www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

LIBRO ZANICHELLI

VETTORI E MATRICI

N-VETTORI

COPPIE DI NUMERI REALI = 2 VETTORI
TRIPLE DI NUMERI REALI = 3 VETTORI
N-UPLE DI NUMERI REALI = N VETTORI

ES
2 VETTORI $(1,2)$ $(\pi,1)$
3 VETTORI $(1,2,3)$

OPERAZIONI

SOMMA DI DUE VETTORI:

$(x_1; y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

NON SI PUO SOMMARE UNA DUE VETTORI CON UNA TRE VETTORI

$(1,0,1,2)+(-1,4,1,2) = (0,4,2,4)$

PRODOTTO

DI UN 2 VETTORE PER UNO SCALARE È DEFINITO $t(x;y) = (tx; ty)$

$2(1;1,0,4) \Rightarrow (2,2,0,8)$

$-\frac{1}{4}(16,1;12,0) \Rightarrow (-4,-\frac{1}{4},-3,0)$

VETTORE NULLO

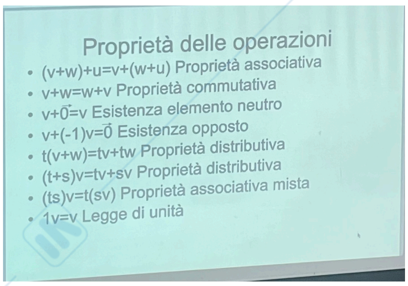
N-VETTORE NULLO: $\vec{0} = (0,0,0\ldots,0)$

SE V È UN N-VETTORE ALLORA SCRIVIAMO
$-1(v) \Rightarrow -v$

$v=(0,1,2,3)$ $-1(v)=(0,-1,-2,-3)$

DIFFERENZA
$v-w = v+(-w)$

$(3,2,1,0)-(1,2,3,4) \Rightarrow (3,2,1,0)+(-1,-2,-3,-4)$



ES CON N-VETTORE $v=(x_1, x_2, x_3 \ldots x_N)$
$w=(y_1, y_2, \cancel{x_3} \ldots y_N)$

PROP COMMUTATIVA

$v+w = (x_1+y_1, x_2+y_2 \ldots x_N+y_N) =$
$y_1+x_1, y_2+x_2 \ldots y_N+x_N) = w+v$

$y_1+x_1, y_2+x_2 \dots y_N+x_N) = w+v$

$(st)v = s(tv) = (st)(x_1, \dots x_N) =$
$s(tx_1), \dots s(tx_N)$

MATRICI

- TABELLE DI NUMERI
- MATRICI CON $N \times M$ È UNA TABELLA CON N RIGHE M COLONNE
- MATRICI SONO UNA GENERALIZZ. DEGLI N-VETTORI
  N-VETTORE $= 1 \times m$

$1 \times m$ $\quad (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$

$m \times 1$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$

MATRICE 2×3 $\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

MATRICE 1×1 $\quad (3)$

NOTAZIONI

MATRICE SI INDICA CON $a_{i,j}$ CON $\begin{cases} i & \text{RIGHE} \\ j & \text{COLONNE} \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mN} \end{pmatrix} \Rightarrow A = (a_{ij})$$

$$A \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

MATRICE 3×4

RIGA
$a_{23} = 0$
COLONNA

MATRICE NULLA

$$0_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

IDENTITÀ

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$I_1 = 1 \qquad I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

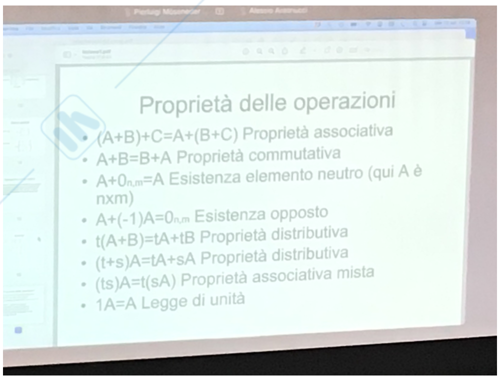
$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ 1 IN DIAGONALE

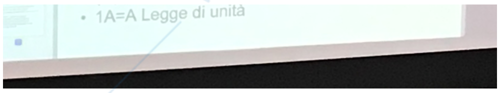
OPERAZIONI

SI POSSONO SOMMARE MATRICI CON STESSE DIMENSIONI (es 3×4 CON 3×4)

