x}) = \frac{1.1}{2}I = 0.55I$$

Calcoliamo adesso l'utilità attesa ($Eu(\tilde{x}) = w - \tilde{x} - P + I$) per $\lambda = 0$ e $\lambda = 0.1$ con $u(x) = \ln(x)$:

$$Eu(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\ln(12000 - 8000 - 0.5I + I) + \frac{1}{2}\ln(12000 - 0 - 0.5I), \quad \text{se } \lambda = 0$$
$$Eu(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\ln(12000 - 8000 - 0.55I + I) + \frac{1}{2}\ln(12000 - 0 - 0.55I), \quad \text{se } \lambda = 0.1$$

Calcoliamo l'indennizzo ottimo. Differenziamo quindi $Eu(\tilde{x})$ rispetto a I, ovvero:

$$\frac{\partial Eu}{\partial I} = \frac{1}{2}\left(\frac{0.5}{4000 + 0.5I}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-0.5}{12000 - 0.5I}\right), \quad \text{se } \lambda = 0$$
$$\frac{\partial Eu}{\partial I} = \frac{1}{2}\left(\frac{0.45}{4000 + 0.45I}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-0.55}{12000 - 0.55I}\right), \quad \text{se } \lambda = 0.1$$

Ponendo le derivate prime uguale a zero, otteniamo:

$$I^* = 8000, \quad \text{se } \lambda = 0$$
$$I^* = 6400, \quad \text{se } \lambda = 0.1$$

La Fig. 4.1 mostra graficamente le due utilità attese. Si noti che in Definizione 4.1 l'insieme di esistenza della funzione di utilità è chiuso e limitato. Essendo l'utilità una funzione continua, allora si applica il teorema di Weierstrass. Questo vuol dire che esiste un valore dell'indennizzo tale da massimizzare l'utilità attesa. Tale valore è l'estremo superiore dell'intervallo di esistenza quando $\lambda = 0$, l'estremo inferiore o un punto interno quando $\lambda > 0$.

4.2 La coassicurazione

Si consideri un agente avverso al rischio con ricchezza w che affronta un rischio di perdita $\tilde{x}$. Si supponga che il contratto di assicurazione preveda l'indennizzo di una quota fissa, $\beta \in [0,1]$, della perdita. Pertanto, $I(\tilde{x}) = \beta\tilde{x}$ e $EI(\tilde{x}) = \beta E\tilde{x}$. Il livello β è chiamato tasso di coassicurazione, mentre $1-\beta$ è chiamato tasso di ritenzione. Ricordando che $P = (1+\lambda)EI(\tilde{x})$ e che $\hat{P} = (1+\lambda)E\tilde{x}$, la ricchezza aleatoria dell'assicurato è:

$$\begin{aligned} y(\tilde{x},\beta) =& w - P - \tilde{x} + I \\ =& w - (1+\lambda)EI(\tilde{x}) - \tilde{x} - \beta\tilde{x} \\ =& w - (1+\lambda)\beta E\tilde{x} - (1-\beta)\tilde{x} \\ =& w - \beta\hat{P} - (1-\beta)\tilde{x} \end{aligned}$$

Si noti che quando $\beta = 1$, la copertura assicurativa è totale, e la ricchezza finale non è aleatoria, ovvero $y = w - \hat{P}$. Al contrario, quando $\beta = 0$, nessuna copertura è sottoscritta, ovvero $y = w - \tilde{x}$. Il problema di scelta dell'assicurato è quello di selezionare il tasso ottimo di coassicurazione β^* tale da massimizzare l'utilità attesa della sua ricchezza finale:

$$\max_{\beta\in[0,1]} H(\beta) \equiv Eu(y) = Eu(w - \beta\hat{P} - (1-\beta)\tilde{x}) \tag{4.1}$$

Differenziando due volte la funzione H rispetto a β si ottiene:

$$H'(\beta) = E[(\tilde{x} - \hat{P})u'(y)] \tag{4.2}$$

$$H''(\beta) = E[(\tilde{x} - \hat{P})^2 u''(y)] \tag{4.3}$$

Si osservi dalla (4.3) che $H''(\beta)$ è l'aspettativa del prodotto tra $(\tilde{x} - \widehat{P})^2$, che è sempre positivo, e $u''(y)$, che è sempre negativa, data l'avversione al rischio.[2] Pertanto, $H''(\beta) < 0$ e ciò significa che l'utilità attesa dell'assicurato è una funzione concava del tasso di coassicurazione. Ne consegue che la condizione del primo ordine

$$H'(\beta^*) = E[(\tilde{x} - \widehat{P})u'(y)] = 0 \tag{4.4}$$

è condizione necessaria e sufficiente del problema di massimizzazione (4.1). Questo significa che può esistere un punto interno, $\beta \in (0, 1)$ tale da massimizzare l'utilità attesa. Ma quando il punto di ottimo è un punto interno? Vale la seguente proposizione.

Proposizione 4.1 (Teorema di Mossin) *Siano $\tilde{x} : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria, $u : X \to \mathbb{R}$ e $H : [0, 1] \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$. La copertura assicurativa totale, $\beta^* = 1$ è ottima se il prezzo attuariale è equo, ovvero $\lambda = 0$, mentre la copertura parziale o nulla, $\beta^* \in [0, 1)$, è ottima se il premio include un fattore di carico positivo, ovvero $\lambda > 0$.*

Dimostrazione Analizziamo il segno di $H'(\beta)$ quando $\beta = 1$:

$$\begin{aligned}
H'(1) =& E[(\tilde{x} - \widehat{P})u'(w - \widehat{P})] \\
=& E[(\tilde{x} - (1 + \lambda)E\tilde{x})u'(w - \widehat{P})] \\
=& E[\tilde{x}u'(w - \widehat{P}) - (1 + \lambda)E\tilde{x}u'(w - \widehat{P})] \\
=& E\tilde{x}u'(w - \widehat{P}) - (1 + \lambda)E\tilde{x}u'(w - \widehat{P}) \\
=& E\tilde{x}u'(w - \widehat{P}) - E\tilde{x}u'(w - \widehat{P}) - \lambda E\tilde{x}u'(w - \widehat{P}) \\
=& -\lambda E\tilde{x}u'(w - \widehat{P})
\end{aligned} \tag{4.5}$$

