LA RIASSICURAZIONE: DESCRIZIONE DEI TRE PRINC. TRATTATI E CALCOLO DI VALORE ATTESO E VARIANZA DEL RISARCIMENTO TRATTENUTO E CEDUTO

La riassicurazione è il trasferimento del rischio da un assicuratore diretto ad un assicuratore indiretto detto appunto riassicuratore. I 3 fondamentali trattati di riassicurazione sono:
- proporzionale
- excess of loss
- stop loss.

Partendo dalle formule del risarcimento complessivo si possono definire questi 3 trattati

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

v.a Y_{i_T} = quanto trattenuto del singolo risarcimento

Y_{i_C} = quanto ceduto del singolo risarcimento

$$Y_{i_T} + Y_{i_C} = Y_i$$

X_T = risarcimento trattenuto $\quad X_C$ = risarcimento ceduto

① RIASSICURAZIONE PROPORZIONALE

α aliquota trattenuta $\alpha \in [0;1]$

$$X_T = \sum_{i=1}^{N} Y_{i_T} = \sum_{i=1}^{N} \alpha Y_i = \alpha \sum_{i=1}^{N} Y_i = \alpha X$$ → per il risarcimento complessivo

$Y_{i_T} = \alpha Y_i \quad$ e $\quad Y_{i_C} = (1-\alpha) Y_i \quad$ singolo risarc.

$X_T = \alpha X \quad$ e $\quad X_C = (1-\alpha) X \quad$ risarc. complessivo

$$E[X_T] = E[\alpha X] = \alpha E[X]$$
$$E[X_C] = E[(1-\alpha)X] = (1-\alpha) E[X]$$

da cui $E[X] = E[X_T] + E[X_C]$ v.a ris. complessivo

Calcoliamo la varianza:

- $\sigma^2[X_T] = E[X_T^2] - (E[X_T])^2$

se $E[X_T^2] = \alpha^2 x^2$

$\sigma^2[X_T] = \alpha^2 E[X^2] - (\alpha E[X])^2$

$\sigma^2[X_T] = \alpha^2 \underbrace{[E[X^2] - (E[X])^2]}_{\sigma^2[X]}$

$\sigma^2[X_T] = \alpha^2 \cdot \sigma^2[X]$

- $\sigma^2[X_C] = (1-\alpha)^2 \sigma^2[X]$

$\sigma^2[X_T] + \sigma^2[X_C] = \sigma^2[X][\alpha^2 + (1-\alpha)^2] =$

$= \sigma^2[X](2\alpha^2 + 1 - 2\alpha)$

② ECCESSO DI SINGOLO SINISTRO

L priorità o massimale, massimo importo pagato dall'assicuratore diretto

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

$$Y_{i_T} = \min(L, Y)$$

$$Y_{i_C} = \max(\underbrace{0}_{\text{se è} < L}; \underbrace{Y_i - L}_{\text{se il risarcimento è} > L})$$

$$X_T = \sum_{i=1}^{N} Y_{i_T}$$

$E[X_T] = E[N]\, E[Y_{i_T}]$

$\sigma^2[X_T] = E[N] \cdot \sigma^2[Y_{i_T}] + \sigma^2[N]\,(E[Y_{i_T}])^2$

e Y_i continuo si ha che:

$$E[Y_i] = \int_0^{+\infty} t\, f_{Y_i}(t)\, dt$$

$$E[Y_{iT}] = \int_0 t\, f_{Y_i}(t)\, dt + L \int^{+\infty} f_{Y_i}(t)\, dt$$

$$E[Y_{iC}] = \int_0^{+\infty} \max(0, t-L)\, f_{Y_i}(t)\, dt$$

Se Y_i è discreto

$$Y_i \begin{cases} z_1 & p_1 \\ z_2 & p_2 \\ z_n & p_n \end{cases} \longrightarrow Y_{iT} = \begin{cases} \min(z_1, L) \\ \min(z_k; L) \end{cases}$$