$A = (a_{ij}) \qquad B(b_{ij}) \qquad A+B = (a_{ij}+b_{ij})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$





PRODOTTO RIGA PER COLONNA

CONFORMABILE = NUMERO COLONNE A UGUALE NUMERO RIGHE B

$A = n \times m$

$B = m \times K$ $\Rightarrow$ IL LORO PRODOTTO $AB = C$

↳ $AB = n \cdot K$ $\qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

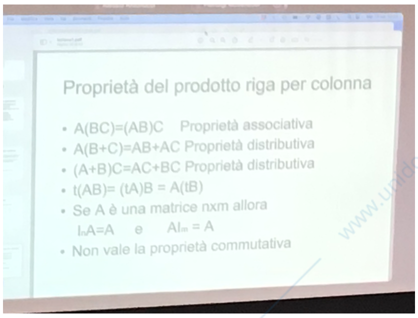
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & -6 & -4 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & -2 \end{array}$$

$0 \cdot 1$
$2 \cdot 0$ $\Rightarrow 0 + 0 - 6 \Rightarrow -6$
$-2 \cdot 3$

$0 \cdot 1$
$2 \cdot 1$ $\Rightarrow 0 + 2 - 6 \Rightarrow -4$
$-2 \cdot 3$

$0 \cdot 1$
$2 \cdot 1$ $\Rightarrow 0 + 2 + 2 = 4$
$-2 \cdot -1$

$0 \cdot 1$
$2 \cdot 0$ $\Rightarrow 0 + 0 - 6$
$-2 \cdot -3$



AB

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

MENTRE $BA \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

TRASPOSTA DI UNA MATRICE

• È LA MATRICE CHE SI OTTIENE SCAMB. LE RIGHE CON LE COLONNE

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$-1 \ 1 \,'$

- SIMMETRICA SE $A = A^T$
- ANTI SIMMETRICA SE $A = -A^T$

SIMMETRICA $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ CONTANO SEMPRE LE DIAGONALI

$A = (a_{ij})$

$\hookrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

ASIMMETRICA $A \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

PROPRIETÁ

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(sA)^T = sA^T$

$(A^T)^T = A$

$(AB)^T = B^T A^T$

$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

DETERMINANTE E INVERSA

PRODOTTO RIGA PER COLONNA MATRICE $N \times N$

SE É UNA MATRICE QUADRATA ALLORA $A^2 = A \cdot A$

O $A^N = A \cdot \ldots \cdot A$

VALGONO SEMPRE LE PROPRIETÁ $A^N A^M = A^{N+m}$

$(A^N)^m = A^{N \cdot m}$

$A^0 = I$

MATRICE INVERTIBILE

$2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot 2^{-1} = 1$

$A^{-1} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I$

LA MATRICE QUADRATA SI DICE INVERTIBILE SE ESISTE UNA MATRICE QUADRATA B TALE CHE $AB = BA = I$

SE UNA MATRICE A É INVERTIBILE $\Rightarrow$ LA MAT B É UNICA ED É A^{-1}

SE A INVERTIBILE $\Rightarrow A^{-N} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}$

B e B' RISOLVONO LA STESSA EQ. ALLORA

$B = B \cdot I = B(AB') = (BA)B' = IB' = B'$

L'UNICA MATRICE NON INVERTIBILE É QUELLA NULLA

es: DATA

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = I \qquad A^3 = A\overset{=I}{A^2} \Rightarrow AI = A$

$A^{123} = A^{122} \cdot A = (\underset{I}{A^2})^{61} = (\underset{I}{I})^{61} A = IA = A$

$A^{-1} = A$

$A^{-72} = I$ POTENZE PARI ANCHE NEGATIVE DANNO <u>SEMPRE</u> I

es

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ RIGA·COLONNA $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = 0$