La condizione (4.4) è soddisfatta, ovvero $H'(1) = 0$, se e solo se $\lambda = 0$. Infatti, per valori di $\lambda > 0$, $H'(1) < 0$ e quindi $\beta = 1$ non può essere un ottimo. Il valore ottimo esiste (la funzione è globalmente concava), ma è minore di 1, ovvero $\beta^* \in [0, 1)$. □

[2] $H''(\beta) = E[(\tilde{x} - \widehat{P})'u'(\tilde{y}) + (\tilde{x} - \widehat{P})(\tilde{x} - \widehat{P})u''(w - \beta\widehat{P} - (1 - \beta)\tilde{x})]$. Siccome $(\tilde{x} - \widehat{P})' = 0$, allora $H''(\beta) = E[(\tilde{x} - \widehat{P})^2 u''(\tilde{y})]$.

Pertanto, quando il premio non è equo, conservare un po' di rischio rappresenta una scelta ottima da parte dell'assicurato (Mossin, 1968). Si potrebbe credere che per $\lambda > 0$ la copertura totale possa ancora essere ottima se il grado di avversione al rischio dell'assicurato è sufficientemente alto.

Proposizione 4.2 *Siano $\tilde{x} : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria, $u : X \to \mathbb{R}$ e $H : [0,1] \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $\overline{\lambda} > 0$ il seguente valore soglia:*

$$\overline{\lambda} = \frac{cov(\tilde{x}, u'(w - \tilde{x}))}{E\tilde{x}Eu'(w - \tilde{x})} \tag{4.6}$$

Se $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$ allora $\beta^* = 0$. Diversamente, se $\lambda < \overline{\lambda}$ allora $\beta^* \in (0,1)$.

Dimostrazione Si calcoli $H'(\beta)$ in $\beta = 0$:

$$\begin{aligned}
H'(0) =& E[(\tilde{x} - \widehat{P})u'(w - \tilde{x})] \\
=& E[(\tilde{x} - (1 + \lambda)E\tilde{x})u'(w - \tilde{x})] \\
=& E[\tilde{x}u'(w - \tilde{x}) - (1 + \lambda)E\tilde{x}u'(w - \tilde{x})] \\
=& E[\tilde{x}u'(w - \tilde{x}) - E\tilde{x}u'(w - \tilde{x}) - \lambda E\tilde{x}u'(w - \tilde{x})] \\
=& E[\tilde{x}u'(w - \tilde{x})] - E\tilde{x}Eu'(w - \tilde{x}) - \lambda E\tilde{x}Eu'(w - \tilde{x}) \\
=& \mathrm{cov}(\tilde{x}, u'(w - \tilde{x})) - \lambda E\tilde{x}Eu'(w - \tilde{x})
\end{aligned}$$

Ponendo uguale a zero, si ottiene:

$$\lambda \equiv \overline{\lambda} = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{x}, u'(w - \tilde{x}))}{E\tilde{x}Eu'(w - \tilde{x})}$$

Essendo la covarianza sempre positiva, a causa della concavità della funzione di utilità, $\overline{\lambda} > 0$. Pertanto, se $\lambda = \overline{\lambda}$ allora $H'(0) = 0$, ovvero $\beta^* = 0$. Tuttavia, siccome β non può essere minore di 0, si verifica che $\beta^* = 0$ per $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Infine, se $\lambda < \overline{\lambda}$ allora $H'(0) > 0$ e quindi $\beta = 0$ non è un ottimo. Di conseguenza, se $\lambda < \overline{\lambda}$, si ha che $\beta^* \in (0,1)$. □

Ricapitolando: $\beta^* = 1$ per $\lambda = 0$, $\beta^* = 0$ per $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$, e $\beta^* \in (0,1)$ per $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$.

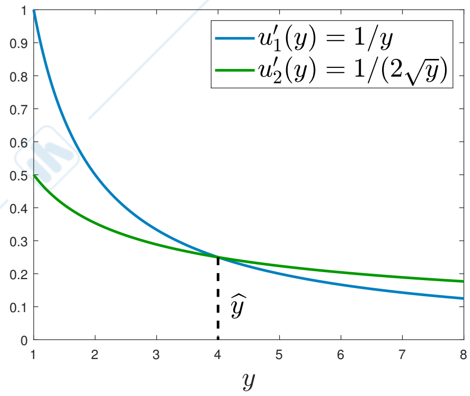


Fig. 4.2. Utilità marginali a confronto.

Concludiamo questa sezione ponendoci la seguente domanda: il tasso di copertura dipende dalla funzione di utilità? Vale la seguente proposizione.

Proposizione 4.3 *Siano $u_1 : Y_1 \to \mathbb{R}$ e $u_2 : Y_2 \to \mathbb{R}$, con $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}$. Si supponga che entrambe siano crescenti e concave, e che $u_1(y)$ sia più concava di $u_2(y)$, allora il tasso ottimo di coassicurazione β^* è maggiore per $u_1(y)$ che per $u_2(y)$, ovvero $\beta_1^* \geqslant \beta_2^*$.*

Dimostrazione. Se $\lambda = 0$, allora $\beta_1^* = \beta_2^* = 1$ dalla Proposizione 4.1. La questione è più complessa per $\lambda > 0$. Si denoti con $\widehat{y} = w - \widehat{P}$ il valore della ricchezza quando la copertura assicurativa è totale. Quando $\tilde{x} = \widehat{P}$, si ha che $u_1'(y) = u_2'(y)$. Siccome $u_1(y)$ è più concava di $u_2(y)$, allora si verifica che $u_1'(y) \geqslant u_2'(y)$ per ogni y minore di $\widehat{y}$ (ovvero, per ogni $x > \widehat{P}$), e $u_1'(y) \leqslant u_2'(y)$ per ogni y maggiore di $\widehat{y}$ (ovvero, per ogni $x < \widehat{P}$). La Fig. 4.2 mostra graficamente questo risultato. Questo vuol dire che a sinistra di $\widehat{y}$ la perdita è maggiore del premio di copertura totale ($x < \widehat{P}$), mentre a destra di $\widehat{y}$ la perdita è minore del premio di copertura totale ($x > \widehat{P}$). Intuitivamente, la perdita non può essere maggiore di $\widehat{P}$, quindi si verifica che $u_1'(y) < u_2'(y)$, ovvero siamo sempre alla destra del punto di intersezione tra le due funzioni di utilità marginale (in $\widehat{y}$, $\lambda = 0$, alla sua destra $\lambda > 0$). Pertanto, la seguente uguaglianza

$$H'(\beta_1^*) = H'(\beta_2^*)$$
$$(\tilde{x} - \widehat{P})u_1'(w - \beta_1^* \widehat{P} - (1 - \beta_1^*)\tilde{x}) = (\tilde{x} - \widehat{P})u_2'(w - \beta_2^* \widehat{P} - (1 - \beta_2^*)\tilde{x})$$

è rispettata se e solo se $\beta_1^* \geqslant \beta_2^*$. □

All'aumentare dell'avversione al rischio aumenta il tasso di coassicurazione. In altri termini, più un agente è avverso al rischio e più alto sarà il tasso di copertura.

4.3 La franchigia

Analizziamo adesso un altro contratto assicurativo molto diffuso, la franchigia. Esso prevede che l'assicuratore indennizzi l'assicurato solo se la perdita è superiore a un certo ammontare prefissato, la franchigia appunto (D). Questo vuol dire che $I(\tilde{x}) = 0$ se $x \leqslant D$, e $I(\tilde{x}) = x - D$ se $x > D$. Sotto determinate condizioni, la franchigia è un contratto ottimo, nel senso che non ne esistono di migliori (Arrow, 1971).

Proposizione 4.4 (Teorema di Arrow) *Sia $\tilde{x} : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria discreta, con $\Omega \subset \mathbb{R}$. Si supponga che un agente avverso al rischio sottoscriva un contratto assicurativo con $P = (1+\lambda)EI(\tilde{x})$ e $I(\tilde{x})$ non decrescente e non negativo. Allora, il contratto assicurativo ottimo è quello che prevede una franchigia D tale che $I(\tilde{x}) = \max\{0, x - D\}$.*

Dimostrazione Supponiamo l'esistenza di un contratto i con franchigia che prevede il seguente schema di indennizzo: $I(\tilde{x}_i) = 0$ per $x_i \leqslant D$ e $I(\tilde{x}_i) = x_i - D$ per ogni $x_i > D$. Si consideri un contratto assicurativo alternativo j con lo stesso premio, quindi se si aumenta l'indennizzo per un dato livello di perdita, dobbiamo diminuirlo per altri al fine di preservare il valore atteso dell'indennizzo. Si consideri ora un aumento dell'indennizzo per qualche livello x_j per un qualche ammontare $\varepsilon_j > 0$, dunque $\overline{I}(x_j) = I(x_j) + \varepsilon_j$. Vediamo ora gli effetti di questa variazione sul contratto i. Siccome l'indennizzo non può essere negativo, $I(x_i)$ non può essere ridotto per nessuna perdita $x_i \leqslant D$. Si deve, pertanto, diminuire l'indennizzo per uno o più livelli di perdita $x_i > D$ di un ammontare ε_i, tale da non variare l'indennizzo atteso. Di conseguenza, $\overline{I}(x_i) = I(x_i) - \varepsilon_i$. Ricapitolando: aumentiamo l'indennizzo del contratto j sia quando $x_j \leqslant D$ sia quando $x_j > D$, di conseguenza diminuiamo l'indennizzo del contratto i, ma solo quando $x_i > D$ (perché l'indenizzo, ovviamente, non può essere negativo). Ciò conduce alle seguenti variazioni nella ricchezza finale:

$$\begin{aligned}\overline{y}(x_j) &= y(x_j) + \overline{I}(x_j)\\ \overline{y}(x_i) &= y(x_i) + \overline{I}(x_i)\end{aligned}$$

sostituendo,

$$\overline{y}(x_j) = \begin{cases} w - P - x + 0 + \varepsilon_j & \text{se } x_j \leqslant D \\ w - P - x + x - D + \varepsilon_j & \text{se } x_j > D \end{cases}$$

$$\overline{y}(x_i) = \begin{cases} w - P - x + 0 & \text{se } x_i \leqslant D \\ w - P - x + x - D - \varepsilon_i & \text{se } x_i > D \end{cases}$$

Si evince che $\overline{y}(x_i) \leqslant \overline{y}(x_j)$, ovvero la ricchezza finale è peggiorata a seguito della variazione dello schema di indennizzo. Infatti, $\overline{y}(x_i) \leqslant \overline{y}(x_j)$ si verifica sia quando la perdita è minore della franchigia sia viceversa. Questo significa che qualsiasi variazione di uno schema di indennizzo con franchigia genera un peggioramento della ricchezza finale. Pertanto, il contratto assicurativo ottimo, a parità di premio assicurativo e disturbo a media zero, è quello con franchigia. □

Facciamo un esempio su come il contratto di coassicurazione (il contratto alternativo della dimostrazione) sia dominato stocasticamente al secondo ordine dal contratto con franchigia. Si consideri una perdita $\tilde{x}$ che può assumere valore 0, 50, e 100, con eguale probabilità. Assumendo $\lambda = 0.2$ e $P = 30$,[3] supponiamo un contratto con una coassicurazione pari al 50% ($\beta = 0.5$), ovvero $I(\tilde{x}) = x/2$. La ricchezza finale sarà pari a

$$y_C = w - P - x + I = w - 30 - \frac{x}{2}$$

Possiamo dunque scrivere la lotteria come

$$\tilde{y}_C = \left(w - 30, \frac{1}{3}; w - 55, \frac{1}{3}; w - 80, \frac{1}{3}\right)$$

[3] Si invita lo studente a verificare che $P = 30$ sia corretto.

Si assuma ora un contratto con franchigia $D = 37.5$ e un premio $P = 30$. Questo significa che

$$\tilde{y}_D = \begin{cases} w - P - x = w - 30 - x & \text{se } x \leqslant D \\ w - P - x + x - D = w - 30 - 37.5 & \text{se } x > D \end{cases}$$

La perdita $\tilde{x}$ assume tre valori, di cui 1 minore della franchigia, e 2 più alti. Dunque possiamo scrivere la lotteria come

$$\tilde{y}_D = \left(w - 30, \frac{1}{3}; w - 67.5, \frac{2}{3}\right)$$

Calcoliamo le medie:

$$E\tilde{y}_C = \frac{1}{3}(w-30) + \frac{1}{3}(w-55) + \frac{1}{3}(w-80) = \frac{1}{3}(3w-165)$$
$$E\tilde{y}_D = \frac{1}{3}(w-30) + \frac{2}{3}(w-67.5) = \frac{1}{3}(w-30+2w-135) = \frac{1}{3}(3w-165)$$

Hanno quindi la stessa media. Inoltre, si noti come possiamo introdurre un disturbo $\tilde{\varepsilon}$ a media zero ($E\tilde{\varepsilon} = 0$) tale che $\tilde{y}_C$ diventi un MPS di $\tilde{y}_D$, ovvero

$$\tilde{y}_C = \left(w - 30, \frac{1}{3}; w - 67.5 + \tilde{\varepsilon}, \frac{2}{3}\right)$$
$$\tilde{\varepsilon} = \left(12.5, \frac{1}{2}; -12.5, \frac{1}{2}\right)$$
$$\tilde{y}_C = \left(w - 30, \frac{1}{3}; w - 55, \frac{1}{3}; w - 80, \frac{1}{3}\right)$$

Intuitivamente, un contratto con franchigia copre di più quando le perdite sono alte, mentre un contratto con coassicurazione copre in modo uniforme. Pertanto, un agente avverso al rischio preferirà sottoscrive una polizza con franchigia piuttosto che una polizza con coassicurazione.

Capitolo 5

Scelte di portafoglio

In questo capitolo analizziamo la selezione di un portafoglio azionario con il criterio media-varianza, seguendo così l'approccio di Markowitz (1952). Per semplicità analitica, studieremo la composizione di un portafoglio composto da soli due titoli. Altre ipotesi sono l'assenza di dividendi, la possibilità di acquistare una qualunque entità (anche frazionaria) di azioni e assenza di costi di transazione.

5.1 Rendimento atteso e volatilità

Il rendimento $\tilde{x}$ di un'azione è descritto da una variabile aleatoria, il cui valore atteso, $E\tilde{x}$, è chiamato rendimento atteso, mentre la sua deviazione standard (la radice quadrata della varianza), $\sigma_{\tilde{x}}$ è nota come volatilità. Per ragioni già accennate nel Capitolo 3, si assume solitamente che $\tilde{x}$ sia distribuita come una gaussiana.[1]

Supponiamo che un agente voglia investire una somma w in un portafoglio composto da due titoli, $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$. La frazione $\alpha\tilde{x}$, con $\alpha \in [0, 1]$ è destinata al titolo 1, mentre la frazione $(1-\alpha)\tilde{x}$ è destinata al titolo 2. L'agente può investire anche tutto nel titolo 1 o nel titolo 2 scegliendo, rispettivamente, $\alpha = 1$ o $\alpha = 0$. Il valore di mercato del portafoglio è ovviamente w, mentre il

[1] Diversi studi empirici hanno dimostrato che questo tipo di distribuzione è adeguata per rappresentare rendimenti su orizzonti medio-lunghi, mentre è da evitare nella modellazione dei rendimenti giornalieri.

suo valore a scadenza è

$$W = \alpha w(1 + \tilde{x}_1) + (1 - \alpha)w(1 + \tilde{x}_2)$$

Riorganizzando si ottiene subito

$$W = (1 + \alpha\tilde{x}_1 + (1 - \alpha)\tilde{x}_2)w$$

da cui risulta chiaro che il rendimento del portafoglio, al variare di α, è

$$\tilde{x}(\alpha) = \alpha\tilde{x}_1 + (1 - \alpha)\tilde{x}_2 \tag{5.1}$$

ovvero la combinazione dei due rendimenti parziali. Possiamo ora introdurre rendimento atteso e varianza del portafoglio.

Proposizione 5.1 *Siano $\tilde{x}_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ e $\tilde{x}_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}$, con $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}$, due variabili aleatorie. Il rendimento atteso del portafoglio composto dalle due variabili aleatorie $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ è:*

$$r(\alpha) = \alpha r_1 + (1 - \alpha)r_2 \tag{5.2}$$

ove $r_1 = E\tilde{x}_1$ e $r_2 = E\tilde{x}_2$. Diversamente, la varianza è:

$$\sigma^2(\alpha) = \alpha^2\sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 \tag{5.3}$$

ove σ^2 e σ rappresentano varianza e volatilità, rispettivamente, mentre ρ è l'indice di correlazione che intercorre tra le due variabili.

Dimostrazione La (5.2) è semplicemente il valore atteso della (5.1). Per quanto riguarda la varianza, invece, si ha che:

$$\begin{aligned}\sigma^2(\alpha) =& \alpha^2\sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_2^2 + 2\mathrm{cov}(\alpha\tilde{x}_1, (1 - \alpha)\tilde{x}_2)\\ =& \alpha^2\sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

dalla proprietà della somma di due variabili aleatorie non indipendenti (si veda il Capitolo 1). □

Dalla (5.2) si vede che il rendimento atteso è una funzione lineare della quota α. Diversamente, dalla (5.3) si evince come la varianza sia una funzione quadratica di α. Da cui la seguente proposizione.

Proposizione 5.2 *Siano $\tilde{x}_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ e $\tilde{x}_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}$, con $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}$, due variabili aleatorie. La varianza σ^2 ha un punto di minimo globale in*

$$\alpha^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \tag{5.4}$$

Inoltre, $\alpha^* \in (0,1)$ se e solo se

$$\rho < \overline{\rho} = \min\left\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\}$$

con $\overline{\rho} \neq 1$ se si esclude il caso limite $\sigma_1 = \sigma_2$. Diversamente, se $\rho \geqslant \overline{\rho}$, si ha $\alpha^* = 1$ se $\sigma_1 < \sigma_2$ e $\alpha^* = 0$ se $\sigma_2 < \sigma_1$.

Dimostrazione Calcoliamo derivata prima e seconda di σ^2 (ovvero della (5.3)):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\alpha} &= 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\alpha - 2\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_2\sigma_2 \\ \frac{\partial^2\sigma^2}{\partial\alpha^2} &= 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\end{aligned}$$

Dalla derivata seconda si evince che la funzione è convessa, dato che è di segno positivo ($\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2$). Pertanto, se esiste, il punto stazionario è unico ed è un minimo globale. Dalla derivata prima si evince che

$$\alpha = \alpha^* := \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

è tale da minimizzare la funzione varianza. Inoltre, si vede subito che $\alpha^* > 0$ se $\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 > 0$, ovvero se $\rho < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. Così come si vede subito che $\alpha < 1$ se $\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$, ovvero se $\rho < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Pertanto, $\alpha \in (0,1)$ se e solo se

$$\rho < \overline{\rho} = \min\left\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\}$$

ovviamente, $\overline{\rho} \neq 1$ se si esclude il caso limite $\sigma_1 = \sigma_2$. Di conseguenza, se $\rho \geqslant \overline{\rho}$, allora $\alpha^* = 1$ se $\sigma_1 < \sigma_2$ e $\alpha^* = 0$ se $\sigma_2 < \sigma_1$. □

Il punto di minimo α^* è noto anche come portafoglio a varianza minima (PVM). Dalla Proposizione 5.2 si evince che esso può essere una composizione dei due titoli se $\rho < \overline{\rho}$ oppure solo del titolo meno rischioso se $\rho \geqslant \overline{\rho}$. Nel primo caso è evidente la diversificazione del rischio attraverso un mix dei due titoli, dato che l'investire tutto nel titolo meno rischioso non è sufficiente a minimizzare la varianza. Facciamo un esempio.

Si considerino due titoli che hanno rendimento atteso $r_1 = 6\%$ e $r_2 = 10\%$. Vediamo quattro situazioni diverse tra loro:

- Caso 1: $\sigma_1 = 8\%$, $\sigma_2 = 14\%$ e $\rho = 0.2$.

  Il titolo 2 è più redditizio ma anche più rischioso. La correlazione è inferiore alla soglia $\overline{\rho} = \sigma_1/\sigma_2 = 0.571$ e dunque vi è diversificazione, infatti $\alpha^* = 80.67\%$ e la volatilità $\sigma_{\text{pvm}} = 7.48\%$ è minore di σ_1.

- Caso 2: $\sigma_1 = 8\%$, $\sigma_2 = 14\%$ e $\rho = 0.7$.

  Ciò che cambia rispetto al caso precedente è nel valore della correlazione, superiore a $\overline{\rho}$. In questo caso, siccome $\sigma_1 < \sigma_2$, si ha $\alpha^* = 1$.

- Caso 3: $\sigma_1 = 14\%$, $\sigma_2 = 8\%$ e $\rho = 0.2$.

  Il titolo 2 domina il titolo 1, essendo più redditizio e meno rischioso. Essendo $\rho < \overline{\rho}$, $\alpha^* = 19.33\%$ con volatilità $\sigma_{\text{pvm}}7.48\%$.

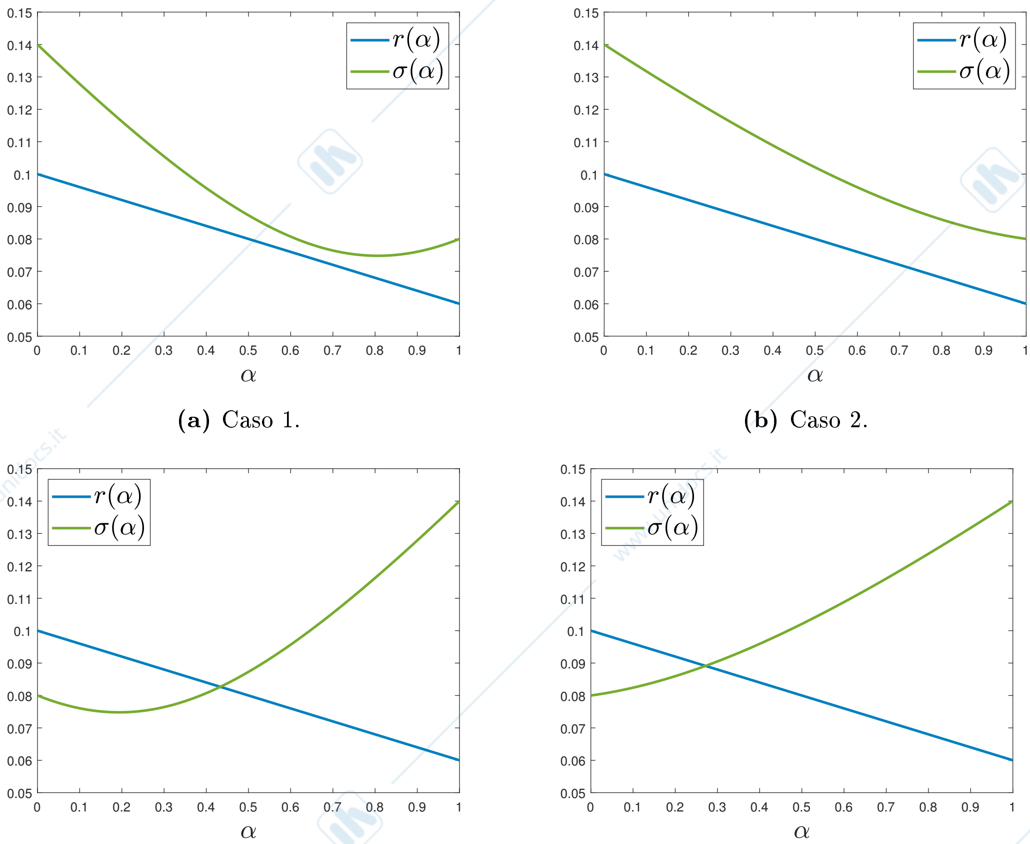
- Caso 4: $\sigma_1 = 14\%$, $\sigma_2 = 8\%$ e $\rho = 0.7$.

  Non si ha diversificazione, essendo $\rho > \overline{\rho}$, e $\alpha^* = 0$.

In Fig. 5.1 vi sono i grafici del rendimento atteso e della volatilità con i dati dell'esempio.

5.2 Portafogli efficienti

Si è visto che a ogni scelta del peso $\alpha \in [0, 1]$, corrisponde un rendimento atteso $r(\alpha)$ e una volatilità $\sigma(\alpha)$. Dunque, ad ogni portafoglio è associato un punto ben preciso nel cosiddetto



(a) Caso 1. **(b)** Caso 2.

(c) Caso 3. **(d)** Caso 4.

Fig. 5.1. Rendimento atteso e volatilità funzioni del peso α.

piano volatilità-media.[2] Vediamo ora quale forma abbia, in questo piano, l'insieme dei punti (σ, r) al variare di α. La curva che otterremo è chiamata insieme possibile. Dalla (5.2) si ricava:

$$\alpha = \frac{r - r_2}{r_1 - r_2}$$

sostituendo nella (5.3) si ottiene:

$$\sigma^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\left(\frac{r - r_2}{r_1 - r_2}\right)^2 + 2(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)\left(\frac{r - r_2}{r_1 - r_2}\right) + \sigma_2^2 \tag{5.5}$$

[2] Sebbene nell'articolo originale Markowitz (1952) il piano fosse media-varianza, nel corso degli anni è prevalsa la scelta di usare la volatilità e di rappresentarla in ascissa.

Nonostante la forma apparentemente complessa di (5.5), l'equazione che lega σ a r è del tipo

$$\sigma^2 = Ar^2 + Br + C$$

con

$$A = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{(r_1 - r_2)^2}$$

e B, C parametri reali diversi da zero.[3] Siccome $A > 0$, vuol dire che il grafico della funzione (5.5), nel piano (r, σ), è una parabola con il vertice rivolto verso l'alto. Quindi, nel piano (σ, r), il grafico della funzione (5.5) è un'iperbole con asse focale parallelo all'asse delle ascisse. Importante è il dominio della (5.5), ovvero l'insieme immagine nel piano volatilità-media. Siccome $r \in [r_1, r_2]$, l'insieme possibile è il pezzo di iperbole compresa tra i punti $P_1 = (\sigma_1, r_1)$ e $P_2 = (\sigma_2, r_2)$, corrispondenti ai due titoli. Per poter disegnare il grafico dell'insieme possibile è sufficiente allora conoscere il vertice dell'iperbole, per $\sigma > 0$, ovvero il suo punto più vicino all'asse delle ordinate. Abbiamo già risolto questo problema nell'esempio precedente, ottenendo il portafoglio α^*: le coordinate del vertice P_* sono allora (σ^*, r^*). Si ricordi che quest'ultimo punto appartiene all'insieme possibile se e solo se $\rho \leqslant \overline{\rho}$. Chiariamo meglio con un esempio.

Riprendiamo i dati dell'esempio precedente e consideriamo i seguenti quattro casi.

- Caso 1: $P_1 = (0.08, 0.06)$ e $P_2 = (0.14, 0.10)$, $\alpha^* = 80.67\%$, da cui $P_* = (0.0748, 0.0677)$. Essendo $\rho \leqslant \overline{\rho}$, il vertice appartiene all'insieme.

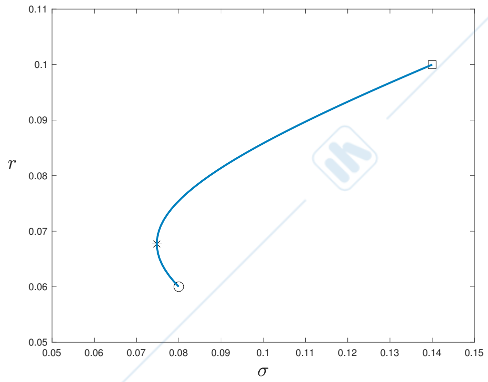
- Caso 2: $P_1 = (0.08, 0.06)$ e $P_2 = (0.14, 0.10)$, $\alpha^* = 113.95\%$, da cui $P_* = (0.0787, 0.0544)$. Essendo, $\rho > \overline{\rho}$, il vertice è esterno all'insieme.

- Caso 3: $P_1 = (0.14, 0.06)$ e $P_2 = (0.08, 0.10)$, $\alpha^* = 19.33\%$, da cui $P_* = (0.0748, 0.0923)$. Essendo $\rho \leqslant \overline{\rho}$, il vertice appartiene all'insieme.

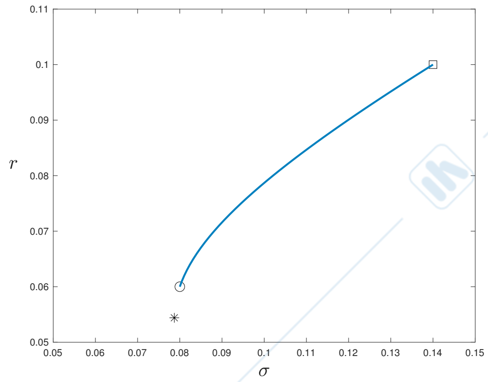
- Caso 4: $P_1 = (0.14, 0.06)$ e $P_2 = (0.08, 0.10)$, $\alpha^* = -13.95\%$, da cui $P_* = (0.0787, 0.1056)$. Essendo, $\rho > \overline{\rho}$, il vertice è esterno all'insieme.

La Fig. 5.2 mostra graficamente i risultati. Un'osservazione. Non solo un portafoglio individua un punto sulla curva, ma è vero anche il viceversa: ogni punto sulla curva individua un unico

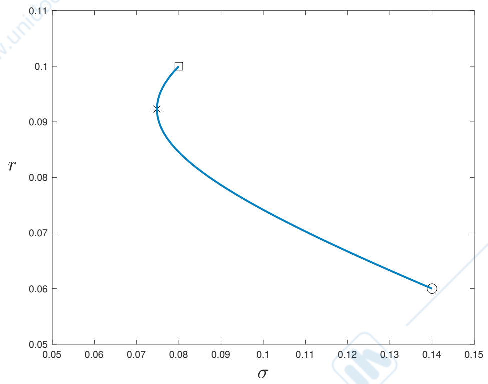
[3] Per i curiosi: $B = 2\left(\frac{\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2}{r_1 - r_2} - Ar_2\right)$ e $C = Ar_2^2 - 2(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)r_2 + \sigma_2^2$.



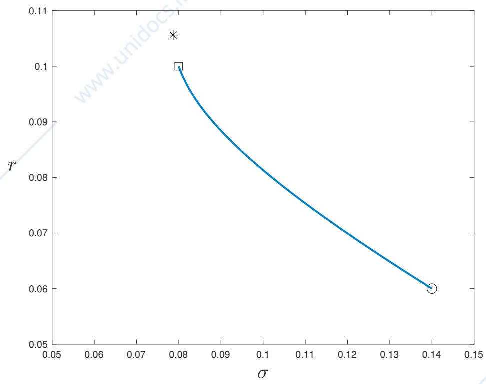
(a) Caso 1.



(b) Caso 2.



(c) Caso 3.



(d) Caso 4.

Fig. 5.2. Piano volatilità-media. Legenda: $\circ$ è P_1, $\square$ è P_2, $*$ è P_*.

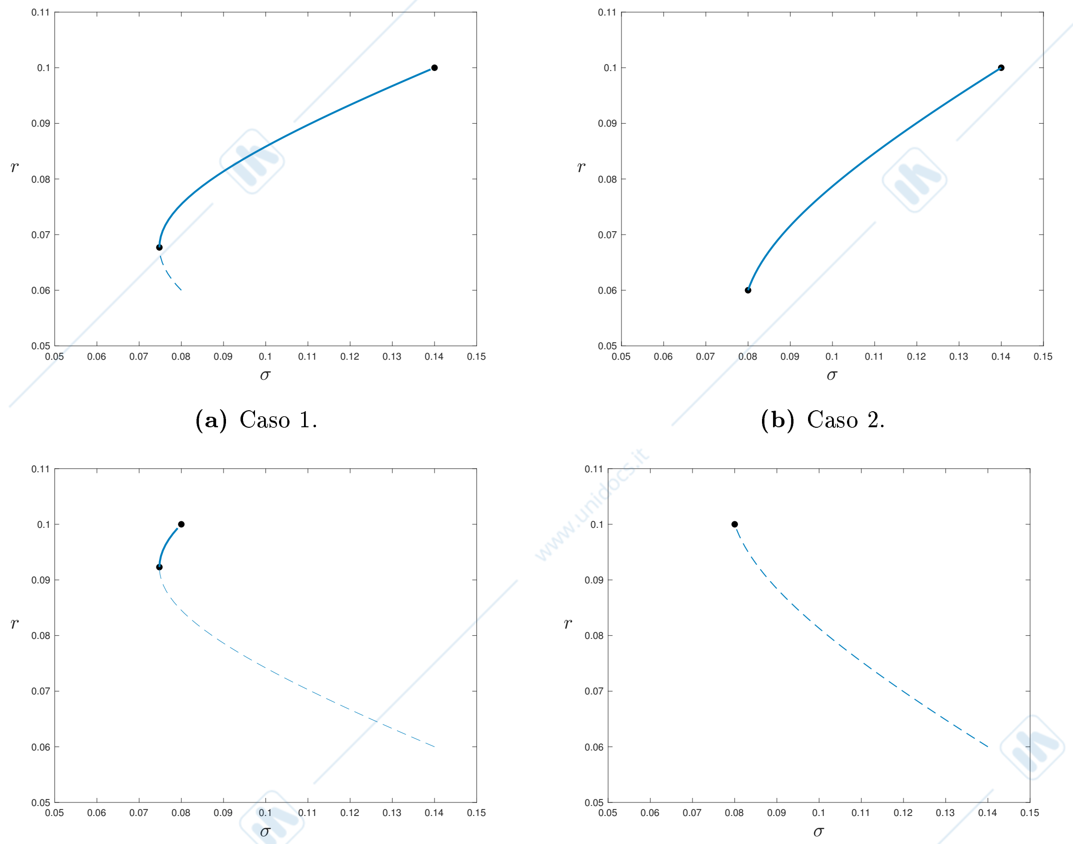
portafoglio. Questa corrispondenza 1 a 1 tra punti e portafogli, ovviamente, si perde quando il numero dei titoli che compongono un portafoglio è maggiore di 2.

Possiamo usare il grafico dell'insieme possibile nel piano (σ, r) in termini di dominanza media-varianza. Infatti, se $P_A = (\sigma_A, r_A)$ e $P_B = (\sigma_B, r_B)$ sono i punti associati a due portafogli, si ha che:

- Il portafoglio A domina il portafoglio B se

$$r_A \geqslant r_B \quad \text{e} \quad \sigma_A \leqslant \sigma_B$$

  ovvero se P_A si trova in alto a sinistra rispetto a P_B.



(a) Caso 1. **(b)** Caso 2.

(c) Caso 3. **(d)** Caso 4.

Fig. 5.3. La curva continua rappresenta la frontiera efficiente.

- Il portafoglio A è dominato dal portafoglio B se P_A si trova in basso a destra rispetto a P_B.

- Nessun confronto è possibile se P_A si trova in alto a destra oppure in basso a sinistra rispetto a P_B.

Si dice che un portafoglio è efficiente se nessun portafoglio lo domina in senso stretto. All'interno dell'insieme possibile, il sottoinsieme formato dai portafogli efficienti è chiamato frontiera efficiente. In Fig. 5.3 sono rappresentati i quattro casi dell'esempio precedente.

5.3 Portafoglio ottimo

Nei paragrafi precedenti la grande assente era l'avversione al rischio (si veda la Fig. 5.4 per una rappresentazione grafica). Si assuma adesso che un investitore utilizzi il seguente indice di preferenza:

$$I(\tilde{x}) = E\tilde{x} - \lambda\sigma^2_{\tilde{x}}$$

con $\lambda > 0$ a rappresentare l'avversione assoluta al rischio. Rilassiamo anche l'ipotesi che $\alpha \in [0, 1]$, assumendo che sia possibile vendere allo scoperto (grazie all'ausilio di un intermediario, nella realtà dietro compenso che però ignoriamo per semplicità).

Proposizione 5.3 *Siano $\tilde{x} : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria composta dalle variabili aleatorie $\tilde{x}_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ e $\tilde{x}_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}$, con $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}$. Il portafoglio ottimo è dato da*

$$\alpha^*_\lambda = \frac{r_1 - r_2 + 2\lambda(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)}{2\lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}$$

ovvero

$$\alpha^*_\lambda = \alpha_{pvm} + \frac{r_1 - r_2}{2\lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}$$

Siccome adesso $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha che

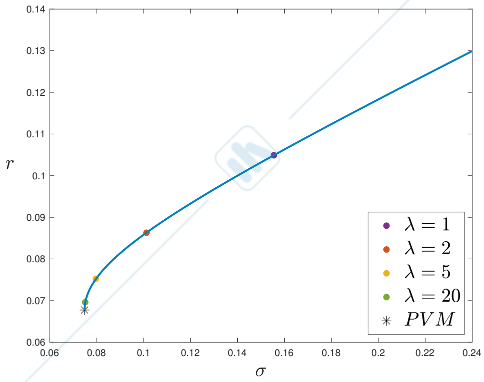
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \alpha^*_\lambda = \alpha_{pvm}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \alpha^*_\lambda = +\infty$$

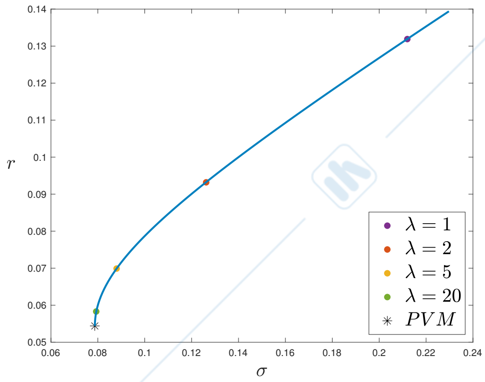
Ovvero, all'aumentare dell'avversione assoluta al rischio il portafoglio ottimo è sempre più vicino al PVM, mentre al diminuire di λ l'investitore acquisterà sempre di più del titolo in media più redditizio vendendo allo scoperto quello meno redditizio.

Dimostrazione Il portafoglio ottimo è tale da

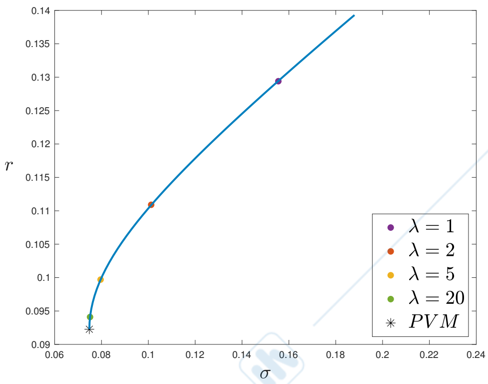
$$\begin{aligned}\max_{\alpha\in\mathbb{R}} I(\tilde{x}(\alpha)) &= r(\alpha) - \lambda\sigma^2(\alpha)\\ &= -\lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\alpha^2 + [r_1 - r_2 - 2\lambda(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)]\alpha + r_2 - \lambda\sigma_2^2\end{aligned}$$



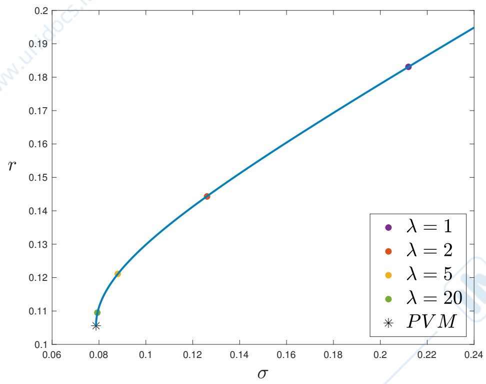
(a) Caso 1.



(b) Caso 2.



(c) Caso 3.



(d) Caso 4.

Fig. 5.4. Frontiera efficiente per diversi valori di λ.

ove si vede subito che è una funzione concava in α. Pertanto, se esiste, il punto stazionario è unico ed è un massimo globale. La derivata prima di $I(\tilde{x}(\alpha))$ rispetto a α è:

$$I'(\tilde{x}(\alpha)) = -2\lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\alpha + r_1 - r_2 - 2\lambda(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)$$

ponendo uguale a zero si ricava l'ottimo:

$$\alpha_\lambda^* = \frac{r_1 - r_2 + 2\lambda(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)}{2\lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}$$

Facendo i limiti banali per $\lambda \to +\infty$ e $\lambda \to 0$ si vede come varia α_λ^* al variare dell'avversione assoluta al rischio. $\square$