METODI QUANTITATIVI PER LE DECISIONI D'IMPRESA - Esercizi risolti - Settimana 2

1. Una banca offre un tasso di interesse del 14% annuo, composto trimestralmente. Calcolare il tasso equivalente composto continuamente e quello composto annualmente.

   Il tasso equivalente composto continuamente si può determinare imponendo l'uguaglianza tra montante a interesse cmposto continuamente e montante a interesse composto trimestralmente:

   $$Ae^{R_c n} = A\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{mn} \to e^{R_c} = \left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{m} \to R_c = \ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{m} \to R_c = m\ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right) \to R_c = 4\ln\left(1+\frac{0.14}{4}\right) = 0.1376 \to 13.76\%$$

   Si procede in maniera analoga per il calcolo del tasso composto annualmente:

   $$A\,(1+R)^n = A\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{mn} \to 1+R = \left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{m} \to R = \left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{m} - 1 \to R = \left(1+\frac{0.14}{4}\right)^{4} - 1 = 0.1475 \to 14.75\%$$

2. I tassi spot a 6 mesi e a 1 anno sono entrambi pari al 10% annuo. Per un titolo che dura 18 mesi e paga cedole ad un tasso dell'8% annuo (con cadenza semestrale, e pagamento degli interessi appena effettuato) il tasso di rendimento è pari al 10.4% annuo. Calcolare il prezzo del titolo e il tasso spot a 18 mesi (tutti i tassi sono composti semestralmente).

   Prezzo del titolo (attualizzazione al tempo 0 di tutti i flussi derivanti dall'incasso delle cedole semestrali e del rimborso del nominale):

   $$P = \frac{4}{1+\frac{0.104}{2}} + \frac{4}{\left(1+\frac{0.104}{2}\right)^2} + \frac{104}{\left(1+\frac{0.104}{2}\right)^3} = 96.74 \to$$

   Il tasso spot a 18 mesi deve soddisfare l'uguaglianza:

$$\frac{4}{1+\frac{0.10}{2}} + \frac{4}{\left(1+\frac{0.10}{2}\right)^2} + \frac{104}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^3} = 96.74 \rightarrow \frac{104}{\left(1+\frac{R}{2}\right)^3} = 89.30 \rightarrow$$
$$\left(1+\frac{R}{2}\right)^3 = 1.1645 \rightarrow 1+\frac{R}{2} = 1.0521 \rightarrow R = 2\cdot(1.0521-1) = 0.1042 \rightarrow$$
10.34%.

3. Un risparmiatore riceverà tra un anno la somma di 1100 \$ in cambio di un investimento corrente pari a 1000 \$. Calcolare il tasso di rendimento percentuale annuo (a) composto annualmente, (b) composto semestralmente, (c) composto mensilmente, (d) compposto continuamente.

   (a) Tasso di rendimento annuo:

   $$1000\cdot(1+R) = 1100 \rightarrow 1+R = \frac{1100}{1000} \rightarrow R = \frac{1100}{1000} - 1 = 0.10 \rightarrow 10\%$$

   (b) Tasso di rendimento annuo composto semestralmente:

   $$1000\cdot\left(1+\frac{R}{2}\right)^2 = 1100 \rightarrow \left(1+\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1100}{1000} \rightarrow 1+\frac{R}{2} = \sqrt{\frac{1100}{1000}} - 1 \rightarrow$$
   $$\frac{R}{2} = \sqrt{\frac{1100}{1000}} - 1 \rightarrow R = 2\cdot\left(\sqrt{\frac{1100}{1000}} - 1\right) = 0.0976 \rightarrow 9.76\%$$

   (c) Tasso di rendimento composto mensilmente:

   $$1000\cdot\left(1+\frac{R}{12}\right)^{12} = 1100 \rightarrow \left(1+\frac{R}{12}\right)^{12} = \frac{1100}{1000} \rightarrow 1+\frac{R}{12} = \sqrt[12]{\frac{1100}{1000}} \rightarrow$$
   $$\frac{R}{12} = \sqrt[12]{\frac{1100}{1000}} - 1 \rightarrow R = 12\cdot\left(\sqrt[12]{\frac{1100}{1000}} - 1\right) = 0.0957 \rightarrow 9.57\%$$

   (d) Tasso di rendimento composto continuamente:

   $$1000\cdot e^R = 1100 \rightarrow e^R = \frac{1100}{1000} \rightarrow R = \ln\left(\frac{1100}{1000}\right) = 0.0953 \rightarrow 9.53\%$$

4. Si supponga che i tassi spot composti continuamente per diverse scadenze siano i seguenti:

Maturity (months)	*Rate (% per annum)*
3	8.0
6	8.2
9	8.4
12	8.5
15	8.6
18	8.7

Calcolare i tassi di interesse forward per il secondo, terzo, quarto, quinto e sesto trimestre.

(a) Tasso di interesse forward per il secondo trimestre:

$e^{0.08\cdot 3/12}\cdot e^{R\cdot 3/12}=e^{0.082\cdot 6/12}\rightarrow e^{0.08\cdot 1/4+R\cdot 1/4}=e^{0.082\cdot 1/2}$
$\rightarrow 0.08\cdot 1/4+R\cdot 1/4=0.082\cdot 1/2\rightarrow 0.02+R\cdot 1/4=0.041\rightarrow \frac{1}{4}R=0.021\rightarrow R=4\cdot 0.021=0.084\rightarrow 8.4\%$

(b) Tasso di interesse forward per il terzo trimestre:

$e^{0.082\cdot 6/12}\cdot e^{R\cdot 3/12}=e^{0.084\cdot 9/12}\rightarrow e^{0.082\cdot 1/2+R\cdot 1/4}=e^{0.084\cdot 3/4}$
$\rightarrow 0.082\cdot 1/2+R\cdot 1/4=0.041+\frac{1}{4}R=0.068\rightarrow \frac{1}{4}R=0.022\rightarrow R=4\cdot 0.022=0.088\rightarrow 8.8\%$

(c) Tasso di interesse forward per il quarto trimestre:

$e^{0.084\cdot 9/12}\cdot e^{R\cdot 3/12}=e^{0.085\cdot 12/12}\rightarrow e^{0.084\cdot 3/4+R\cdot 1/4}=e^{0.085\cdot 1}$
$\rightarrow 0.084\cdot 3/4+\frac{1}{4}R=0.085\rightarrow 0.063+\frac{1}{4}R=0.085\rightarrow \frac{1}{4}R=0.022\rightarrow R=4\cdot 0.022=0.088\rightarrow 8.8\%$

(d) Tasso di interesse forward per il quinto trimestre:

$e^{0.085\cdot 12/12}\cdot e^{R\cdot 3/12}=e^{0.086\cdot 15/12}\rightarrow e^{0.085+R\cdot 1/4}=e^{0.086\cdot 5/4}$
$\rightarrow 0.085+\frac{1}{4}R=0.086\cdot 5/4\rightarrow 0.085+\frac{1}{4}R=0.1075\rightarrow \frac{1}{4}R=0.0225\rightarrow R=4\cdot 0.0225=0.09\rightarrow 9\%$

(e) Tasso di interesse forward per il sesto trimestre:

$e^{0.086\cdot 15/12}\cdot e^{R\cdot 3/12}=e^{0.087\cdot 18/12}\rightarrow e^{0.086\cdot 5/4+R\cdot 1/4}=e^{0.087\cdot 3/2}$
$\rightarrow 0.086\cdot 5/4+\frac{1}{4}R=0.087\cdot 3/2\rightarrow 0.1075+\frac{1}{4}R=0.1305\rightarrow \frac{1}{4}R=0.023\rightarrow R=4\cdot 0.023=0.092\rightarrow 9.2\%$

5. Calcolare il tasso di interesse composto continuamente equivalente al tasso annuo del 15% composto mensilmente.

Utilizzando la formula ottenuta all'esercizio 1:

$e^{R_c}=\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^m\rightarrow R_c=\ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^m\rightarrow R_c=m\ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right)\rightarrow R_c=12\ln\left(1+\frac{0.15}{12}\right)=0.1491\rightarrow 14.91\%$

6. Un conto di deposito paga il 12% annuo composto continuamente ma gli interessi vengono pagati trimestralmente. Calcolare gli interessi pagati ogni 3 mesi su un deposito di 10000 \$.

Facendo riferimento alla formula dell'esercizio precedente, si ha:

$e^{R_c}=\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^m\rightarrow e^{0.12}=\left(1+\frac{R_4}{4}\right)^4\rightarrow 1+\frac{R_4}{4}=\sqrt[4]{e^{0.12}}\rightarrow R_4=e^{0.12\cdot 1/4}-1\rightarrow R=4\cdot\left(e^{0.03}-1\right)-1=0.1218\rightarrow 12.18\%$

Gl interessi pagati ogni 3 mesi risultano pertanto essere pari a $10000 \cdot 0.1218 \cdot \frac{1}{4} = 304.50$.

7. Si supponga che i tassi spot a 6, 12, 18, 24 e 30 mesi siano pari, rispettivamente, al 4%, 4.2%, 4.4%, 4.6% e 4.8% annuo, composto continuamente. Calcolare il-prezzo di un'obbligazione di valore nominale 100 $, cedole calcolate al tasso del 4% annuo (pagate semestralmente) e scadenza tra 30 mesi.

   I flussi di cassa risultano essere pari a 2 $ ai mesi 6, 12, 18 e 24, mentre al mese 30 il flusso è 2 + 100. Il prezzo del titolo sarà pari a:

   $P = 2 \cdot e^{-0.04 \cdot 6/12} + 2 \cdot e^{-0.042 \cdot 12/12} + 2 \cdot e^{-0.044 \cdot 18/12} + 2 \cdot e^{-0.046 \cdot 24/12} + 102 \cdot e^{-0.048 \cdot 30/12} = 98.04\$$.

8. Il tasso cedolare di un'obbligazione è pari all'8% (composto semestralmente) e il suo prezzo è 104 $. Calcolare il tasso di rendimento di questo titolo.

   I flussi di cassa risultano essere pari a 4 $ ai mesi 6, 12, 18, 24 e 30, mentre al mese 36 il flusso è 4 + 100. Il tasso di rendimento del titolo è dato dalla soluzione dell'equazione:

   $104 = 4 \cdot e^{-x \cdot 6/12} + 4 \cdot e^{-x \cdot 12/12} + 4 \cdot e^{-x \cdot 18/12} + 4 \cdot e^{-x \cdot 24/12} + 4 \cdot e^{-x \cdot 30/12} + 104 \cdot e^{-x \cdot 36/12}$.

   L'equazione non può essere risolta algebricamente, ma solo numericamente: il valore che si ottiene è $x = 0.06407 = 6.407\%$

9. Si supponga che i tassi spot a 6, 12, 18 e 24 mesi siano pari, rispettivamente, al 5%, 6%, 6.5% e 7% annuo, composto continuamente. Calcolare il tasso di rendimento alla pari (par yeld) a 2 anni.

   Il tasso di rendimento alla pari è il tasso che rende il prezzo di un titolo al valore nominale. Ponendo i flussi di cassa pari a $\frac{c}{2}$ ai mesi 6, 12, 18, e pari a $\frac{c}{2} + 100$ al mese 24, si ottiene l'equazione:

   $$\frac{c}{2} \cdot e^{-0.05 \cdot 6/12} + \frac{c}{2} \cdot e^{-0.06 \cdot 12/12} + \frac{c}{2} \cdot e^{-0.065 \cdot 18/12} + \left(\frac{c}{2} + 100\right) \cdot e^{-0.07 \cdot 24/12} = 100$$

   che, risolta, fornisce come risultato $c = 7.0740$. Il tasso di rendimento alla pari è pertanto 7.0740%.

10. Si supponga che i tassi spot, composti continuamente, siano i seguenti:

Maturity (years)	*Rate (% per annum)*
1	2.0
2	3.0
3	3.7
4	4.2
5	4.5

Calcolare i tassi forward per il secondo, terzo, quarto e quinto anno.

Tasso forward per il secondo anno:

$e^{0.02\cdot 1}\cdot e^{R\cdot 1} = e^{0.03\cdot 2} \rightarrow e^{0.02+R} = e^{0.05} \rightarrow 0.02 + R = 0.05 \rightarrow R = 0.04 = 4\%$.

Tasso forward per il terzo anno:

$e^{0.03\cdot 2}\cdot e^{R\cdot 1} = e^{0.037\cdot 3} \rightarrow e^{0.06+R} = e^{0.111} \rightarrow 0.06 + R = 0.111 \rightarrow R = 0.051 = 5.1\%$.

Tasso forward per il quarto anno:

$e^{0.037\cdot 3}\cdot e^{R\cdot 1} = e^{0.042\cdot 4} \rightarrow e^{0.111+R} = e^{0.168} \rightarrow 0.111 + R = 0.168 \rightarrow R = 0.057 = 5.7\%$.

Tasso forward per il quinto anno:

$e^{0.042\cdot 4}\cdot e^{R\cdot 1} = e^{0.045\cdot 5} \rightarrow e^{0.168+R} = e^{0.225} \rightarrow 0.168 + R = 0.225 \rightarrow R = 0.057 = 5.7\%$.

11. I prezzi dei Buoni del Tesoro (T-bill) a 6 mesi e 1 anno sono pari, rispettivamente, a 94 \$ e 89 \$. Un'obbligazione con scadenza a 1.5 anni che paga cedole semestrali di 4 \$ ha un prezzo di 94.84 \$, mentre un'obbligazione con scadenza a 2 anni che paga cedole semestrali di 5 \$ ha un prezzo di 97.12 \$. Calcolare i tassi spot a 6 mesi, 1 anno, 1.5 anni e 2 anni.

Tasso spot a sei mesi:

$94 = 100\cdot e^{-R\cdot 6/12} \rightarrow e^{1/2R} = \frac{100}{94} \rightarrow R = 2\ln\left(\frac{100}{94}\right) = 0.1238 = 12.38\%$

Tasso a un anno:

$89 = 100\cdot e^{-R\cdot 1} \rightarrow e^{R} = \frac{100}{89} \rightarrow R = \ln\left(\frac{100}{89}\right) = 0.1165 = 11.65\%$

Tasso a 1.5 anni: i flussi di cassa sono 4\$ ai mesi 6 e 12, 104\$ al mese 18:

$94.84 = 4\cdot e^{-0.1238\cdot 6/12} + 4\cdot e^{-0.1165\cdot 12/12} + 104\cdot e^{-R\cdot 18/12} \rightarrow 104\cdot e^{-18/12R} = 0.8415 \rightarrow -\frac{18}{12}R = \ln 0.8415 \rightarrow R = 0.1150 = 11.50\%$

Tasso a 2 anni: i flussi di cassa sono 5 ai mesi 6, 12 e 18, 105 al mese 24:

$97.12 = 5\cdot e^{-0.1238\cdot 6/12} + 5\cdot e^{-0.1165\cdot 12/12} + 5\cdot e^{-0.1150\cdot 18/12} + 105\cdot e^{-R\cdot 24/12} \rightarrow 105\cdot e^{-2R} = 0.7977 \rightarrow -2R = \ln 0.7977 \rightarrow R = 0.1130 = 11.30\%$

Ricordando che:

$$1 + R = \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^m,$$

si ha:

$$1 + \frac{R_m}{m} = \sqrt[m]{1+R} \rightarrow \frac{R_m}{m} = \sqrt[m]{1+R} - 1 \rightarrow R_m = m\left(\sqrt[m]{1+R} - 1\right)$$

e quindi:

$$R_2 = 2 \cdot \left(\sqrt{1+0.11} - 1\right) = 0.1071 = 10.71\%$$
$$R_4 = 4 \cdot \left(\sqrt[4]{1+0.11} - 1\right) = 0.1057 = 10.57\%$$
$$R_{12} = 12 \cdot \left(\sqrt[12]{1+0.11} - 1\right) = 0.1048 = 10.48\%$$
$$R_{52} = 52 \cdot \left(\sqrt[52]{1+0.11} - 1\right) = 0.1045 = 10.45\%$$
$$R_{365} = 365 \cdot \left(\sqrt[365]{1+0.11} - 1\right) = 0.1044 = 10.44\%$$