A^{-1} NON ESISTE PERCHÉ $A^{-1} \cdot A^3 = A^2$

A^{-1} NON ESISTE PERCHÉ $A^{-1} \cdot A^3 = A^2$

NON ESISTE $\Leftarrow$ NON È VERO $\Leftarrow$ $A^{-1} \cdot \emptyset = A^2$

ES

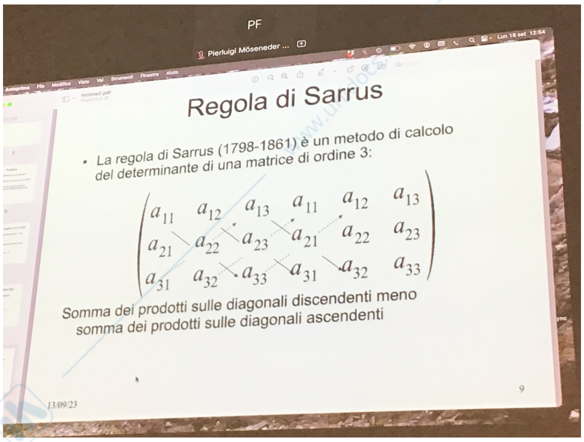
$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ DEFINIRE SE È INVERTIBILE COME SI FA?

NECESSARIO INTRODURRE IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

$A = (a) \quad \det A = a$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det = ad - bc$

PER LE MATRICI 3×3 -> REGOLA DI SARRUS
RISCRIVIAMO LA MATRICE ACCANTO A SE STESSA



ES:

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

$(1 \cdot 2 \cdot 0) + (2 \cdot -1 \cdot 1) + (-1 \cdot 0 \cdot 1) - [(1 \cdot 2 \cdot -1) + (1 \cdot -1 \cdot 1) + (0 \cdot 0 \cdot$

$0 - 2 + 0 - [-2 - 1 + 0] \Rightarrow -2 + 3 = 1$

SVILUPPO DI LAPLACE
PERMETTE DI CALCOLARE IL DET DI N SE SI SA CALCOLARE UNA MATRICE N-1

SOTTOMATRICE = MATRICE OTTENUTA TOGLIENDO ALCUNE RIGHE E COLONNE BISOGNA PERÒ RISPETTARE GLI ORDINI DELLA MATRICE
LE SOTTOMATRICI QUADRATE DI ORDINE m SI CHIAMA MINORE DI ORDINE m (MATRICE $N \cdot N \Rightarrow$ MATRICE DI ORDINE N)

IL MINORE COMPLEM. M_{ij} DELL'ELEMENTO a_{ij} È IL MINORE CHE SI OTTIENE TOGLIENDO AD A LA I-ESIMA RIGA E LA J-ESIMA COLONNA

IL COMPLEM. ALGEBRICO DI A_{ij} È $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix}$ $\quad M_{21} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M_{21} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M_{22} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

SVILUPPO DI LAPLACE LUNGO LA I-ESIMA RIGA

SE A È UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE $N \Rightarrow$
FISSATO UN INDICE i SI HA

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

es

$$\det \begin{pmatrix} +1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & +0 & 1 & 0 \\ +1 & -1 & 1 & 1 \\ -0 & +2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

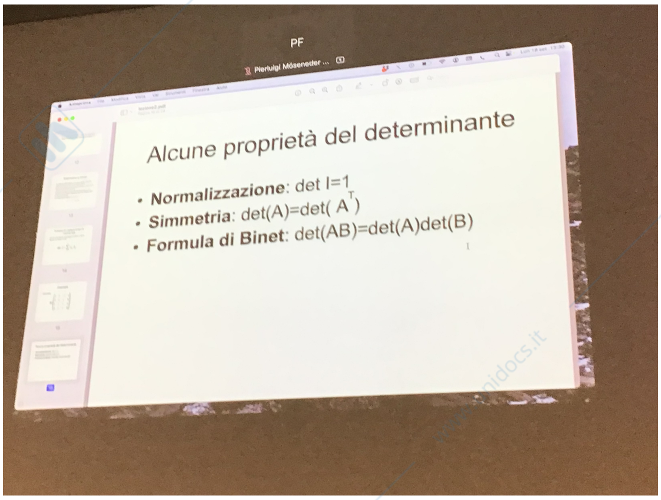
SVILUPPIAMO LUNGO LA 2ª RIGA PERCHÉ PIÙ 0.