③ STOP LOSS

k ritenzione ovvero il massimo importo pagato dall'assicuratore diretto

$$X_T = \min(X, k)$$

$$X_C = \max(0, X-k)$$

$$E[X] = E[X_T] + E[X_C]$$

$$\sigma^2[X] > \sigma^2[X_T] + \sigma^2[X_C]$$

$$E[X_T] = \int\int \cdots \int^k \min(t_1 + t_2 + \cdots t_n, k)$$

se discrete:

$$X_C \longrightarrow \begin{cases} \omega_1 \rightarrow x_1 - k & q_1 \\ \omega_2 \rightarrow x_2 - k & q_2 \\ \omega_n & q_n \end{cases}$$

~~L'~~ASSICURAZIONE (RCA) BONUS - MALUS: L'EVOLUZIONE DELLA RIPARTIZIONE DEGLI ASSICURATI NELLE CLASSI DI RISCHIO, ANCHE CON IL CASO NUOVI INGRESSI.

Nell'assicurazione di responsabilità civile l'assicuratore si impegna a corrispondere per conto dell'assicurato risarcimenti conseguenti ad obbligazioni imposte per una condotta dell'assicurato che ha generato il verificarsi dei danni. Nel caso (RCA) gli indennizzi saranno versati per danni a persone e a cose cagionati dalla guida di un veicolo.

~~Il sistema bonus malus prevede~~

~~[illegible]~~ Il sistema bonus-malus prevede un premio a posteriori ovvero valutato sulla base della sinistrosità osservata per il singolo assicurato, la sinistrosità è valutata soltanto in termini del numero dei sinistri e non tiene conto dell'importo dei risarcimenti:

$1, 2 \dots K$ = classi di bonus-malus

$\lambda_1; \lambda_2 \dots \lambda_c$ = coeff. corrispondenti

con $\underbrace{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3}_{<1 \to \text{classi di bonus}} \dots < \underbrace{\lambda_k}_{<1 \to \text{classi di malus}}$

Sia J la classe di appartenenza nel t periodo, $C(t)=J$ e per $t+1$ $C(t+1)$

$$C(t+1) \begin{cases} J-1 & \text{se } N=0 \\ J+2 & \text{''} \ N=1 \\ J+3 & N=2 \\ J+4 & N \geq 3 \end{cases}$$

con N numero di sinistri, e $1 < C(t+1) \leq 18$

Si assume una matrice delle probabilità di passaggio tra classi, funzione delle probabilità di generare sinistri per assicurati delle varie classi bonus-malus

partenza — arrivo

Classe t	1	2	3	4 . .	. 18
1	$P_1(0)$	0	$P_1(1)$	$P_1(2)$	
2	$P_2(0)$	0	0	$P_2(1)$	
3	0	$P_3(0)$			
⋮					
18					

Prob classe 1

$P_1(0) = P(N=0)$

$P_1(1) = P(N=1)$

$P_1(2) = P(N=2)$

$P_1(3+) = P(N \geq 3)$

Prob classe 2

$P_2(0) = P(N=0)$

$P_2(1) = P(N=1)$

$P_2(2) = P(N=2)$

Definiamo $A(t)$ la ripartizione degli assicurati nelle classi bonus-malus ad una generica epoca t

$$A(t) = (a_1(t), a_2(t) \dots a_{18}(t))$$

si ha che

$$\sum_{i=1}^{18} a_i(t) = 1 \quad \forall t$$

$A(t+1)$ partendo da $A(t)$:

$$a_1(t+1) = a_1(t) \cdot P_1(0) + a_2(t) \cdot P_2(0)$$

$$a_2(t+1) = a_3(t) \cdot P_3(0)$$

è la matrice delle probabilità di passaggio tra classi, di transizione.

$$A(t+1) = A(t) \cdot M$$

$A(t+2) \rightarrow$ $A(t) \cdot M = A(t+1)$

$A(t+1) \cdot M = A(t+2)$

$A(t) \cdot M^2 = A(t+2)$

in generale

$$A(t+k) = A(t) \cdot M^k$$

M è una matrice stocastica e una proprietà delle matrice stocastiche è che la distribuzione degli assicurati nelle varie classi per il tempo che tende a $+\infty$ (distribuzione asintotica)

$$\lim_{t \to +\infty} M^t \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_{18} \\ w_1 & w_2 & & \\ \vdots & & & \\ w_1 & & & \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t \to +\infty} A(t) = (w_1; w_2; \ldots w_{18})$$

$$= \lim_{t \to +\infty} A(0) M^t \quad \forall A(0)$$

CON NUOVI INGRESSI:

δ = percentuale nuovi ingressi

$$A'(t+1) = A(t) M$$

$$A''(t+1) = A'(t+1) + (0, 0, \ldots \delta, 0, 0 \ldots, 0)$$

$$A(t+1) = \frac{1}{1+\delta} A''(t+1) \qquad \text{con } 1+\delta = \sum_{j=1}^{k} a_{t+1}(j)$$

Matrice delle prob medie → ci dice quale è la prob di appartenere ad una certa classe all'interno di un determinato periodo

$$M(t;t+s) = \frac{M^t + M^{t+1} + \dots M^{t+s}}{1+s}$$

$A(0)\cdot M(t;t+s) = A(t;t+s)$ → ripartizione media stesso intervallo

$A(t;t+s) = A(t)\cdot M(0,s)$ → " nei primi s periodi

$$M(0;s) = \frac{M^0 + M^1 + \dots M^s}{1+s}$$

M^0 matrice identità.

$\boxed{\text{ASSICURAZIONE INFORTUNI}}$

Ho due scopi: coperture sanitarie e mancato reddito; i possibili stati del lavoratore sono attivo e invalidità temporanea a vari livelli, nello stato di attivo si versa un premio mentre negli stati di invalidità si riceve un rimborso crescente all'aumentare del livello di invalidità.

Fissato un'unità temporale si osserva lo stato del lavoratore ad ogni scadenza prevista attraverso una matrice delle probabilità di transizione tra stati (catena di Markov)

Sia L premio costante pagato nello stato di attivo, e $C_1 \dots C_k$ tra i livelli di rendite percepiti, data una matrice M delle probabilità, il premio equo per i primi t esercizi è L tale che

$$A(0)\cdot M(0;t-1)\cdot \begin{pmatrix} L \\ -c_1 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_k \end{pmatrix} = 0$$

La riserva può essere definita come la posizione debitoria della compagnia; si possono avere due tipologie di riserva: la riserva premi e quella sinistri.

La riserva sinistri si ha quando capita che al 31/12 di un dato esercizio sono registrati sinistri di competenza per i quali non si è completato il pagamento dell'intero risarcimento.

La riserva sinistri al 31/12/2015 ~~[illegible]~~ significa valutare le somme che la compagnia deve ancora ~~[illegible]~~ pagare

Posto che $\dfrac{P_i(J)}{P_i(J+1)}$ costante $\forall i$

avremo per qualunque anno di accadimento del sinistro i, il rapporto tra i pagamenti con J anni di ritardo e $J+1$ è costante.

Si utilizza la catena di Markov che si basa sulla stima dei quozienti $P_i(J) / P_i(J+1)$ osservati nel passato e utilizzati per lo sviluppo delle somme future da pagare

Si avrà quindi che:

ANNO DI COMPETENZA	ANNI DI RITARDO 0	1	2	k
1	$P_1(0)$	$P_1(1)$	.	$P_1(k)$
2	$P_2(0)$	$P_2(1)$	$P_2(2)$	
3	$P_3(0)$	$P_3(1)$	.	
t	$P_t(0)$			

SOMME CHE COSTITUISCONO LA RISERVA SINISTRI

Tenendo conto dell'effetto dell'inflazione sui pagamenti di anni precedenti si avrà che:

Dati $r_1; r_2; r_3 \dots r_n$ tassi di inflazione annui oppure dato r tasso costante di inflazione:

$$P_i'(j) = P_i(j)(1+r_{i+j+1})(1+r_{i+j+2}) \cdots (1+r_t)$$

se il tasso di inflazione r non è costante

se invece il tasso r di inflazione è costante $P_i'(j)$ sarà:

$$P_i'(j) = P_i(j)(1+r)^{t-(i+j)}$$

Siano λ_j con $j = 1, 2, \dots n$ i coeff. di sviluppo dei pagamenti con j anni di ritardo e si stimino λ_j come media dei quozienti si avrà che

$$\lambda_j = \frac{\frac{P_1'(j-1)}{P_1'(j)} + \frac{P_2'(j-1)}{P_2'(j)} + \cdots + \frac{P_w'(j-1)}{P_w'(j)}}{w}$$

$$P_i^*(j) = P_i^*(j-1) \cdot \frac{1}{\lambda_j}$$ con $P_i^*(j)$ = SOMMA CHE COSTITUISCE LA RISERVA SINISTRI

DA CUI:

$$\text{RISERVA} = \sum_{i,j} P_i^*(j)$$

Le polizze rivalutabili sono tipologie di polizza vita, (tranne la TCM), che prevedono che il premio assicurativo versato dal contraente si rivaluti annualmente secondo l'andamento di un fondo a gestione separata. ~~[illegible]~~ L'interesse viene calcolato in base al capitale versato ma contribuisce al calcolo anche l'interesse maturato precedentemente.

Solitamente la compagnia assicuratrice si impegna a riconoscere all'assicurato un rendimento minimo pattuito in fase di sottoscrizione del contratto.

Per quanto riguarda per le polizze a capitale differito si ha:

eventi	probabilità	valore att delle prestazioni
1	q_1	0
2	q_2	0
⋮	⋮	⋮
T	q_T	
T+1	p_T	cv^T

Il valore attuale atteso delle prestazioni per polizze a capitale differito è uguale a $c \cdot v^T \cdot p_T$

dove c = capitale assicurato

$v = \frac{1}{1+i}$ = fattore di attualizzazione

p_T = probabilità di sopravvivenza.

Per quanto riguarda una polizza mista:

eventi	prob	Val. att. prest.
1	q_1	cv
2	q_2	cv^2
T	q_T	cv^T
T+1	p_T	cv^T

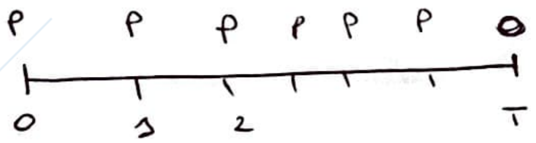
Il valore att. atteso delle prestazioni sarà uguale a:

$$c\left[vq_1 + v^2q_2 + \dots + v^T(q_T + p_T)\right]$$

In base al principio di equivalenza attuariale si ~~...~~ deve avere che il valore attuale atteso ~~...~~ delle prestazioni deve essere uguale al valore attuale atteso dei premi.

Il valore attuale atteso dei premi per una polizza mista e a capitale differito è:

eventi	prob	valore att. ~~...~~ dei premi
1	q_1	p
2	q_2	$p+pv$
3	q_3	$p(1+v+v^2)$
T	q_T	$p(1+v+v^2+\dots v^{T-1})$
T+1	q_{T+1}	$p(1+v+v^2+\dots v^{T-1})$



$$\text{VAA premi} = p\left[\, q_1 \cdot 1 + q_2(1+v) + \dots + (q_T+p_T)(1+v+\dots v^{T-1})\right]$$

$$\text{VAA premi} = g(p, i, x, T)$$

$$\text{VAA premi} = p \cdot \underbrace{g(1; i, x; T)}_{\text{coeff. B}}$$

In base al principio di equivalenza attuariale:

$$\text{VAA prestazioni} = f(C; i; x; T)$$
$$= C \cdot \underbrace{f(1, i, x, T)}_{\text{coef A}}$$

Da cui

VAA prest = VAA premio

$$C \cdot A = P \cdot B$$

$$P = \frac{CA}{B}$$

premio

SI DESCRIVA LA RELAZIONE TRA FUNZIONE DI UTILITÀ E CARICAMENTO DEL PREMIO ASSICURATO E IN PARTICOLARE SI ILLUSTRI IL CALCOLO DEL CARICAMENTO DEL PREMIO DERIVANTE DALL'UTILIZZO DI UNA FUNZIONE DI UTILITÀ DI TIPO QUADRATICO.

Data x la ricchezza di un soggetto economico, $u(x)$ è la percezione del livello di ricchezza x

La funzione di utilità $u(x)$ ha le seguenti proprietà

$u(x)$ è crescente $\to u'(x) > 0$

$u(x)$ è concava $\to u''(x) < 0$

$u(0) = 0$

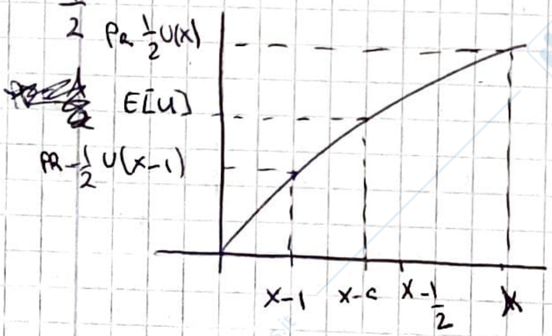
La componente assicurativa si interseca rispetto alle percezione della ricchezza mediante la funzione di utilità:

Considerando il rischio y e una forma di assicurazione contro furto

$$Y = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \text{ pr} \\ 0 & \frac{1}{2} \text{ pr} \end{cases}$$

La ricchezza finale se non si fa l'assicurazione sarà $x - y \to E[y] = \frac{1}{2}$

$\to x - \frac{1}{2}$



Funzione di utilità dell'assicurato.

L'assicurato va a vedere i livelli di utilità $u(x)$ e $u(x-1)$, assegna le probabilità $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ alle 2 ~~stesse~~ situazioni e quindi va a cercare il valore medio dell'utilità finale $E[U()]$

$$E[U(\ )] = \frac{1}{2}\,u(x) + \frac{1}{2}\,u(x-1)$$

Cerca il livello di ricchezza deterministico equivalente

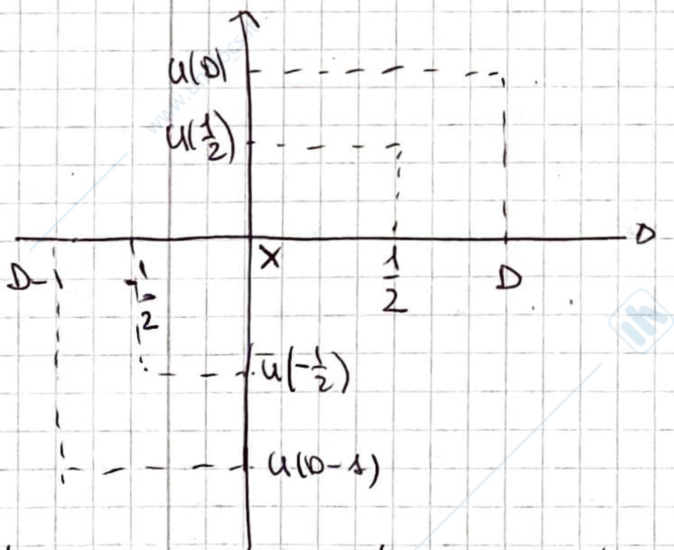
$c \rightarrow u(c) = E[U(\ )]$

L'assicurato sarà quindi disponibile a pagare un premio $x-c$ pur di trasferire il rischio $x - c > \frac{1}{2}$.

Per quanto riguarda la compagnia: zero è la ricchezza deterministica in caso di non assicurazione $u(0) = 0$ e se la compagnia incassasse il premio equo $E[Y] = \frac{1}{2}$ avrebbe un'utilità attesa inferiore a zero il che non è accettabile. La compagnia chiede un premio $D > \frac{1}{2}$ tale che $E[U(c)] = 0$

$$u(D)\,\frac{1}{2} + u(D-1)\,\frac{1}{2} = 0$$

$D - \frac{1}{2}$ è il minimo caricamento accettabile della compagnia.



Il contratto ha luogo se il massimo caricamento accettabile dall'assicurato $\left(\frac{1}{2} - c\right)$ è maggiore del minimo caricamento accettabile dalla compagnia $\left(D - \frac{1}{2}\right)$

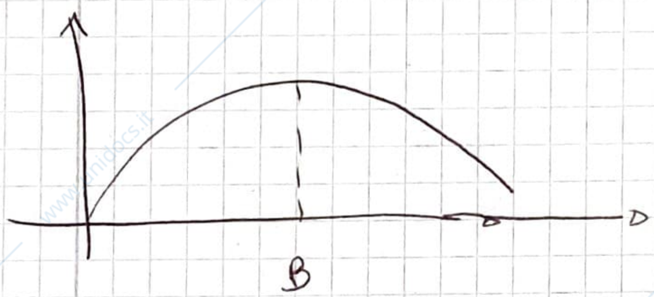
$u(x) = x - \frac{1}{2B}x^2$ → funzione di utilità per le compagnie

$u(0)=0$

$u'(x) = 1 - \frac{1}{B}x > 0 \quad x < B$ u(x) ha senso come funzione di utilità solo se $x < B$

$u''(x) = -\frac{1}{B} < 0 \quad \forall B > 0$

Data la funzione di utilità quadratica



Per la compagnia ~~...~~ dovrà essere

$$E[u(P-Y)] \geq 0 = u(0)$$

$$u(P-Y) = P - Y - \frac{1}{2B}(P-Y)^2$$

$$E[u(P-Y)] = P - E[Y] - \frac{1}{2B}(P^2 - 2PE[Y] + E[Y^2])$$

da cui $P = E[Y] + B - \sqrt{B^2 - \sigma^2[Y]}$

$$P = E[Y] + \cancel{B} - \cancel{B}\sqrt{\frac{1-\sigma^2[Y]}{B^2}} \simeq E[Y] + \beta\left(\frac{\sigma^2[Y]}{B}\right)$$

$$P \simeq E[Y] + \underbrace{\sqrt{\frac{\sigma^2[Y]}{B}}}$$

→ caricamento minimo richiesto dalla compagnia

Modello del risarcimento complessivo: somma di un numero aleatorio di risarcimenti aleatori

Y_i è il risarcimento aleatorio i-esimo con $i=1..N$ dove N è il numero aleatorio di sinistri/risarcimenti, X è il risarcimento complessivo e sarà dato da

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

Per N si assume di conoscere la distribuzione discreta:

$$N = \begin{cases} 0 & p_0 \\ 1 & p_1 \\ \vdots & \\ n & p_n \end{cases} \qquad \sum p_i = 1$$

e quindi si assume di conoscere anche $E[N]$, $\sigma^2[N]$, $E[N^2]$
Per Y_i supponiamo di conoscere $[Y_i]$, $\sigma^2[Y_i]$, $E[Y_i^2]$ $\forall i$.

L'obiettivo è calcolare $E[x]$ e $\sigma^2[x]$ con queste ipotesi aggiuntive:

- N è indipendente da Y_i
- Y_i indipendenti e con identica distribuzione (IID)

$$X \begin{cases} 0 & N=0 & p_0 \\ Y_1 & N=1 & p_1 \\ Y_1+Y_2 & N=2 & p_2 \\ \vdots & & \\ Y_1+Y_2+\dots Y_n & N=k & p_k \end{cases}$$

① Calcolo $E[x]$

sviluppo rispetto ad N

$$E_{N,Y}[x] = E_{Y_1}[Y_1 P_1 + P_2(Y_1+Y_2) + \dots + P_N(Y_1+\dots Y_N)]$$

da cui

$$E[x] = E_{Y_i}[Y_1]\underbrace{[p_1 + 2p_2 + \dots N p_N]}_{E[N]}$$

quindi $E_{N,Y}[x] = E[N] \cdot E[Y_i]$

② calcolo $E[x^2]$

$$x^2 \begin{cases} 0^2 & p_0 \\ (y_1)^2 & p_1 \\ (y_1+y_2)^2 & p_2 \\ \vdots & \\ (y_1+y_2+\dots y_n)^2 & p_k \end{cases}$$

$$E_{N,Y_i}[x^2] = E_{Y_i}\left[\sum_{k=1}^{N} p_k \,(y_1+y_2+\dots+y_k)^2\right]$$

da cui:

$$E[x^2] = E[N]\cdot\left(E[y_1]^2 - (E[y_2])^2\right) + \left(E[y_1]^2\right)E[N^2]$$

$$= E[N]\cdot \sigma^2[y_1] + (E[y_1])^2 \cdot E[N^2]$$

③ calcolo $\sigma^2[x]$

$$\sigma^2[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$\sigma^2[x] = E[N]\cdot\sigma^2[y_1] + (E[y_1])^2\cdot E[N^2] - E[y_1]^2(E[N])^2$$

$$\Downarrow\ \sigma^2[x] = E[N]\cdot\sigma^2[y_1] + (E[y_1])^2\cdot\sigma^2[N]$$

TEORIA DELLA ROVINA

Dalla compagnia → monitorare la probabilità di rovina

Questo è un modello stilizzato che sta alla base della normativa solvency che disciplina i requisiti di capitale.

Capitale residuo = capit. iniziale
+
premi incassati CH
−
risarcimento complessivo (sinistri)

$$U(t) = U + \underbrace{C \cdot t}_{} - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

↓ premio costante pagato nel continuo in $(0;t)$

$N(t)$ il numero aleatorio di risarcimento registrato in $(0;t)$

Requisito di capitale implica un livello U tale che la $P(U(t) \leq 0) \leq \alpha$ con $\alpha \geq 0$. Il livello imposto dal solvency è 99,5% per cui la compagnia può fallire solo per lo 0,5%.

Effetto della riassicurazione

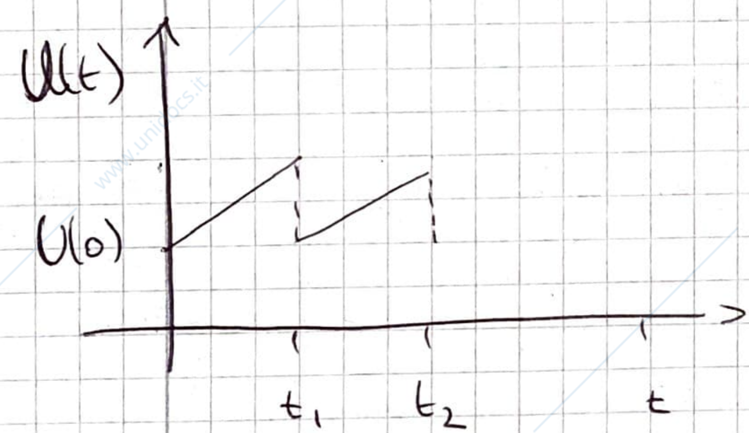
- se trasferisco parte del rischio $X_{ced}(0;t)$, ovvero trattengo $X_{tratt}(0;t)$, avrò ceduto anche parte del premio C_{ed} e mi rimane C_{tratt} → $U(t) = U + C_{tratt} \cdot t - X_{trat}(0;t)$

- a parità di U (patrimonio iniziale) vale che la probabilità
$P(U(t) \leq 0) > P(U_{riass}(t) \leq 0)$

~~$2 - 1 = 1$ $0{,}25$~~

~~$P(U(t) < 0,\ t \in (0, u^+)) = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$~~

Rappresentazione grafica



Siano $t_1, t_2 \dots t_n$ tempi di accadimento dei primi n sinistri $x_1, x_2 \dots x_n$

$(x_1 + x_2 + \dots x_n) = X(0; t_n^+)$

$U(t_1^-) = U_0 + c \cdot (t_1 - 0)$ $\quad U(t_1^+) = U(t_1^-) - x_1$

$U(t_2^-) = U(t_2^+) + c \cdot (t_2 - t_1)$

Ho default quando arriva un sinistro che è maggiore del capitale residuo e vado sotto zero

In generale

$$\boxed{U(t_j^-) = U + c\, t_j - \underbrace{X(0; t_j)}_{x_1+x_2+\dots+x_n}}$$ oppure

$$\boxed{U(t_j^-) = U(t_{j-1}^+) + c\,(t_j - t_{j-1}) - x_j}$$

Negli esercizi vedremo:

$$X_j \begin{cases} s_1 & p_1 \\ s_2 & p_2 \\ s_k & p_k \end{cases}$$ fissati $t_1, \dots t_n$ con $j = 1 \dots 4$

$U(0)$ = capitale iniziale

c = intensità di premio nell'unità temporale

$t_1, t_2 \dots t_n$ epoche dei risarcimenti

$$\boxed{U(t) = U(0) + ct - \sum_{i=1}^{n} y_i}$$

formule ricorsive del capitale residuo

$$U(t_i^-) = U(t_{i-1}^+) + c\,(t_i - t_{i-1})$$

$$U(t_i^+) = U(t_i^-) - y_i$$

ESERCIZIO

$U(0) = 2$

$c = 1$

$t_1 = 1 \quad t_2 = 2 \quad t_3 = 4$

$$Y_i \begin{cases} 1 & 0{,}5 \text{ pr} \\ 3 & 0{,}5 \text{ pr} \end{cases}$$

- Si calcoli la prob. di rovina in $(0; t_3^+)$
- la prob. di rovina in $(0; t_3^+)$ se all'epoca 2 il tasso di premio diventa $c = 2$
- sequenza con $U(t_i^+)$

$U(t_1^+ = 1^+)$

$U(t_1^+) = U(t_1^-) - Y_1$

$U(t_1^-) = U(t_{1-1}^+) + c\,(t_1 - t_{1-1})$

$U(t_1^-) = U(0) + c$

$2 + 1 = 3$

~~$U(t_1^+) = 3 - 1 = 2$ 0,5 eq~~

$U(t_1^+ = 1^+)$
$$\begin{cases} 3 - 1 = 2 & pr\ 0{,}5 \\ 3 - 3 = 0 & pr\ 0{,}5 \end{cases}$$

$$U(t_2^- = 2^-) = \begin{cases} 2 + 1 \cdot 1 = 3 & 0{,}5 \\ 0 + 1 \cdot 1 = 1 & 0{,}5 \end{cases}$$

$$U(t_2^+ = 2^+) \begin{cases} 3 - 1 = 2 & 0{,}25 \\ 3 - 3 = 0 & 0{,}25 \\ 1 - 3 = -2 & 0{,}25 \\ 1 - 1 = 0 & 0{,}25 \end{cases}$$

$P(U(2^+) < 0) = 0{,}25$

0,25 è rosso

0,75 almeno

$$U(t_2^+ = 2^+) = \begin{cases} 2 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}50 \end{cases}$$

$U(2) + c \cdot t$

$$U(t_3^- = 4^-) = \begin{cases} 2 + 1 \cdot 2 = 4 & 0{,}25 \\ 0 + 1 \cdot 2 = 2 & 0{,}50 \end{cases}$$

$$U(t_3^+ = 4^+) = \begin{cases} 4-3=1 & 0,125 \\ 4-1=3 & 0,125 \\ 2-3=-1 & 0,25 \\ 2-1=1 & 0,25 \end{cases}$$

d

$P(U(4^+) < 0) = \boxed{0,25}$

$P(U(t) < 0,\ t \in (0, 4^+)) = 0,25 + 0,25 = 0,50$ Sol. di arrivare al default al 3° sinistro quindi la probabilità di rovina è 0,50

b) oss fino $t_2^+ = 2^+$ è tutto uguale al caso precedente, quindi ho $P(U(2^+) < 0) = 0,25$, $P(U(t) < 0,\ t \in (0, 2^+)) = 0,25$

Ricomincio da $U(t_3^- = 4^-)$

$$U(t_3^- = 4^-) = \begin{matrix} 2+2\cdot 2 = 6 & 0,25 \\ 0+2\cdot 2 = 4 & 0,50 \end{matrix}$$

$U(t_3^- = 4^-) > 3$ con pr 0,75, quindi dato che $Y_i max = 3$ si ha che $P(U(t_3^+) < 0) = 0$

Se ad ultimo i capitali residui (in questo caso 6 e 4) sono maggiori del n° max di risarcimenti la prob di default è zero

In questo esercizio nella parte b) ci può essere la riassicurazione proporzionale o excess loss. Le stesse prob. di default con un contratto di riassicurazione prop al 50%. agisco su risarcimento e premio.

$C = 1 \Rightarrow 50\%$ $\quad C = 0,5$

$$Y_{i\,t} = 50\% \qquad Y_i \ldots \begin{cases} 0,5 & Pr\ 0,5 \\ 1,5 & Pr\ 0,5 \end{cases}$$

La riassicurazione diminuisce la prob di rovina