REGOLA DELLA SCACCHIERA PER IL SEGNO $+-$

$$-2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E SI TOGLIE LA RIGA E COL. DOV'ERA MENTA

PROPRIETÀ DETERMINANTE



NON SI PUÒ $\det(t \cdot A) = t \det A$ NO!
$\det(A \cdot B) = \det A + \det B$ NO!

FORMULA BINET

SE A È INVERTIBILE $\Rightarrow \det A \neq 0$
e $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

CONDIZ. NECESSARIA E SUFFICIENTE: A è INVERT SE E SOLO SE $\det A \neq 0$

A È INVERT $\Rightarrow A'$

$A'A = I \qquad \det(A'A) = \det(I) = 1$

$\det(A^{-1}) \det(A) = 1$

$) = 1$

$\det A \neq 0$

$\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

CALCOLO DELL'INVERSA

DATA UNA MATRICE A QUADRATA SIA C LA MATRICE CHE $c_{ij} = A_{ij}$

L'AGGIUNTO CLASSICO DI A È LA MATRICE $AGG(A) = {}^{t}C$ TRASPOSTA

SI HA CHE $A\,AGG(A) = AGG(A)A = \det(A)I$

QUINDI SE $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} AGG(A)$

SIA $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ TALE CHE $ad - bc \neq 0$

CALCOLA L'INVERSA DI A

$\Rightarrow$ MATRICE C

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

$A_{11} = d$

$A_{12} = -c$

$A_{21} = -b$

$A_{22} = a$

$C = \begin{pmatrix} d & -c \\ -d & a \end{pmatrix}$

AGG. CLASSICO = TRASPOSTA DI $A \Rightarrow$

$AGG(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ NON INVERT PERCHÉ IL DET $= 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det \Rightarrow 0 + 0 + 1 - 1 - 1 - 0 = -1 \neq 0$ INVERT.

INVERSA $= C : A_{11}\ A_{12}\ A_{13}\ A_{21}\ A_{22}\ A_{23}\ A_{31}\ A_{32}\ A_{33}$

$A_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ $\quad A_{12} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$A_{13} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ $\quad A_{21} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$A_{22} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ $\quad A_{23} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = +1$

$A_{31} = -1$ $\quad A_{32} = 0$ $\quad A_{33} = 1$

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

$AGG(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

MATRICI A BLOCCHI

MATRICI A BLOCCHI

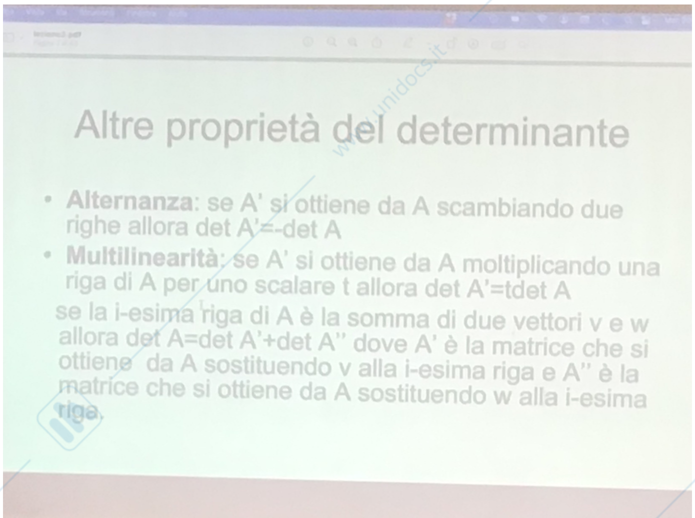
$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ DOVE A_1 e A_2 SONO MATRICI QUADRATE

PROPRIETÀ DETERMINANTE

- NORMALIZZAZIONE $\det(I) = 1$
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- ALTERNANZA $\Rightarrow$ SE A' SI OTTIENE DA A SCAMBIANDO DUE RIGHE ALLORA $\det A' = -\det A$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4$

- MULTILINEARITÀ



$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 8$

$\det\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$8 \cdot 4 = 32$

A DI ORDINE n $\qquad \det(tA) = t^n \det A$

MULTILIN.

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$(1\ 0\ 1) + (0\ 2\ 0)$

CONSEGUENZE PROPRIETÀ

- SE UNA MATRICE A HA DUE RIGHE UGUALI ALLORA $\det(A) = 0$

← n VETTORI

A = matrice $n \cdot m$ $\Rightarrow$ $A_1 \; A_2 \; \dots \; A_N$ = righe di A ← N vettori

$A^1 \; A^2 \; \dots \; A^m$ = colonne di A ← N vettori

A $n \times m$ $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_i \\ A_j \\ A_N \end{pmatrix}$

$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_i \\ A_N \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ ho scambiato due righe

$$\det(A') = -\det(A)$$

Se però $A_i = A_j$ $\quad A = A'$

$\det(A) = \det(A') \Rightarrow \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sottraggo riga

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$= 2 \cdot 2 = 4$

Siccome $\det(A) = \det(A^T)$ allora lo sviluppo di Laplace si può fare anche lungo le colonne:

vale $\det A = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} A_{ij}$ ← su colonne

$\det A = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} A_{ij}$ su righe

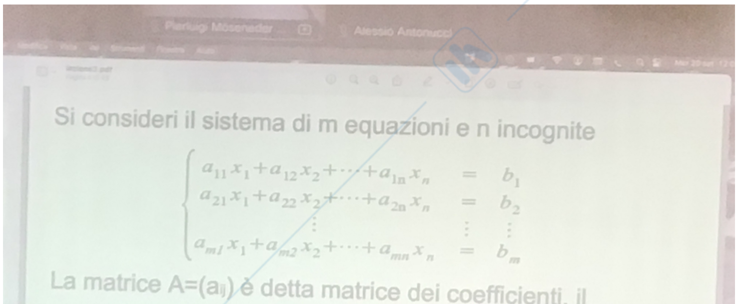
Es

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 0$$

$$-1\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 0$$

$= -(-1) - (-9) = 10$

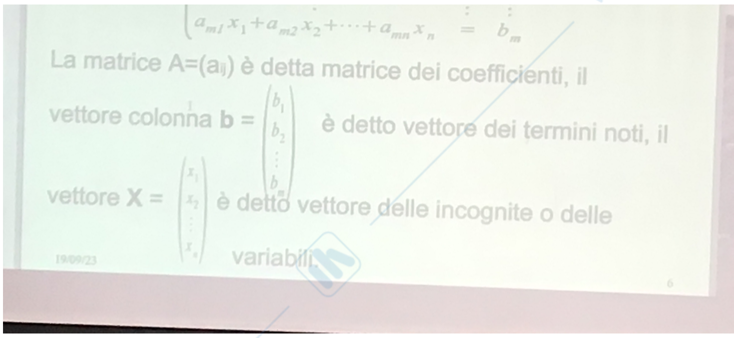
SISTEMI LINEARI



Si consideri il sistema di m equazioni e n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matrice A=(a_{ij}) è detta matrice dei coefficienti, il



UN SISTEMA DI m EQUAZIONI E N INCOGNITE È EQUIVALENTE ALL'EQUAZIONE $Ax = b$
DOVE A È LA MATRICE DEI COEFFICIENTI, b È IL VETTORE DEI TERMINI NOTI E X È IL VETTORE DELLE INC.

ES

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

↳ RIGA PER COLONNA $\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 3x_3 \\ -x_1 & x_2 & -6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$-x_1 + x_2 - 6x_3 = -2$$

LA MATRICE COMPLETA DI $AX = b$ È LA MAT. (A, b)

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

SISTEMI OMOGENEI : LEGGI DI SOVRAPPOSIZIONI

- UN SISTEMA $AX = b$ SI DICE OMOGENEO SE $b = 0$
- SE x_1, x_2 SONO SOLUZIONI DI UN SISTEMA OMOGENEO ALLORA ANCHE $x_1 + x_2$ LO È.

PARTICOLARE + OMOGENEO

DATO UN SISTEMA $Ax = b$ L'INSIEME DEI VETTORI COLONNA V CHE RISOLVONO IL SISTEMA SI INDICA CON IL SIMBOLO $Sol(A, b)$

Eliminazione e matrice completa

- Invece di usare le equazioni per eliminare variabili si possono equivalentemente utilizzare le righe della matrice completa.
- In questo modo le operazioni che trasformano il sistema in un sistema a gradini diventano operazioni sulle righe della matrice completa.
- Queste operazioni sono dette operazioni elementari di riga

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari