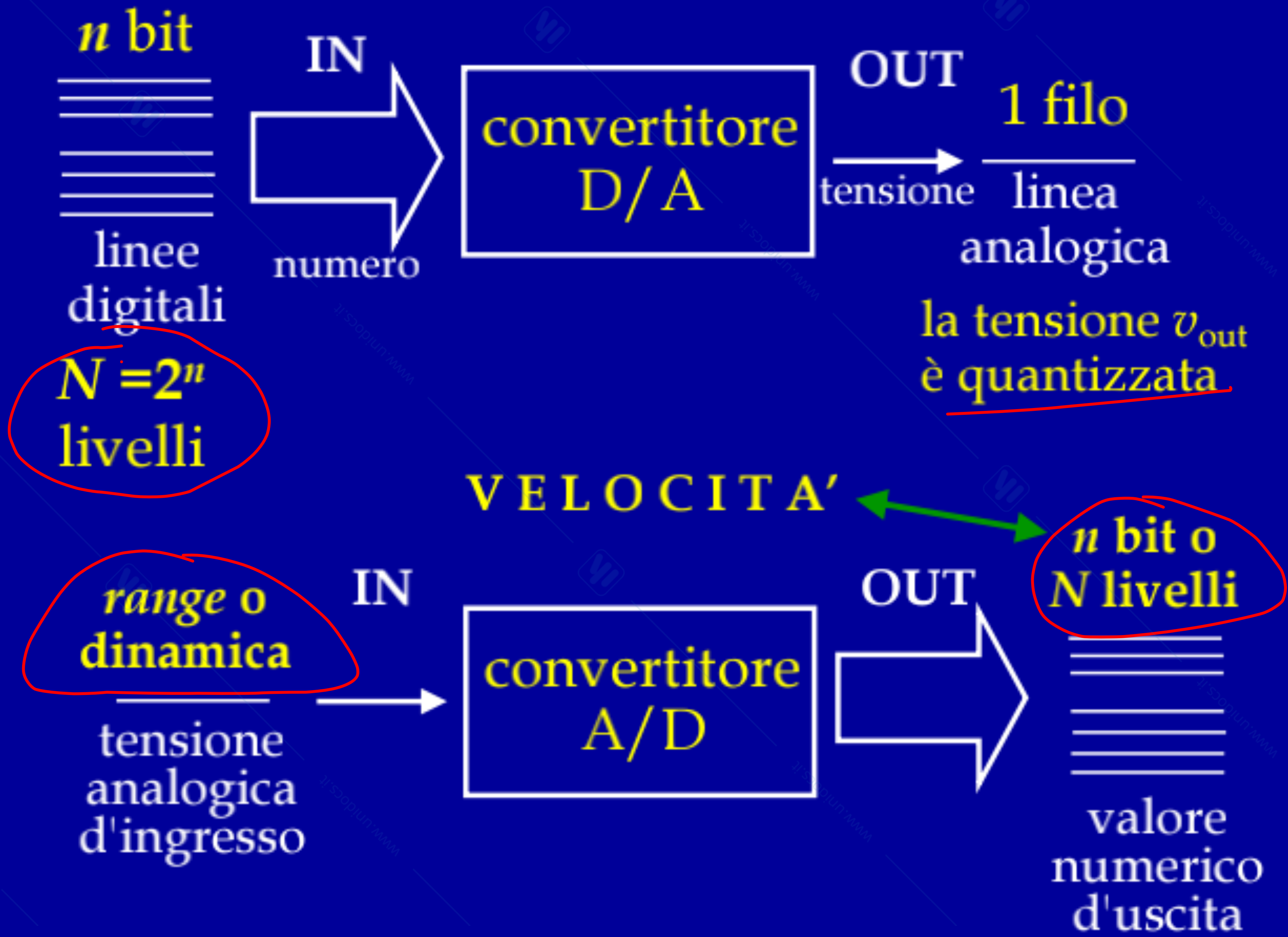
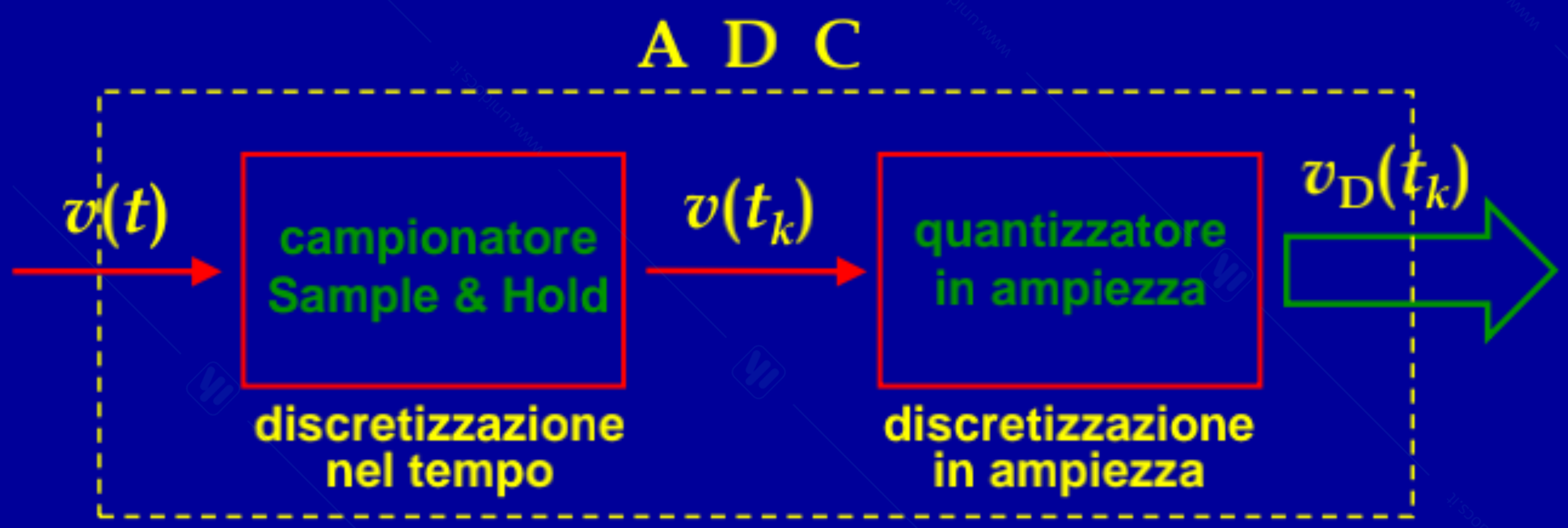
VOLTMETRI DIGITALI
E
CONVERTITORI
(D/A e A/D)

Convertitori D/A e A/D



Voltmetro o Convertitore A/D

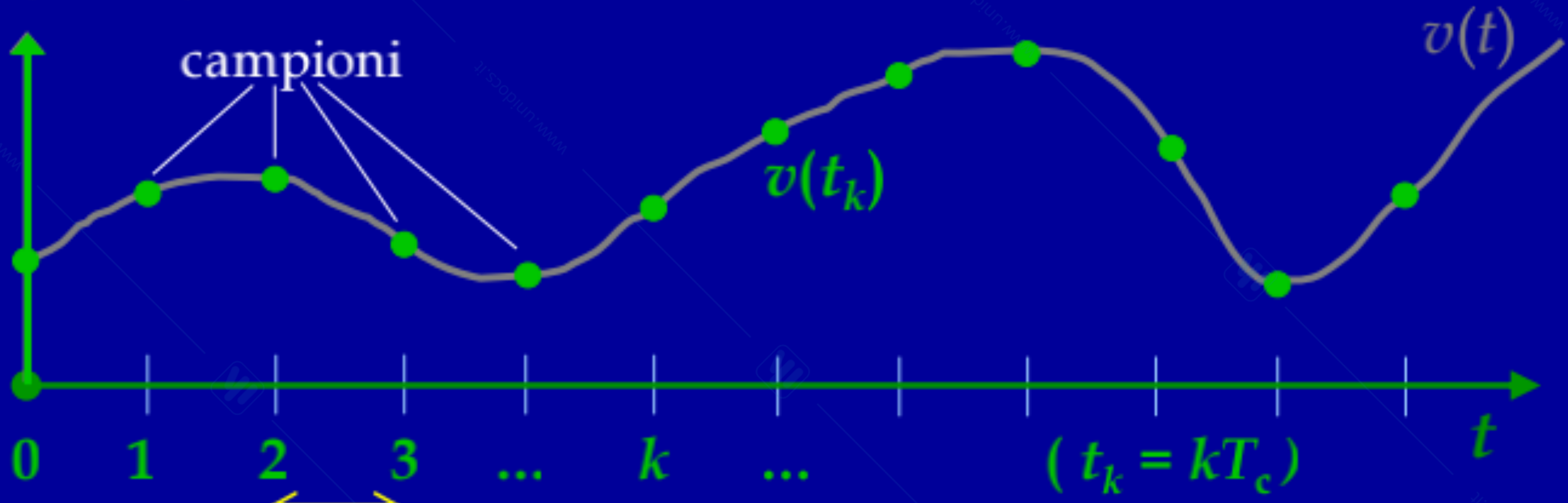
E' uno strumento che riceve in ingresso una tensione analogica e la "digitalizza" (**discretizzando** prima nel dominio del **tempo** e poi nel dominio dell'**ampiezza**):



In particolare, la **quantizzazione** nel dominio del tempo avviene con risoluzione $T_{Sa}=1/f_{Sa}$ (periodo [s] e frequenza [Sa/s o Hz] di campionamento)

Discretizzazione nel tempo

La **discretizzazione nel tempo** avviene campionando la tensione (segnale) in istanti di tempo regolarmente spaziati di una distanza T_c **periodo di campionamento** ($f_c=1/T_c$ **frequenza di campionamento**)



$\Delta T=T_c$ deve essere "abbastanza piccolo"

Dai soli campioni del segnale discretizzato nel tempo è possibile ricostruire l'andamento continuo senza perdita di informazione, purché vi sia **campionamento corretto**

Campionamento di un segnale (1/3)

Teorema di Shannon

Per poter ricostruire un segnale con banda limitata, è necessaria una frequenza di campionamento

$$f_c > 2\,B \qquad \text{(con } B \text{ banda massima del segnale)}$$

[[$Tc < 1/(2B)$]]

Altrimenti si verificano fenomeni di *aliasing*, che fanno perdere informazione utile e non consentono la ricostruzione del segnale per filtraggio passa-basso. Infatti la discretizzazione nel tempo induce una periodicità in frequenza: non ci devono essere sovrapposizioni tra le repliche spettrali.

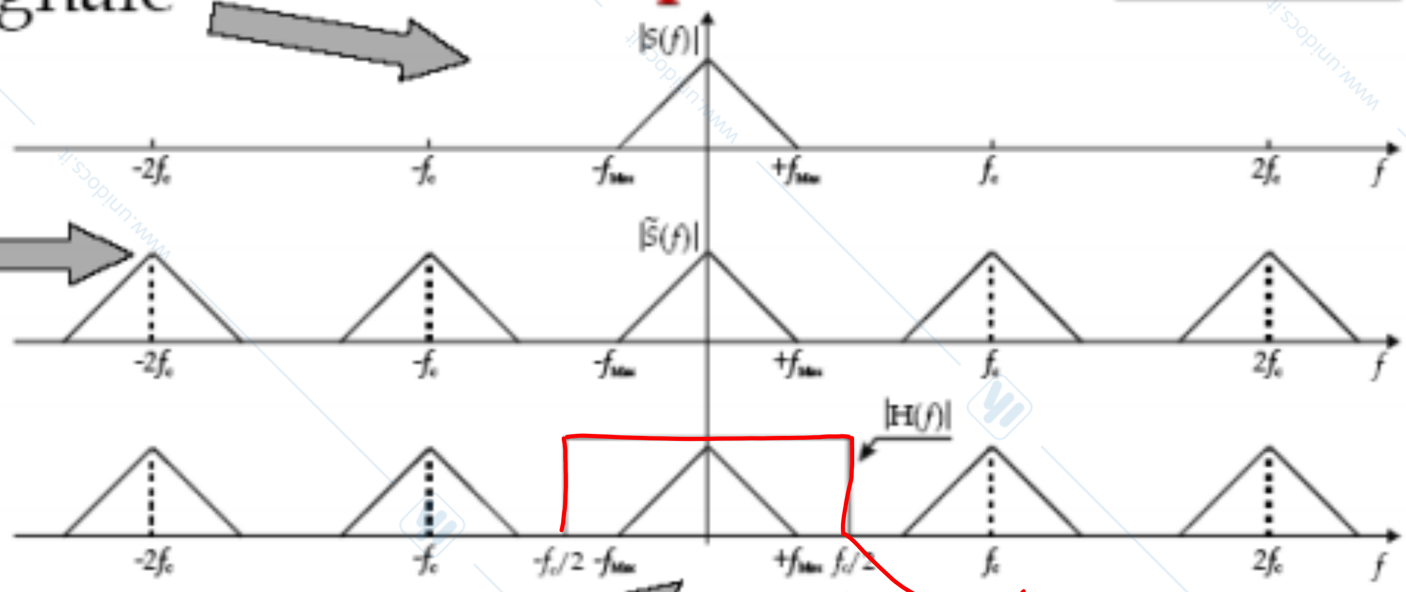
Campionamento di un segnale (2/3)

CASO I: $f_c > 2B$ (con B= *massima frequenza del segnale*)

campionamento corretto

Spettro del segnale

Spettro del segnale campionato



faccio convoluzione con il sinc nel tempo

Spettro del segnale ricostruito per filtraggio

$f_c/2$ viene detta frequenza di Nyquist e, una volta fissata la frequenza di campionamento, questa è la massima frequenza spettrale correttamente misurabile/ricostruibile per il segnale

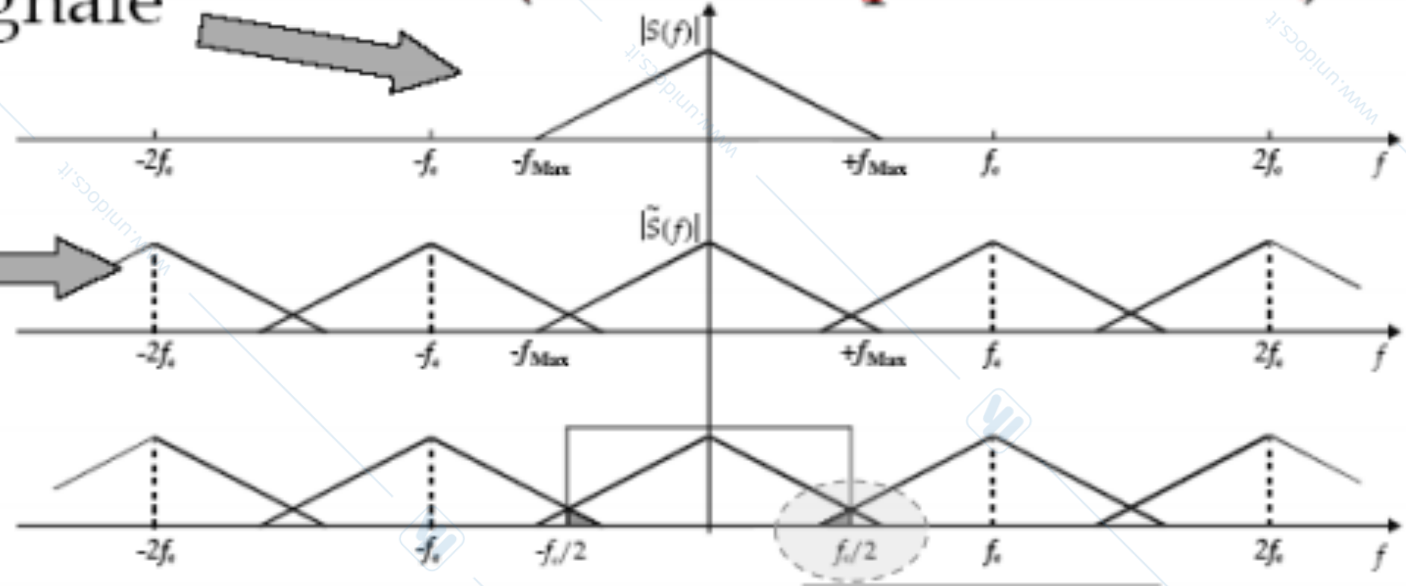
Campionamento di un segnale (3/3)

CASO II: $f_c < 2\,B$

campionamento <u>errato</u> (sottocampionamento)

Spettro del segnale

Spettro del segnale campionato

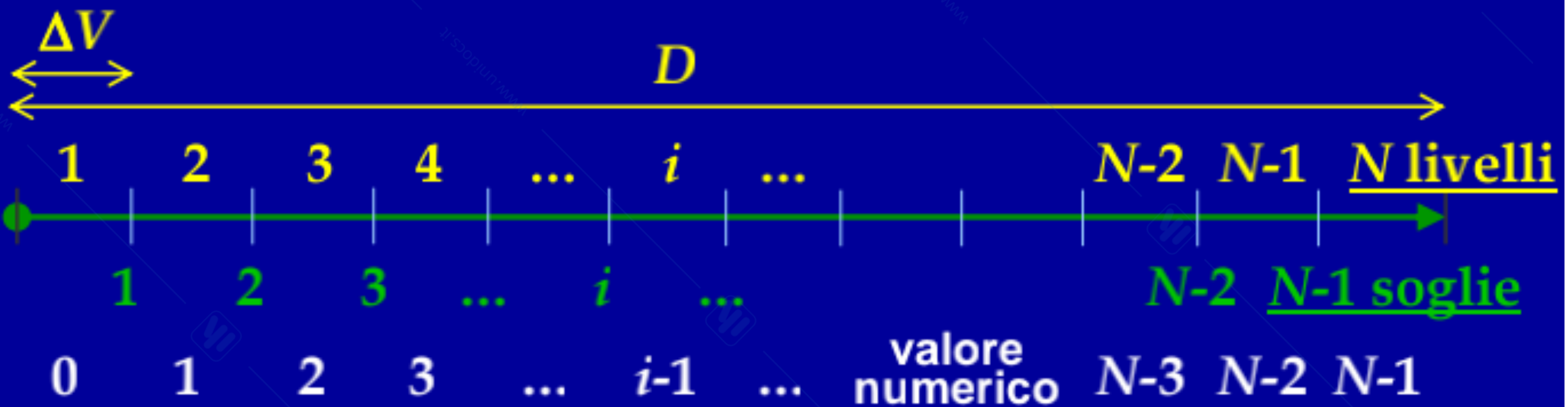


Spettro del segnale ricostruito per filtraggio

aliasing

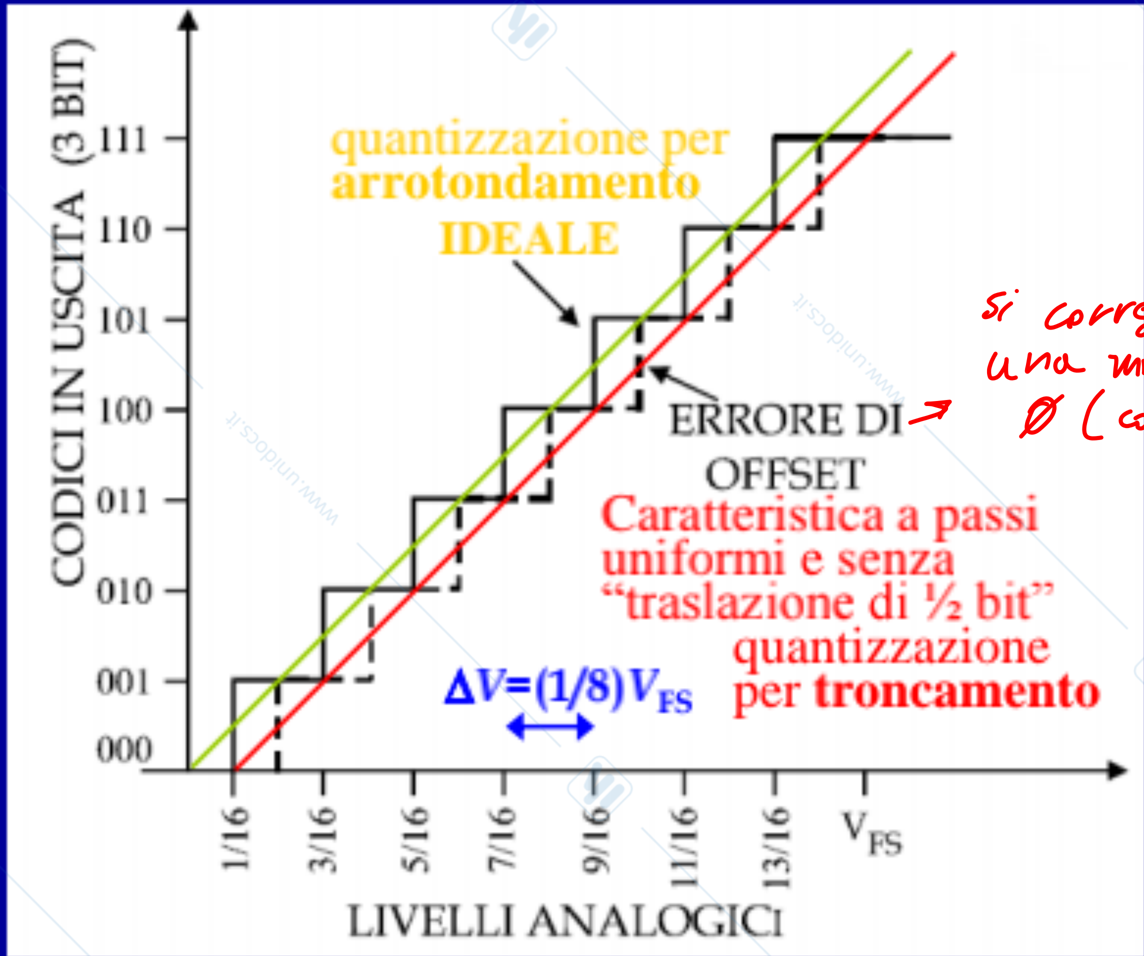
Quantizzazione in ampiezza

La **quantizzazione in ampiezza** avviene suddividendo la **dinamica *D* di misura** (intervallo di valori di tensione analogica misurabili in ingresso) in ***N* sottointervalli (livelli)** di **larghezza costante $\Delta V = D/N$ (risoluzione)**



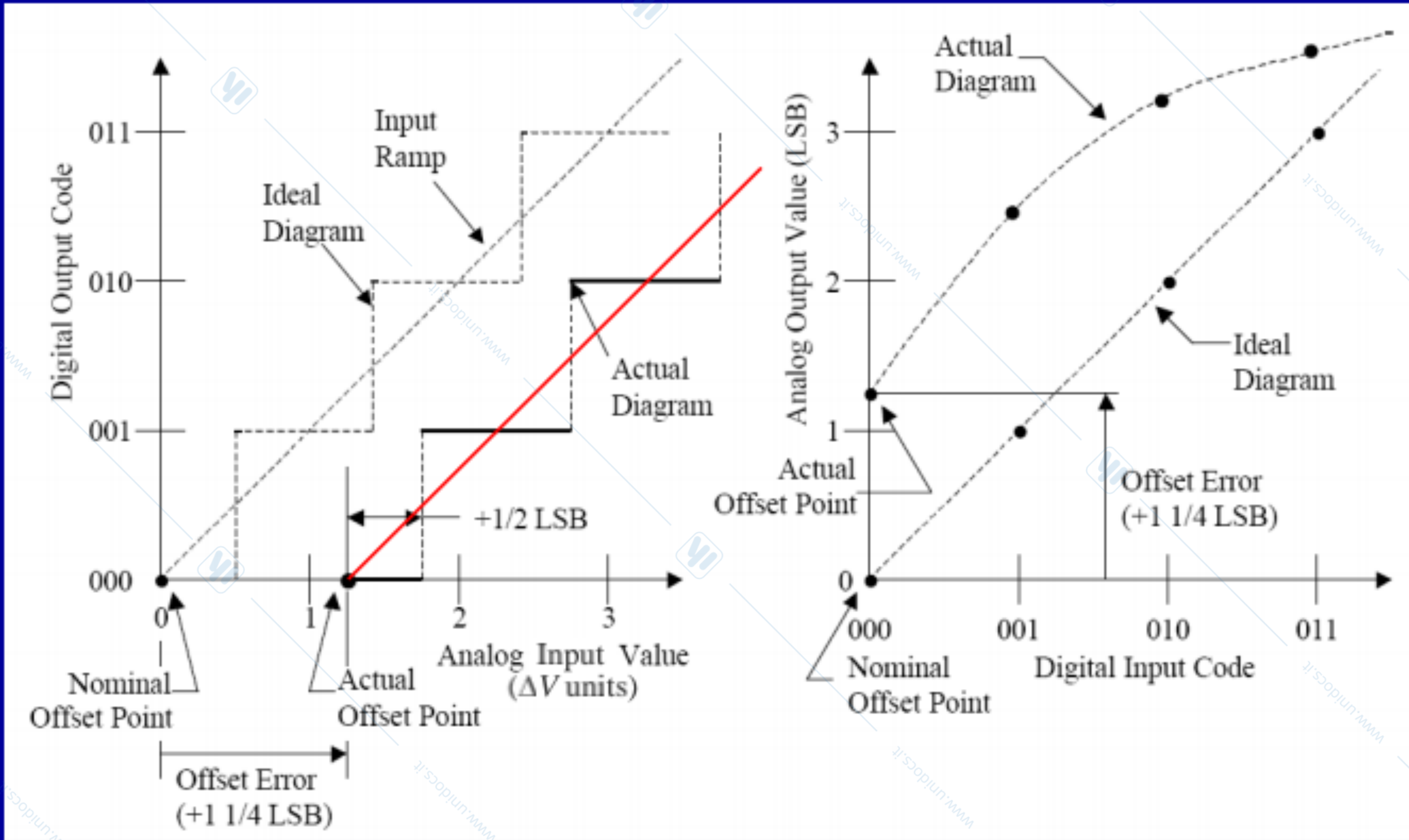
A tutte le tensioni analogiche che cadono nell'intervallo *i*-esimo si associa **un unico valore numerico**: l'**intero *i*-1** (da 0 a *N*-1) che identifica l'intervallo in questione

Errori nei convertitori: quantizzazione



si corregge facendo una misura dello Ø (costante che trasla tutto)

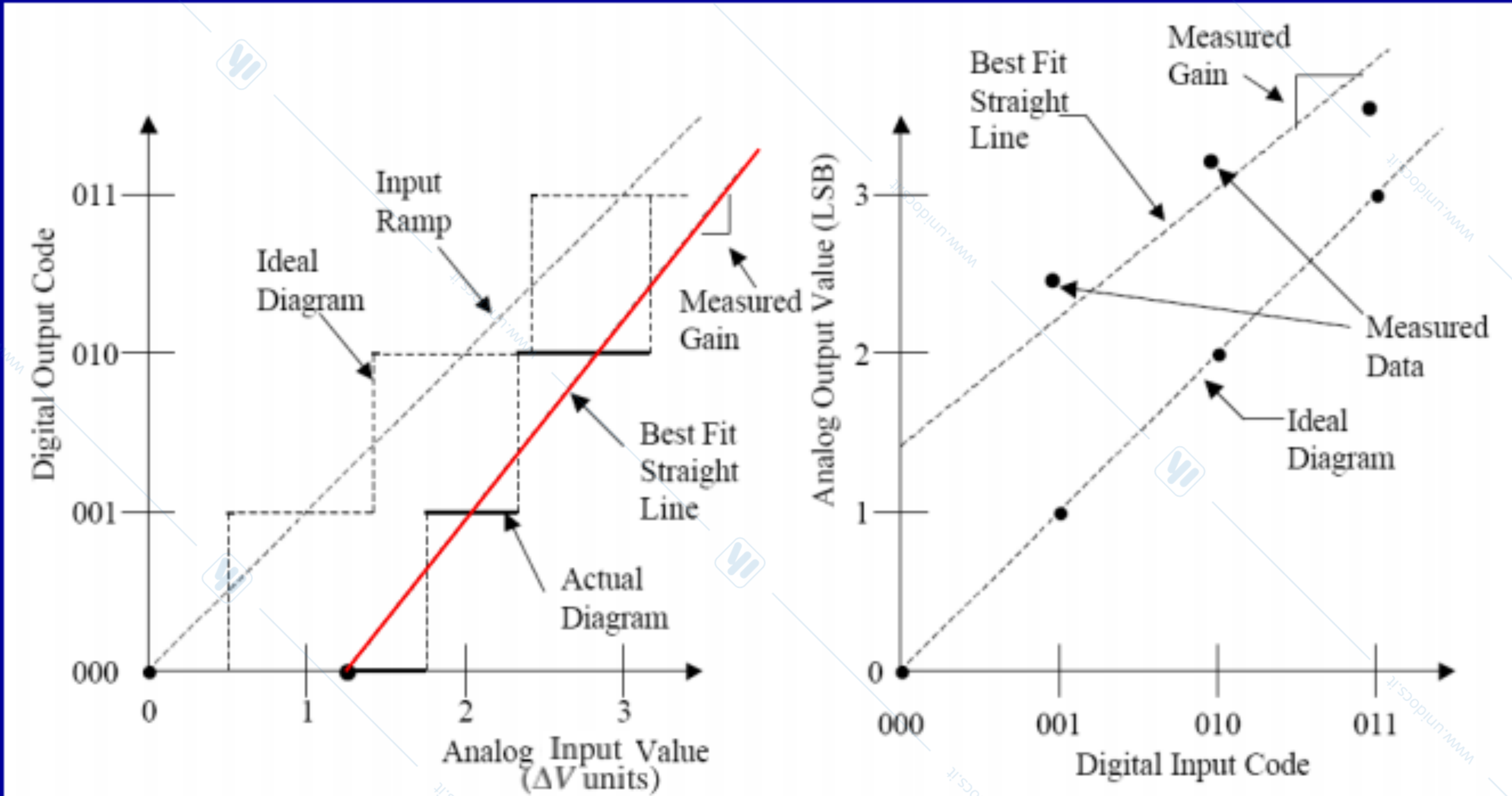
Errori nei conv. A/D e D/A: *offset*



ADC

DAC

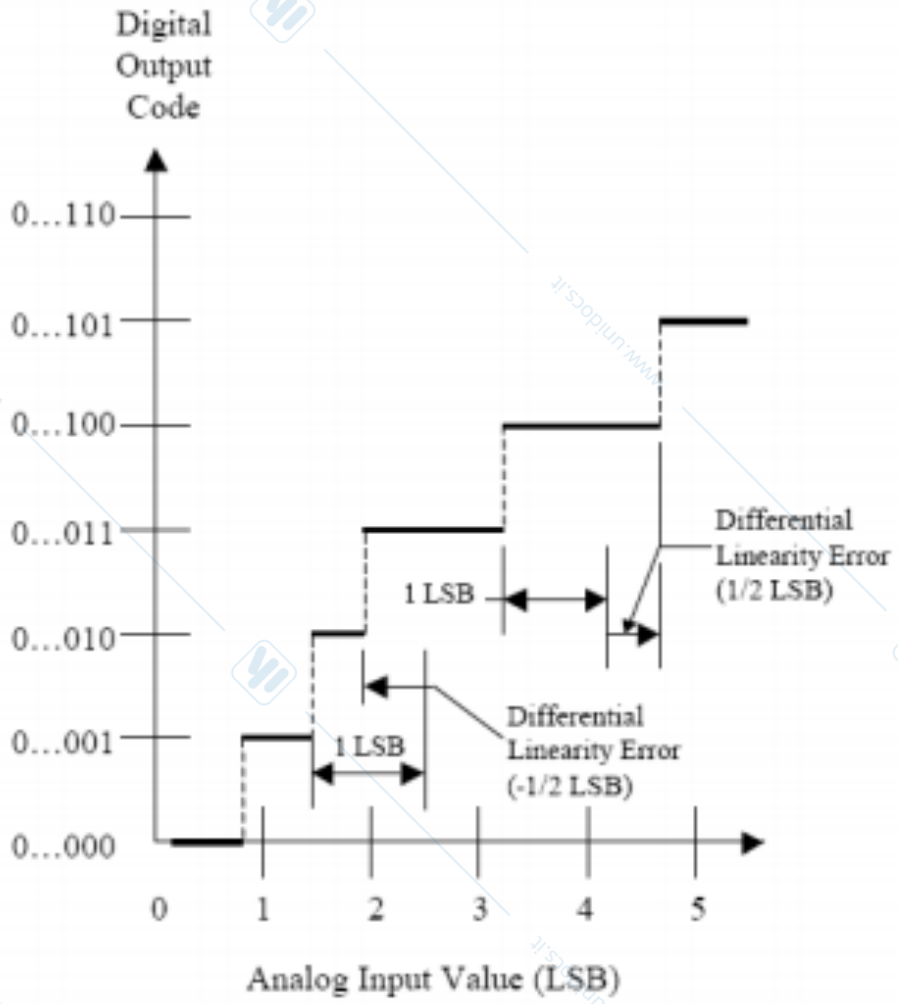
Errori nei convertitori: *gain*



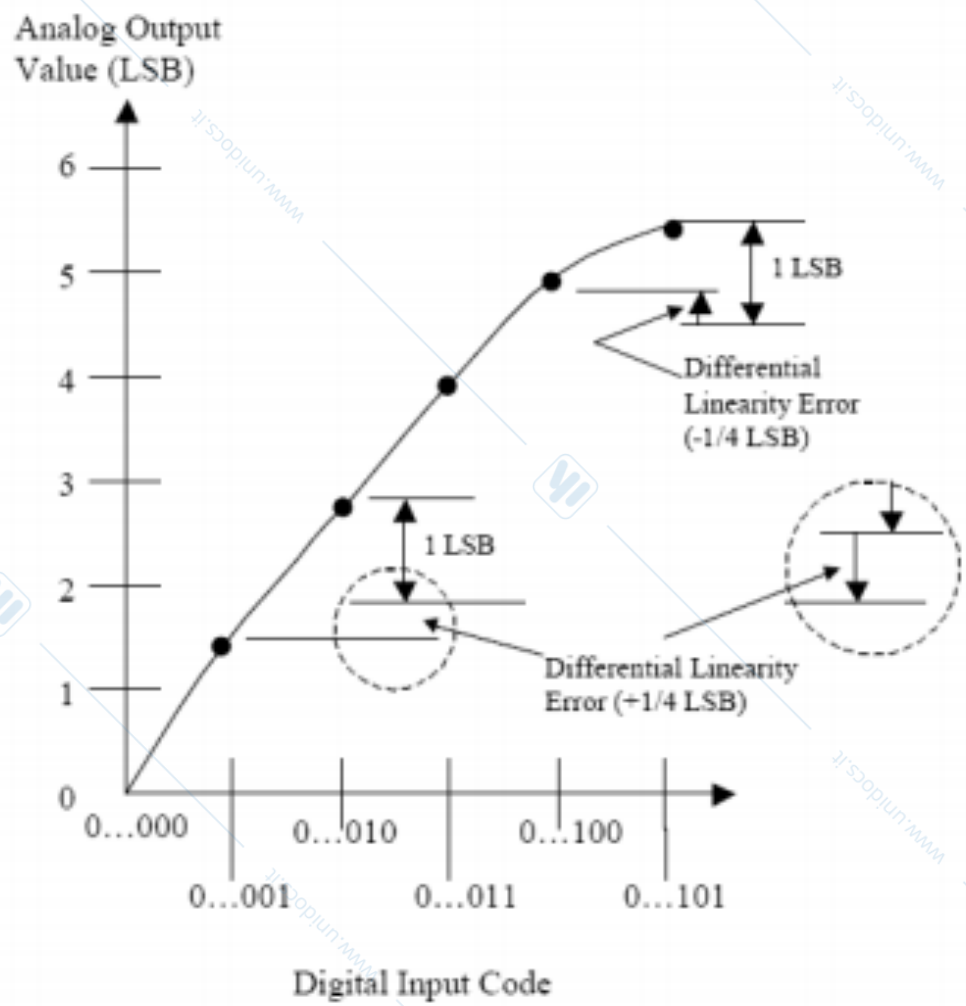
ADC → si misura una tensione nota e si fa passare la linea per quel punto ⇒ corregge l'errore di guadagno DAC

Errori nei convertitori: *DNL*

Differential Non-Linearity (non-linearità differenziale)



ADC



DAC

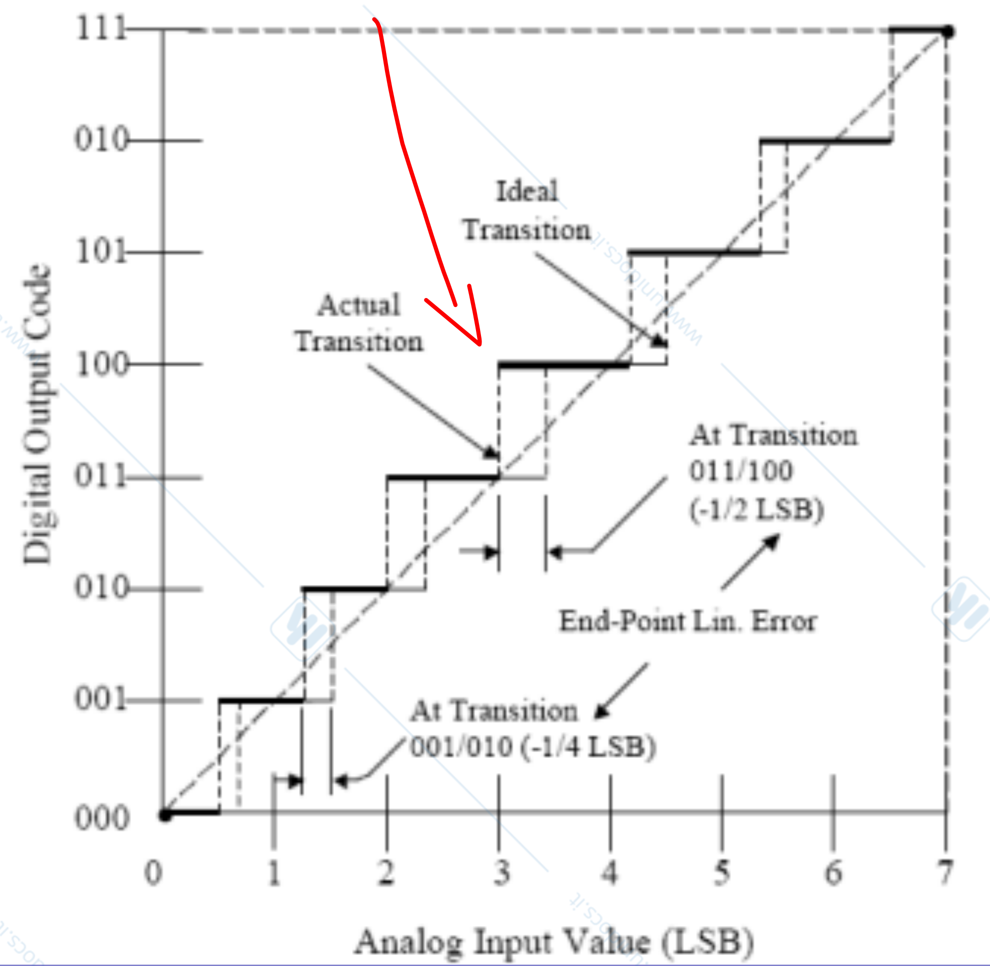
Errori nei convertitori: *INL*

una diff. può fare ± e quindi dare una non lin. integr. piccola

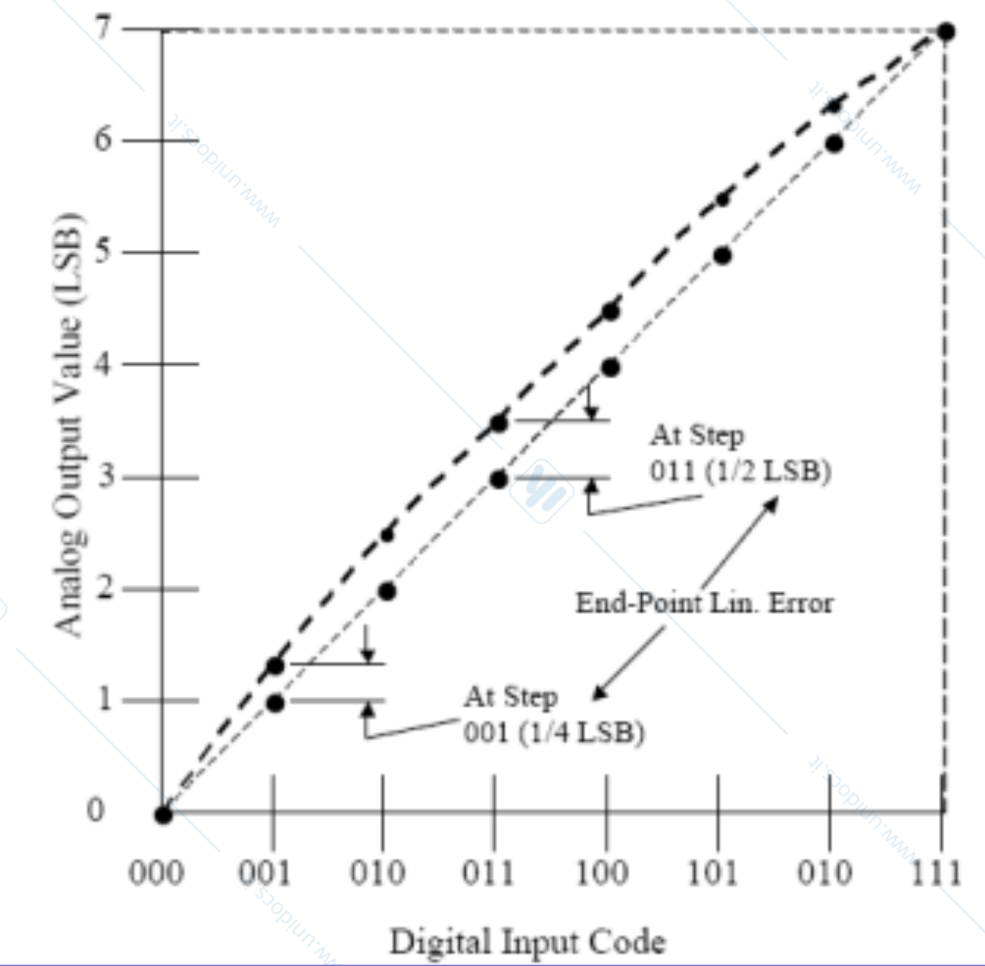
Integral Non-Linearity (non-linearità integrale)

somma di tutti gli errori

l'errore max. è al centro

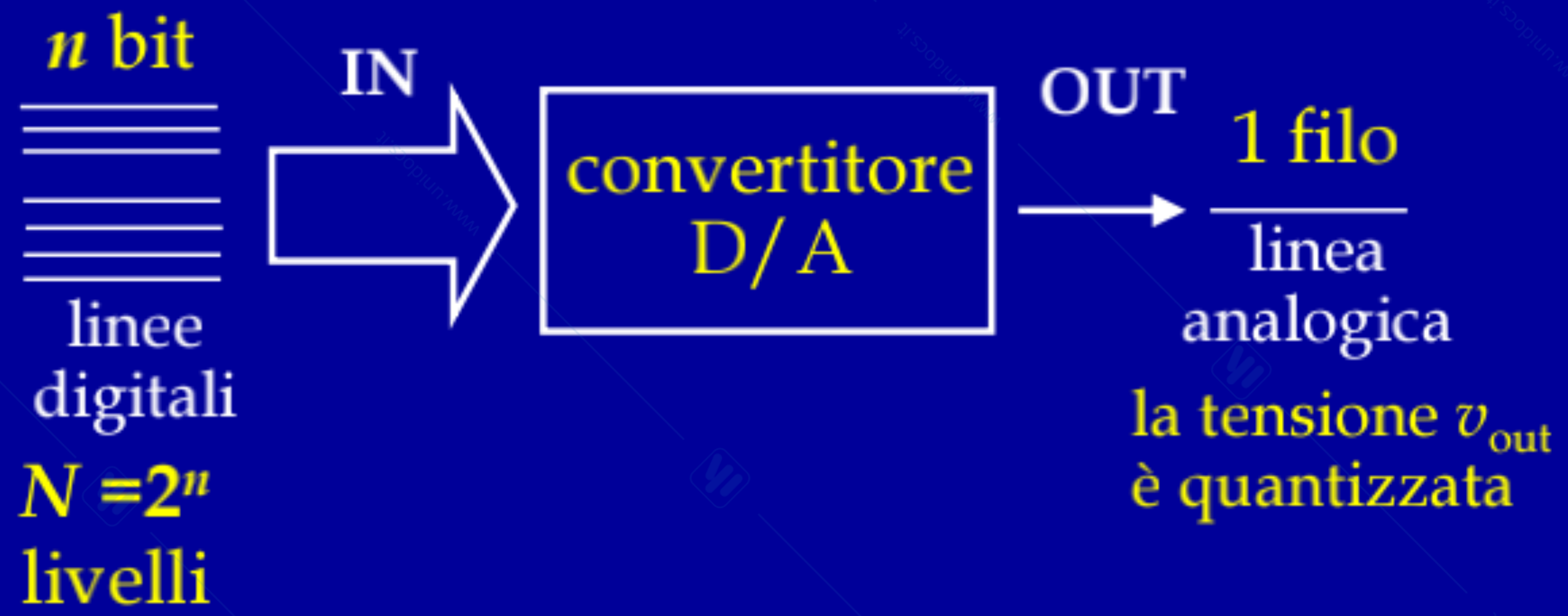


ADC



DAC

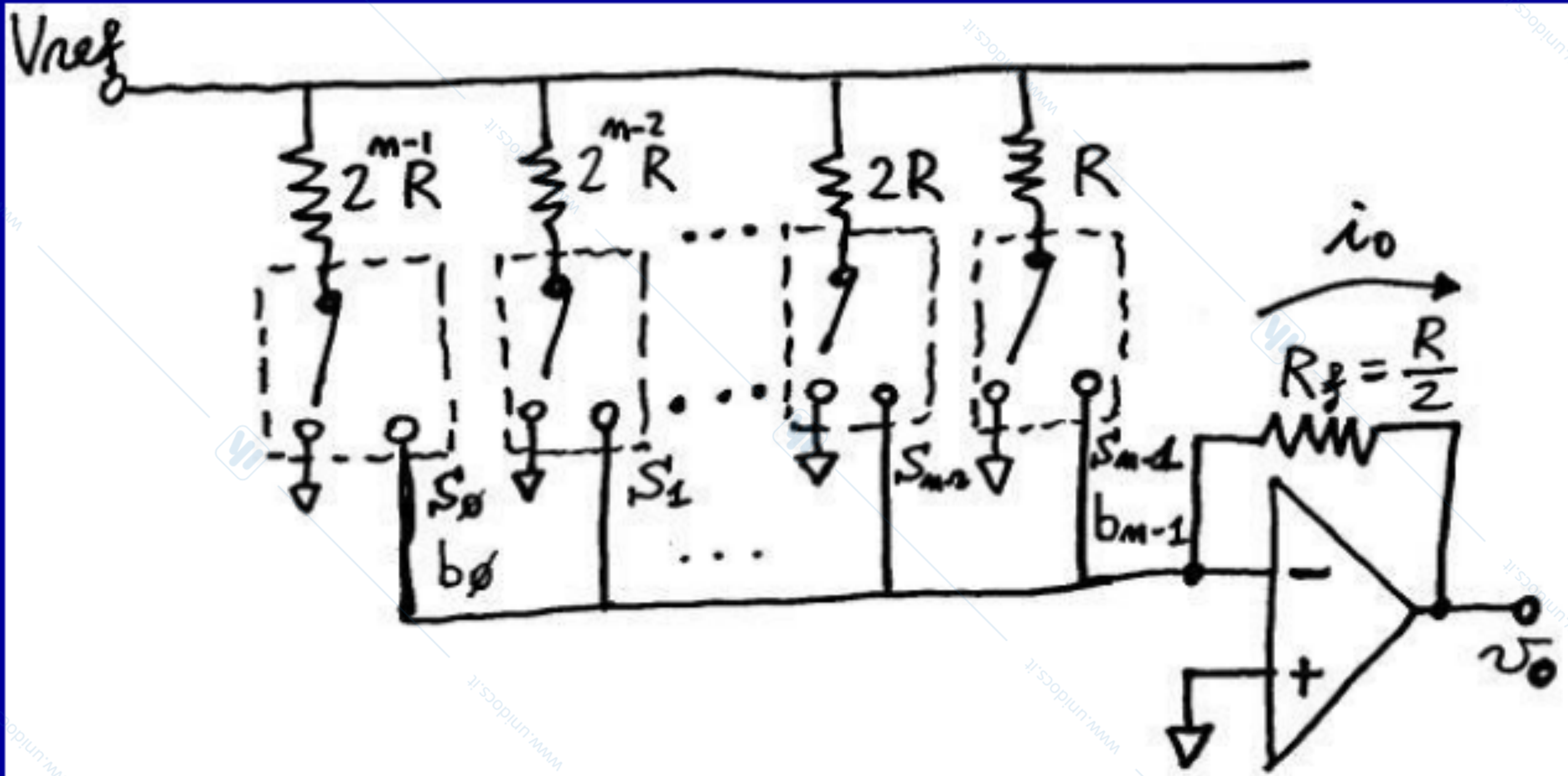
Convertitore D/A



Convertitore D/A a rete di R (1/4)

Da un'unica tensione di riferimento costante (V_{ref}) si prelevano *n* correnti pesate attraverso *n* interruttori (*switch*) S_0, S_1, … S_{n-1}

<u>n = num. di bit</u>



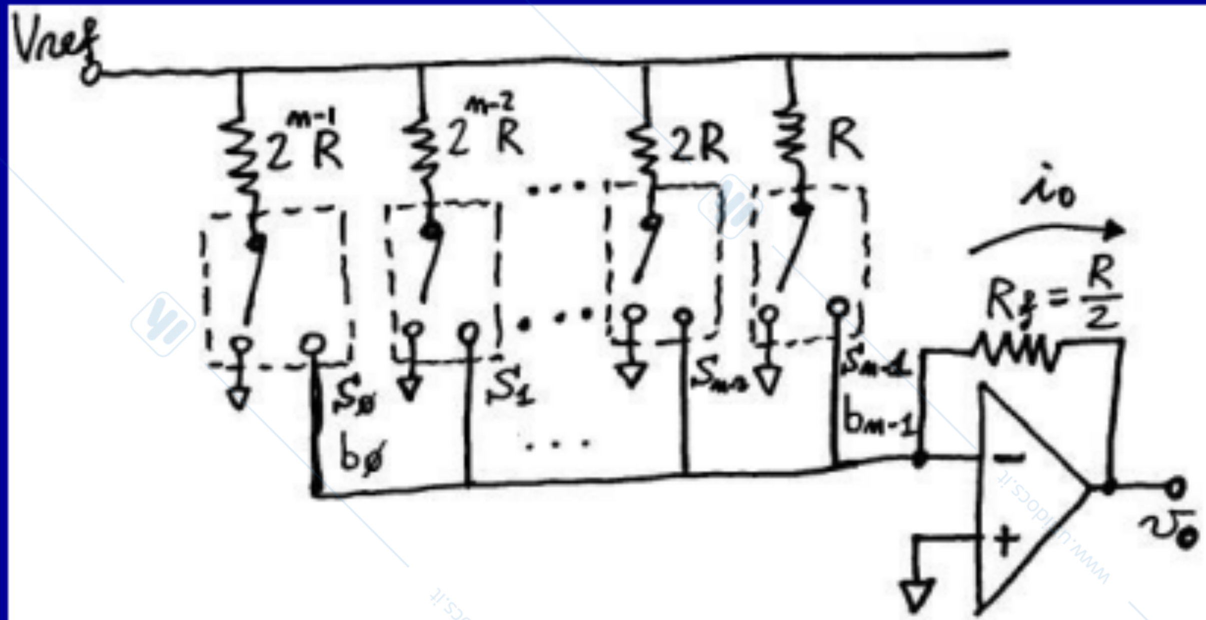
Su ciascuno *switch* S_i è posta una resistenza $r_i=2^{(n-1)-i}R$

Convertitore D/A a rete di R (2/4)

Gli *switch* s_i sono comandati dalle cifre binarie b_i del numero da convertire in tensione, con pesi t.c.

b_0	= **LSB**	Least Significant Bit
b_{n-1}	= **MSB**	Most Significant Bit

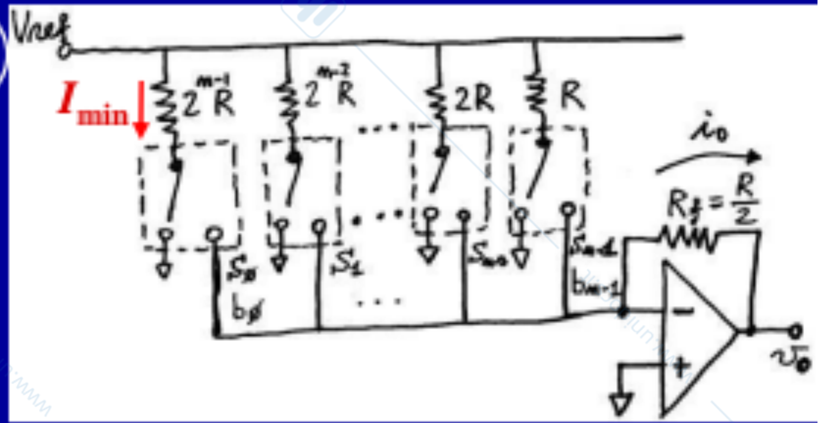
L'operazionale serve da sommatore delle correnti pesate che passano attraverso gli *switch* e converte la corrente risultante i_o, attraverso la resistenza di *feedback*, in un'uscita di tensione v_o



$$v_o = -R_f i_o$$

Convertitore D/A a rete di R (3/4)

n bit



Le correnti pesate sono

$$i_i = \frac{V_{ref}}{2^{(n-1)-i}R} = 2^i \frac{V_{ref}}{2^{(n-1)}R} = 2^i I_{min}$$

con $i = 0, 1, \ldots, n$-1 (come i bit della parola numerica)

La corrente complessivamente passante dagli *switch* chiusi (S_i è chiuso — posizione dx — quando b_i=1) è

$$i_o = \frac{V_{ref}}{2^{(n-1)}R}\left(b_0 + 2b_1 + \ldots + 2^{n-2}b_{n-2} + 2^{n-1}b_{n-1}\right)$$

Convertitore D/A a rete di R (4/4)

La tensione generata in uscita è

$$v_o = -R_f i_o = -\frac{V_{ref}}{2^n}\left(b_0 + 2b_1 + \ldots + 2^{n-1} b_{n-1}\right)$$

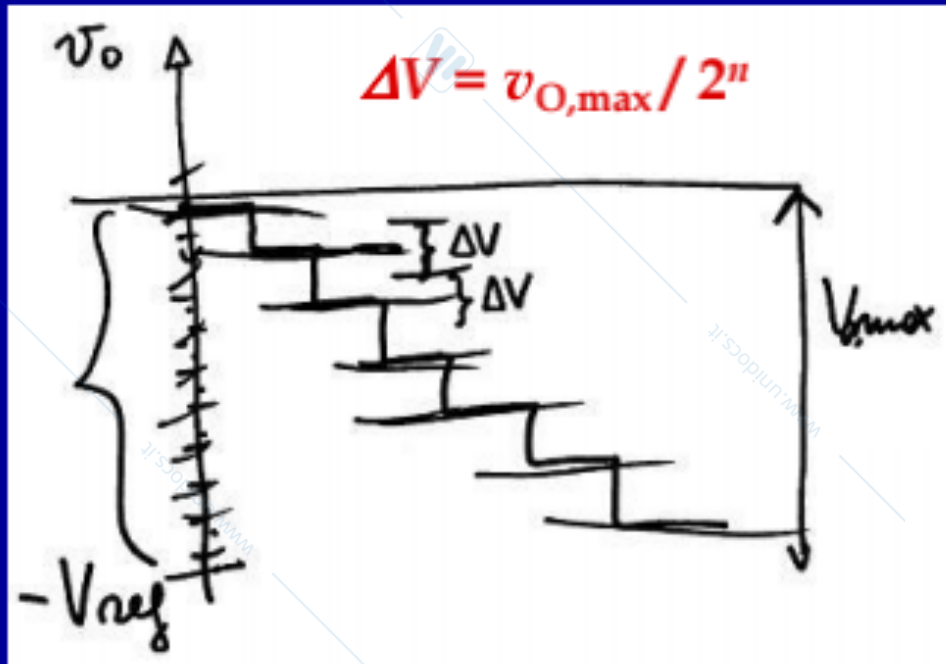
$$\Delta V = -\frac{V_{ref}}{2^n}$$

$$v_o = \left(b_0 + 2b_1 + \ldots + 2^{n-1} b_{n-1}\right)\Delta V = k\,\Delta V$$

con k numero intero, compreso tra 0 e 2^n-1

L'accuratezza del DAC dipende da V_{ref}, dalle r_i, e dalla qualità degli *switch*

I valori di tensione analogica v_o in uscita, discreti e generati da campioni digitali a n bit, hanno **incertezza** $u(v_o) = \frac{v_{o,max}/2^n}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}}$



Voltmetri digitali (DVM) e DMM

TIPI D'IMPIEGO: misure (*V*…, *I*,*R*,*T*,*C*,...) e acq. dati
MULTIMETRO

CARATTERISTICHE:

numero di campi di misura (portata,*range*,dinamica),

numero di cifre decimali (m), numero di bit (n),
numero di livelli (N)

→ RISOLUZIONE, ACCURATEZZA,
VELOCITA' DI LETTURA

reiezione (insensibilità) al rumore di modo differenziale

DVM e DMM → *DISPLAY* DIGITALE memorizzazione del dato/misura

Tipi di voltmetri e Risoluzione

Voltmetri - DIFFERENZIALI $V_x - kV_{ref} \cong 0$

- INTEGRATORI mediano V_x

OP-AMP come COMPARATORE o INTEGRATORE

RISOLUZIONE - dimensionale ΔV **(V)**

- adimensionale δ **(1)**

$$\Delta V = \frac{D}{N} = \frac{\text{dinamica}}{\text{n° livelli}}$$

$$\delta = \frac{\Delta V}{D} = \frac{1}{N}$$

"parti per …"
e.g. 1×10^{-4}
con N=10000

m cifre decimali → $N=10^m$

n bit → $N=2^n$

$m = \log_{10}(2^n) = n\log_{10}(2) \cong 0.3\,n$

$$\delta_{\text{cifre}} = m = \log_{10}(N)$$

"cifre" *e.g.* 5 cifre
val. da 0 a 99999

La ½ cifra decimale…

Prestazioni dei voltmetri

VELOCITA' × ACCURATEZZA ~ costante

[letture/s]		[1/incertezza]	(voltmetro)
alta	-	bassa	(flash a 8 bit)
GSa/s	-	$\approx 1/10^{-3}$	N=256
media	-	media	(approx. successive a 10 – 16 bit)
MSa/s	-	$\approx 1/10^{-5}$	N=10000
bassa	-	alta	(integratori a 16 -26 bit)
Sa/s	-	$\approx 1/10^{-7}$	N=1000000

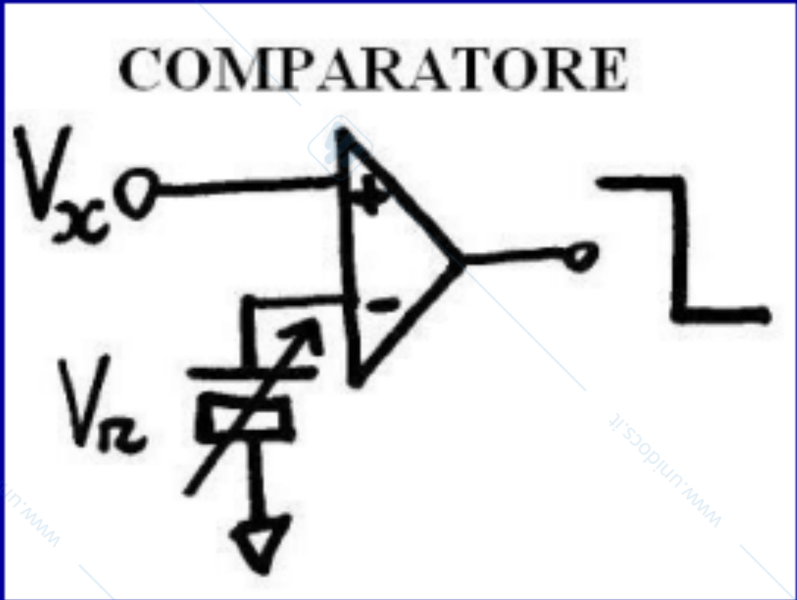
Voltmetri differenziali (1/2)

Effettuano la **misura** di una tensione **incognita** V_x mediante il **confronto** "diretto" con una tensione di **riferimento** V_r disponibile internamente allo strumento

V_r è una tensione di riferimento **variabile** e per generarla si ricorre a un **riferimento interno** che è una tensione V_0 di elevata accuratezza e stabilità

L'**accuratezza di** V_0 e dunque di V_r si ripercuote sull'accuratezza dei singoli confronti e infine su quella della misura ("*best*" V_0 è una pila Josephson)

Voltmetri differenziali (2/2)



Schema di principio di un voltmetro differenziale

La transizione avviene per

$$V_r = V_r^* = V_x$$

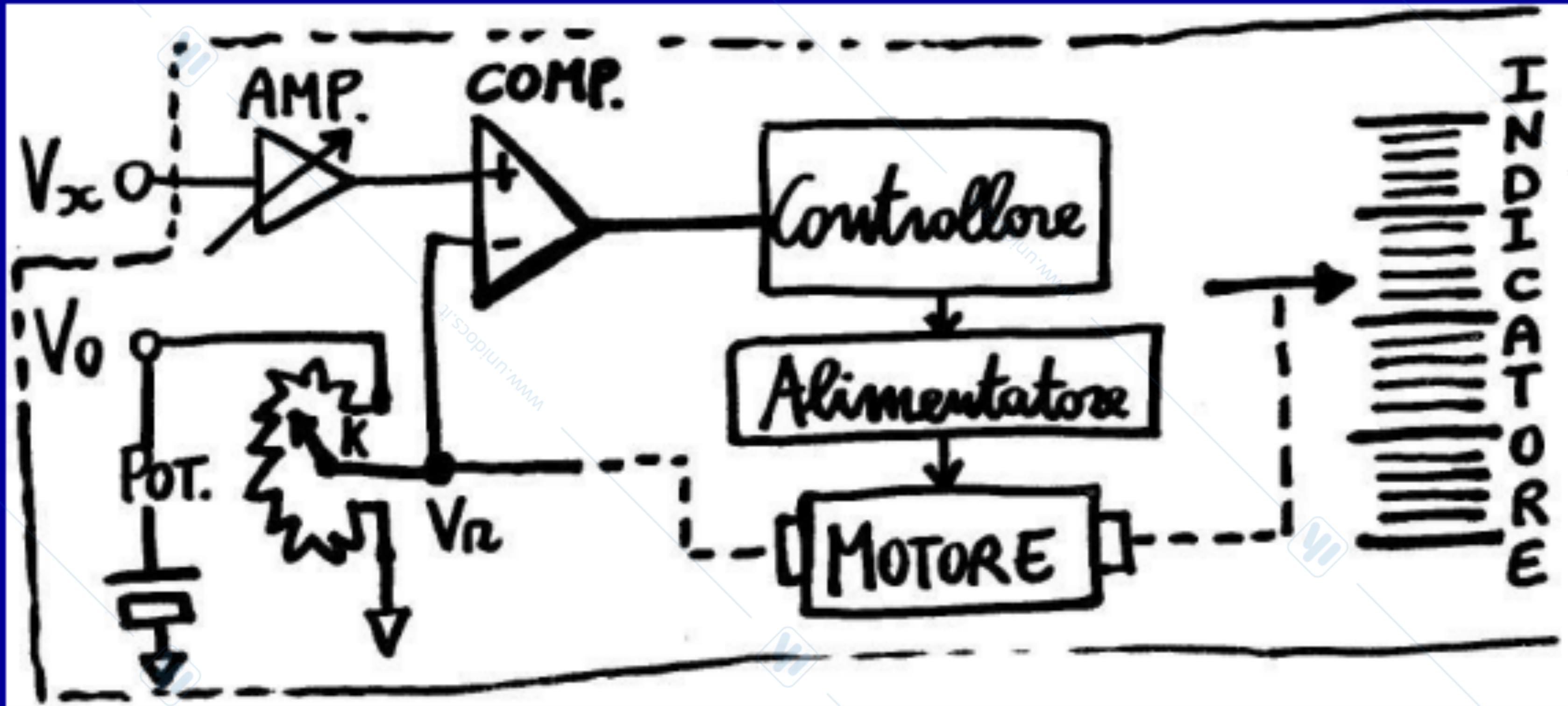
quando $v_d = v_+ - v_- = 0$

V_r viene variata da $V_{x,\,min}$ a $V_{x,\,max}$ e si registra quel valore V_r^* per cui l'uscita del comparatore commuta di livello

V_r^* viene quindi inviato al *display* del voltmetro

Voltmetro potenziometrico (1/2)

"Sistema elettromeccanico servo-assistito"



$$V_r = kV_0 \quad \text{e} \quad V_r^* = k^* \cdot V_0 = V_x$$

La risoluzione di misura dipende dalla risoluzione del divisore potenziometrico (e passo del motore)

Accuratezza: pot., comp., motore, indicatore, ...

Voltmetro potenziometrico (2/2)

La sensibilità di misura viene aumentata grazie all'amplificazione in ingresso (AMP) consentendo di rivelare segnali V_x deboli con una maggiore insensibilità al rumore del comparatore (COMP)

Caratteristiche generali:

☹ Risoluzione → bassa (2/3 cifre o 100/1000 liv.)

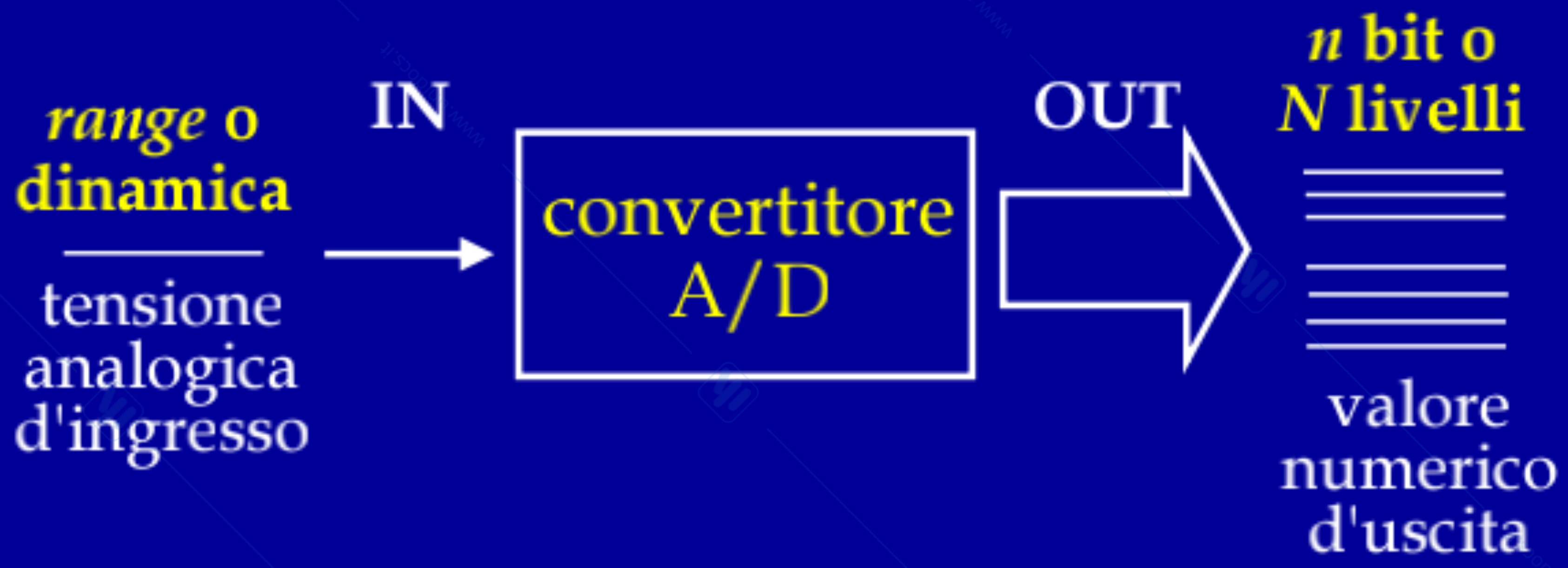
☹ Velocità → bassa (poche letture/s)

😐 Costo → contenuto (~20 kLit. ≅ 10 €)

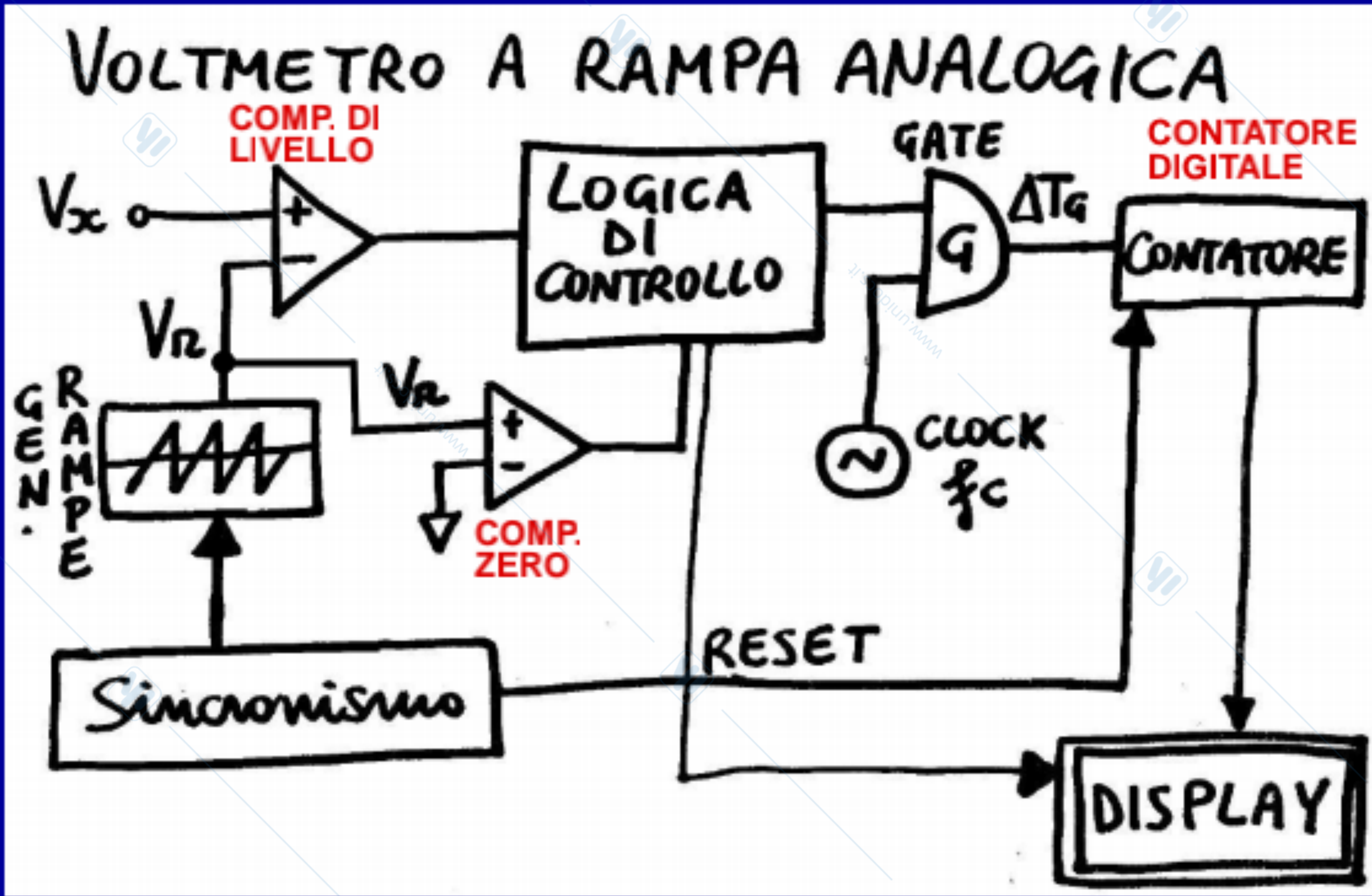
☺ Validità didattica!

Voltmetro elettromeccanico ("lento e inaccurato")
⇒ oggi risulta praticamente in disuso

Voltmetro Digitale o Convertitore A/D



Voltmetro a rampa analogica (1/6)

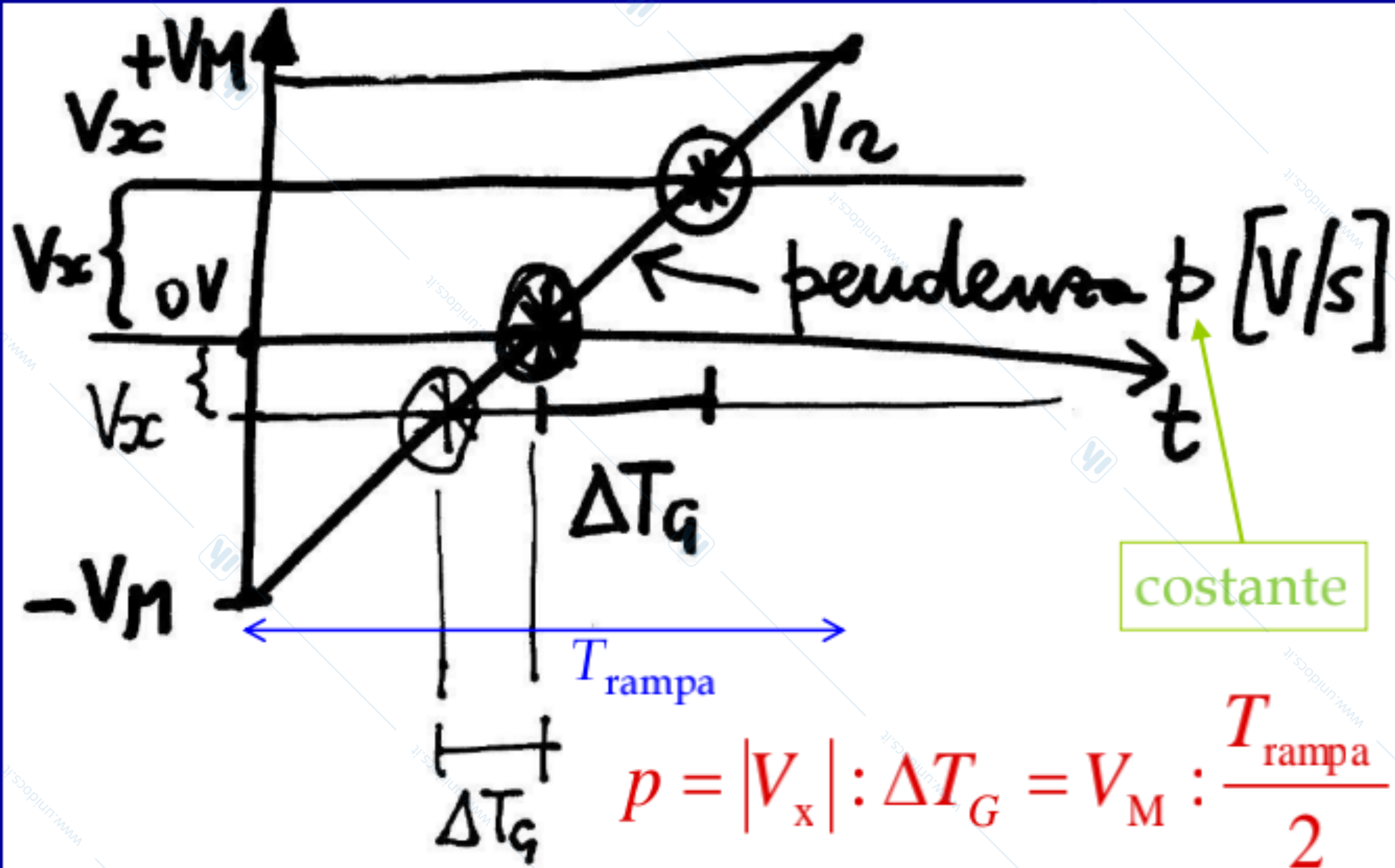


capacità $N_{c,max}$

E' una versione a stato solido (molto più veloce e affidabile) del voltmetro potenziometrico.

La risoluzione è di 4 o 5 cifre (10 000 o 100 000 conteggi)

Voltmetro a rampa analogica (2/6)



$$p = \left|V_x\right| : \Delta T_G = V_M : \frac{T_{rampa}}{2}$$

Voltmetro a rampa analogica (3/6)

Opera secondo una **conversione tensione/tempo** e la tensione V_x viene misurata contando un certo numero di periodi di *clock* T_c in un intervallo di tempo ΔT_G (che è **proporzionale** al modulo di V_x)

$$|V_x| = \frac{\Delta T_G}{T_{rampa}/2} V_M = \frac{N_c T_c}{T_{rampa}/2} V_M$$

Il segno di V_x si deduce da quale comparatore scatta prima

ACCURATEZZA: dipende dalla linearità della rampa, dalla stabilità del *clock* (f_C) e dal rumore e derive dei comparatori

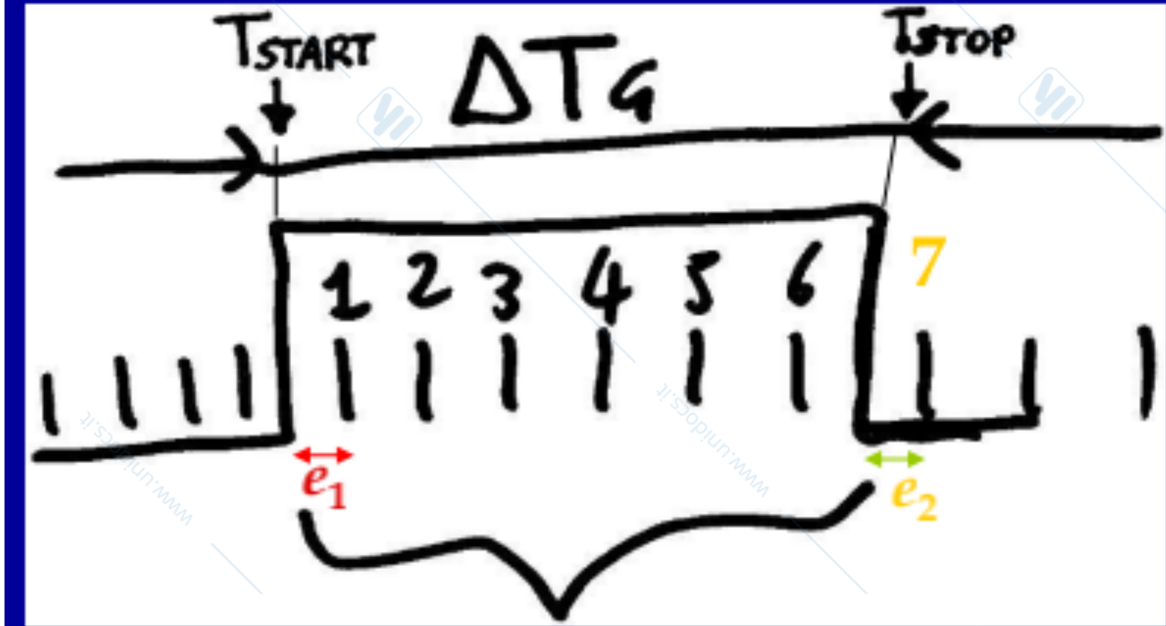
Voltmetro a rampa analogica (4/6)

Errore di quantizz. = [0,1] conteggio

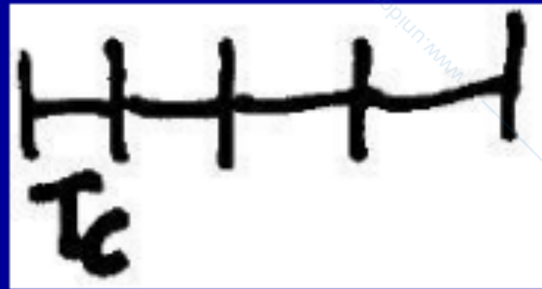
Incertezza = 1 conteggio / $\sqrt{12}$

Molte volte l'errore può essere solo positivo (approx. per eccesso), o solo negativo (approx. per difetto), risultando ad es. limitato all'intervallo $[0, T_c]$

Altre volte l'errore di quantizzazione si ha sia su T_{START} che su T_{STOP} (in pratica cresce di "1.4")



Misura per conteggio



$$\Delta T_G = N_c T_c$$

$$T_{stop} - T_{start} = \Delta T_G \propto |V_x|$$

$$\Delta T_G = N T_c + e_1 - e_2$$

$$\sigma^2(\Delta T_G) = \sigma^2(e_1) + \sigma^2(e_2)$$

$$u(\Delta T_G) = \sigma(\Delta T_G) = \sqrt{2}(T_c/\sqrt{12})$$

Voltmetro a rampa analogica (5/6)

La rampa analogica varia linearmente da $-V_M$ a $+V_M$ con periodo $T_{rampa} = \frac{1}{f_{rampa}}$

Il tempo di misura è $T_{mis}=T_{rampa}$ (≈ms)
(velocità o frequenza di lettura pari a f_{rampa} (≈kHz)

Per una lettura con risoluzione $\delta = 1/N = 1/2N_{c,max}$

tot. livelli sia pos.che neg.

capacità del contatore

dove $N_{c,max}=N/2$ è il massimo numero di conteggi del contatore (su dinamica unipolare), deve essere

$$f_c = N \times f_{rampa} = 2N_{c,max} \times f_{rampa} \Rightarrow N = \frac{f_c}{f_{rampa}}$$

come ricavabile da $NT_c=T_{rampa}$

Voltmetro a rampa analogica (6/6)

$$\delta = \frac{1}{N} = \frac{\Delta V}{D} = \frac{T_c}{T_{rampa}} = \frac{f_{rampa}}{f_c} \quad \text{RISOL.} \qquad \textbf{liv.}=N=2N_{c,max}$$

$$m = \log_{10}(N) = \log_{10}(f_c / f_{rampa}) \quad \text{CIFRE DECIMALI}$$

$$n = \log_2(N) = \log_2(f_c / f_{rampa}) \quad \text{BIT}$$

La risoluzione migliora al crescere del rapporto f_c/f_{rampa}

Conviene lavorare con f_c alta, ma per f_c elevata occorre un contatore a "molte cifre" e "veloce". Altri parametri:

$$|V_x| = p \cdot \Delta T_G \quad \text{da} \quad \Delta T_G = N_c T_c = \frac{|V_x|}{p}$$

dinamica

con p pendenza della rampa analogica: $p = \dfrac{2V_M}{T_{rampa}}$ (V/s)

tempo misura

Voltmetro - convertitore Flash (1/4)

E′ il più veloce convertitore A/D con $T_{mis} \approx 1\,T_c$ raggiunge frequenze di conversione fino a 50 GSa/s

La complessità circuitale (e il costo) cresce esponenzialmente con il numero di bit (come 2^n) e quindi si lavora a bassa risoluzione:

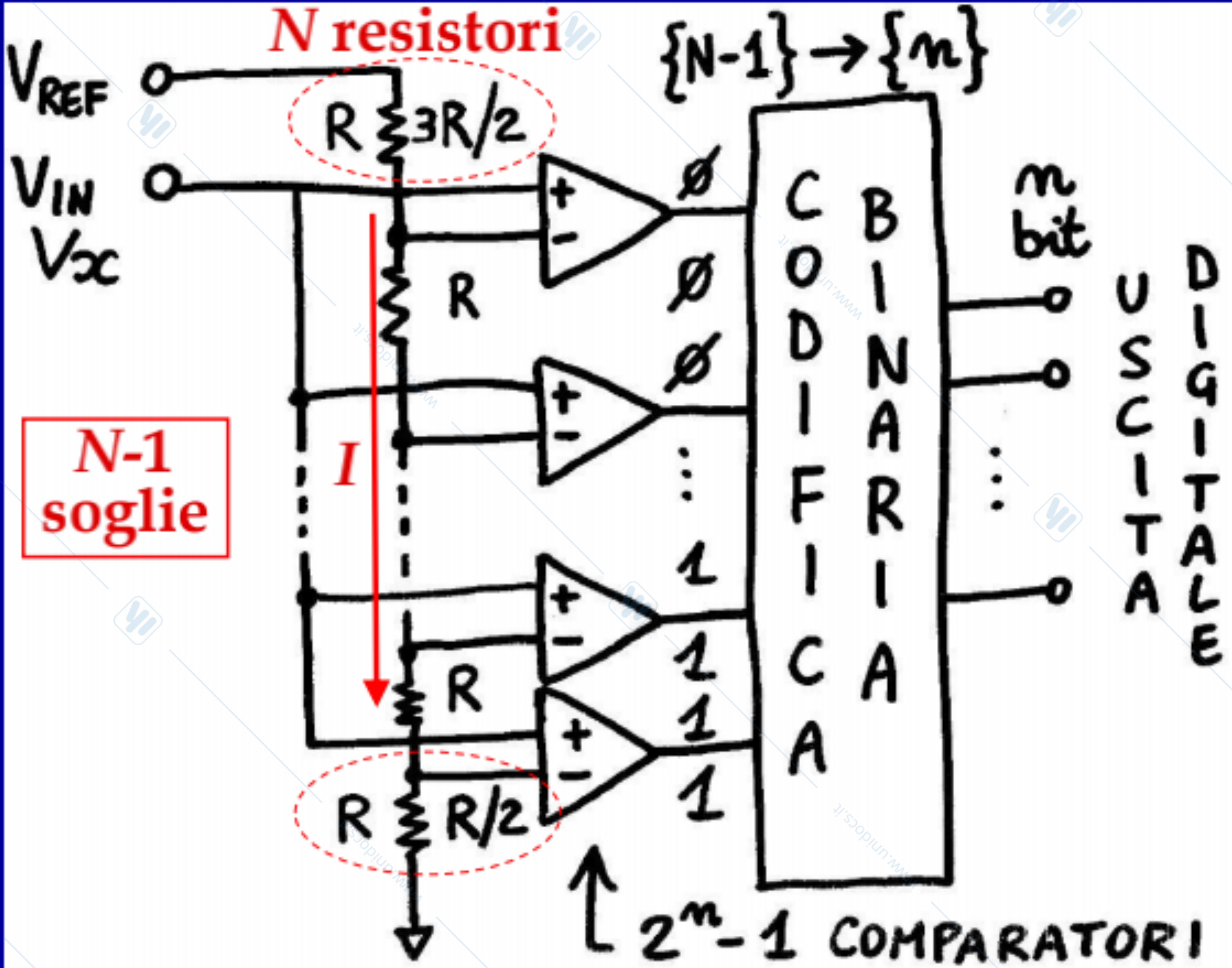
solitamente $n \sim 8$ bit

esistono versioni anche a 10 e 12 bit

A così elevate velocità di campionamento (alta banda di segnale e rumore) occorre tenere presente il numero di bit equivalenti…

⇒ non conviene salire con il numero di bit

Voltmetro - convertitore Flash (2/4)



Voltmetro - convertitore Flash (3/4)

N resistori tutti uguali **troncamento**

$$I = \frac{V_{ref}}{NR} \qquad V_i = i\underbrace{\overbrace{(RI)}^{\Delta V}} = i\underbrace{\overbrace{\frac{V_{ref}}{N}}^{\Delta V}} \qquad i = 1, \ldots N-1$$

N-1 soglie

Primo e ultimo resistore diversi **arrotondamento**

$$I = \frac{V_{ref}}{2R+(N-2)R} = \frac{V_{ref}}{NR}$$ come nel caso precedente

$$V_i = \left[\frac{R}{2} + (i-1)R\right] I = \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{V_{ref}}{N}$$

N - 1 soglie "centrate"

Con la rete di resistori 3/2 R e R/2 la soglia del 1° livello viene dimezzata in ampiezza il che è utile per **non avere *offset*** nella caratteristica di conversione e per **convertire segnali bipolari**

1° ed N° livello sono disuniformi dagli altri

Voltmetro - convertitore Flash (4/4)

E′ il convertitore **A/D utilizzato negli oscilloscopi digitali** dove la risoluzione modesta non è un fattore limitante mentre la **velocità è importante**

La dinamica di misura viene suddivisa in **$N = 2^n$ livelli equispaziati ($\Delta V = V_{max} / 2^n$)** utilizzando **$N-1 = 2^n-1$ soglie (e comparatori)**

Tipicamente si lavora con **N=256 livelli (n=8 bit)** e dunque la risoluzione relativa è $\delta=1/256\cong4{\cdot}10^{-3}$ (la ris. ass. dipende dalla dinamica adottata)

È usato per misure su **segnali molto veloci** (TLC, Fisica, ...) ma con accuratezza limitata

https://www.fujitsu.com/cn/en/Images/56G_ADC_FactSheet-en.pdf 56GSa/s 8-bit Analog-to-Digital Converter

Esercizio (convertitore Flash)

Oscilloscopio digitale a larga banda

Dinamica $D = \pm 10\ \text{V}$ $\quad n = 8$ bit $\quad f_{\text{sample}} = 1\ \text{GSa/s}$

$\Delta V = ?$ $\qquad \Delta V = \dfrac{D}{2^n} = \dfrac{20\ \text{V}}{256} \cong 80\ \text{mV}$

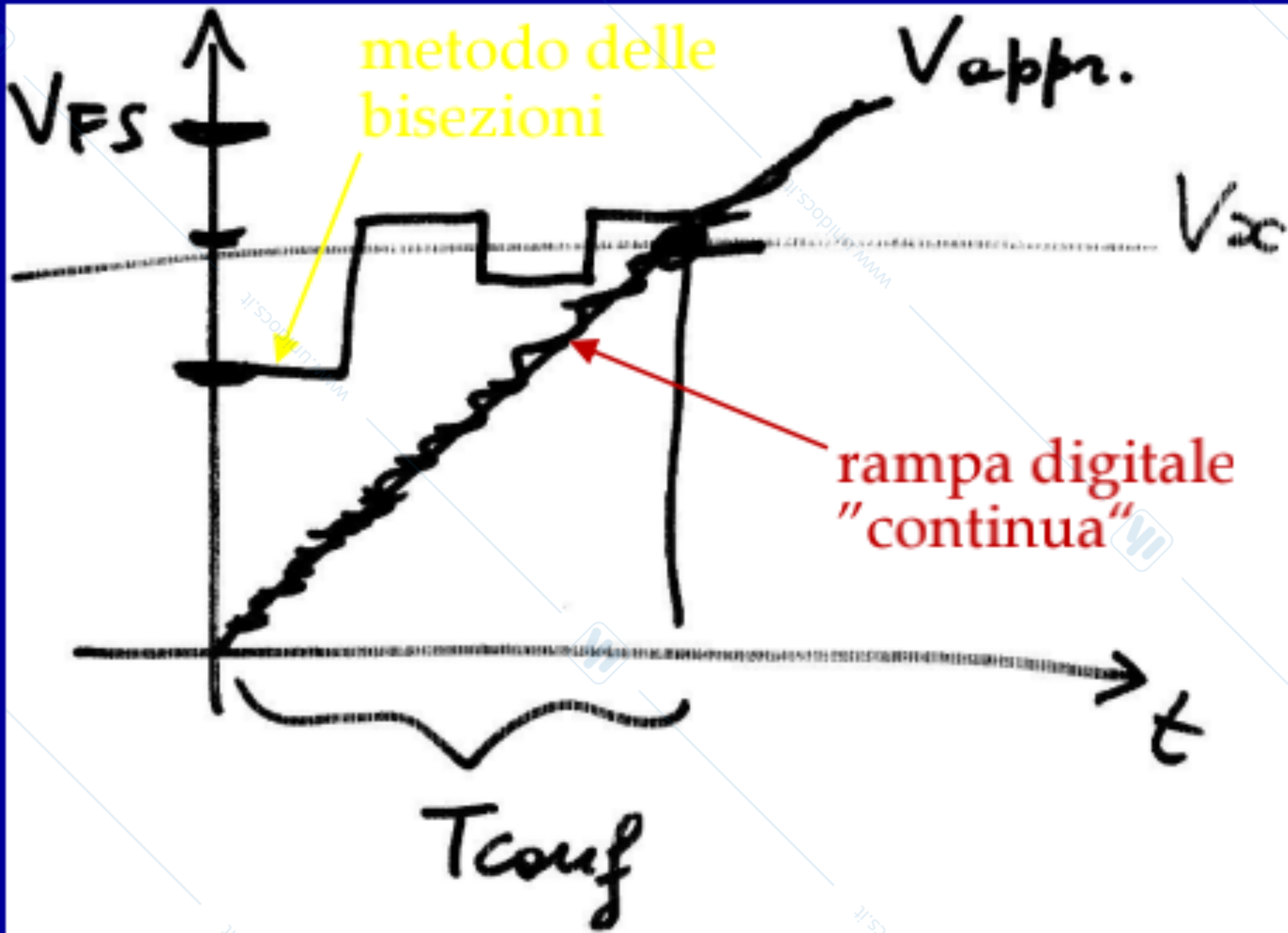
$u(V) = ?$ $\qquad u(V) = u_{\text{q}}(V) = \dfrac{\Delta V}{\sqrt{12}} \cong 23\ \text{mV}$

$f_{x,\max} = ?$ $\qquad f_{\text{x, max}} = f_{\text{sample}} / 2 = 500\ \text{MHz}$

Oltre alla quantizzazione ci sarà anche un rumore elettronico… (v. bit equivalenti) e $u_{\text{tot}}(V)$ sarà maggiore della sola $u_{\text{q}}(V)$

http://www.intersil.com/content/intersil/en/tools/software-drivers/noise-estimating-calculators.html

Voltmetro ad approssimazioni successive (1/6)



Con soli ***n* confronti** si ottiene una **risoluzione $\delta = 1/N = 1/2^n$**

Voltmetro ad approssimazioni successive (2/6)

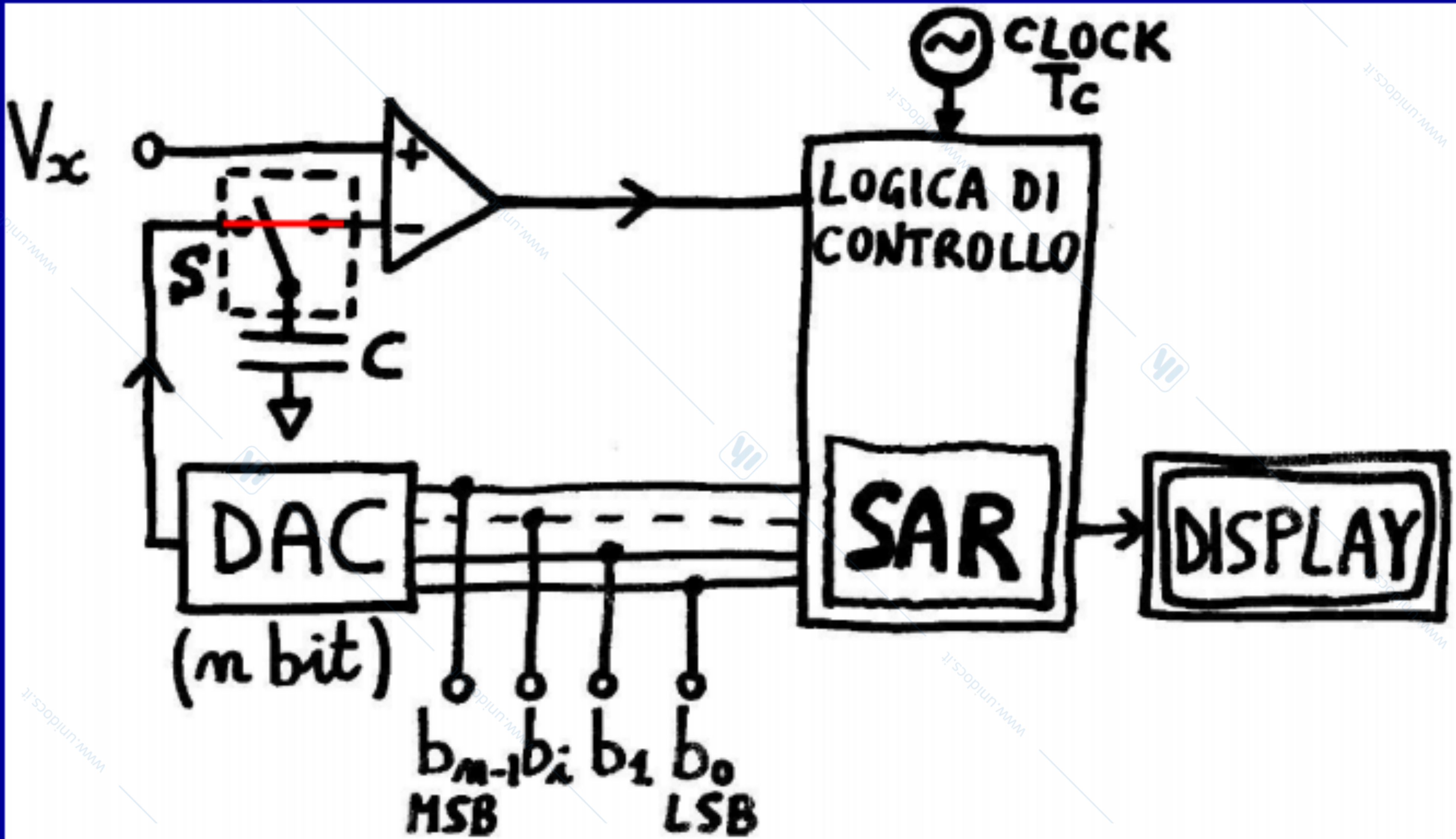
- Convertitore D/A a *n* bit ("potenziometro")
  Comparatore e Logica digitale di controllo
  Clock (temporizzazione del sistema)

- Con un **metodo di BISEZIONE** si "provano" tutti i bit (valore =1) a partire dal più significativo (MSB) fino al bit meno significativo (LSB)
  Ad ogni confronto con V_x si decide se mantenere il bit a "1" o riportarlo a "0"

Uscita DAC: $V_{D/A} = \frac{V_{FS}}{2^n}\left[b_{n-1}2^{n-1} + \ldots + b_1 2 + b_0\right]$

Voltmetro ad approssimazioni successive (3/6)

Approccio digitale al metodo potenziometrico



Voltmetro ad approssimazioni successive (4/6)

- La cifra meno significativa ha un PESO

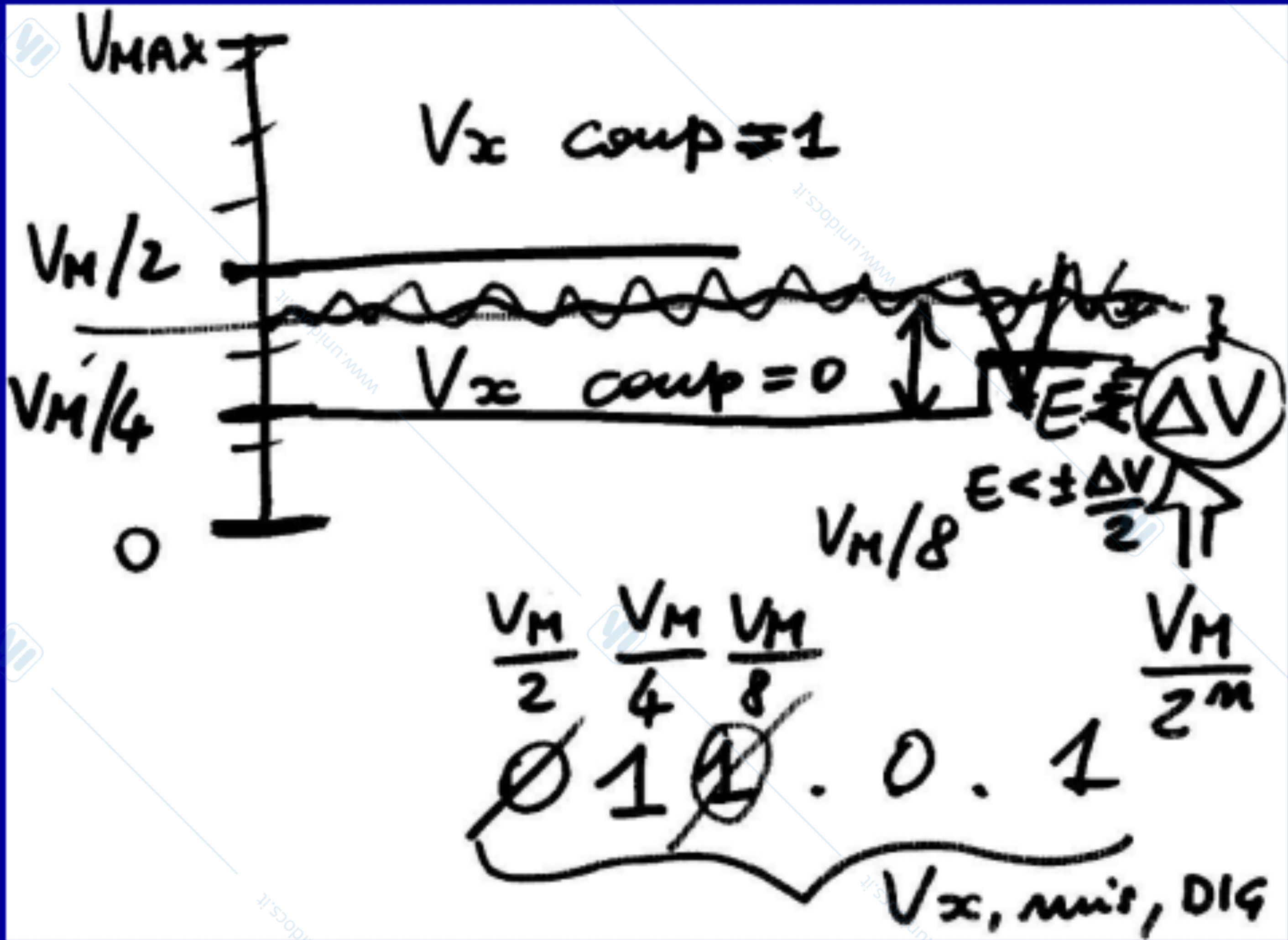
  $\Delta V = V_{FS} / 2^n \qquad (N = 2^n)$

  La più significativa vale $V_{FS} / 2$

- Si eseguono **"solo" $n = \log_2 N$ confronti** ciascuno di durata mT_c con m compreso tra 2 e 5

- Il tempo di misura è fissato indipendentemente da V_x e vale $T_{mis} = n\,T_{confr.} = n\,(mT_c)$

Voltmetro ad approssimazioni successive (5/6)



Il rumore differenziale può portare "istantaneamente" a errate decisioni sul singolo confronto e dunque a un errore di misura

Voltmetro ad approssimazioni successive (6/6)

- **Risoluzione effettiva** (da 3 a 5 cifre "effettive") dipende dal rumore presente agli stadi di ingresso del comparatore (non è sempre $V_{FS} / 2^n$...)
- **Accuratezza**: dipende dal riferimento interno, dalla qualità del DAC e dal rumore del comparatore
- STATO DELL'ARTE (ADC veloci ad appr. succ.):

	N=4 096	N=65 536	N=262 144
n [bit]	12	16	18 (5½ cifre)
T_{mis} [ns]	50	100	500
f_{mis} [MSa/s]	20	10 (AD7626)	2 (AD7641)

Prestazioni DVM ad approx. succ.

Questi voltmetri possono essere anche piuttosto veloci mantenendo un'ottima risoluzione (*e.g.* nelle DAQ di LabGolgi, $T_{mis} = 5\ \mu s$, ovvero $f_{sample} = 200$ kSa/s con $n = 12\text{-}16$ bit)

Filtro passa-basso in ingresso per limitare le "errate decisioni" dovute al rumore elettronico presente in ingresso → si riduce anche la velocità di conversione

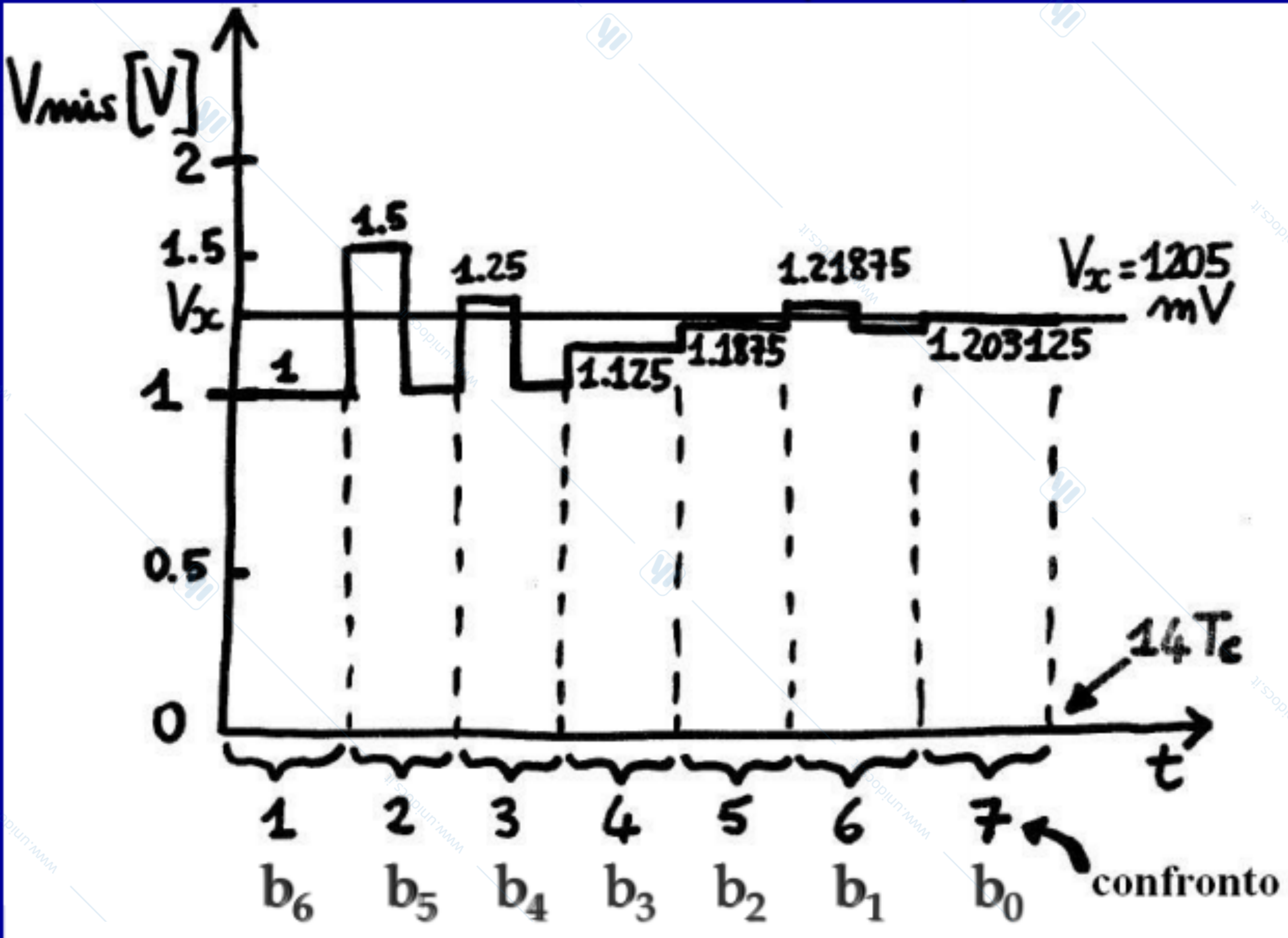
Esercizio sul voltmetro ad approssimazioni successive

Dinamica 0 - 2 V $n = 7$ bit

$f_c = 1$ MHz $T_{confronto} = 2\,T_c$

Ricavare il tempo di misura T_{mis}, il valore misurato V_{mis} e il suo errore percentuale rispetto a una tensione sotto misura di valore $V_x = 1205$ mV

Soluzione (1/2)



Soluzione (2/2)

$T_c = 1/f_c = 1\ \mu s$

$T_{confr} = 2T_c = 2\ \mu s$

$T_{mis} = nT_{confr} = 14\ \mu s\ (\approx 70\ kSa/s)$

$V_{mis} = 1203.125\ mV$ quando $V_x = 1205\ mV$

$$ERR\% = \frac{|V_x - V_{mis}|}{V_x} = 0.1556\ \%$$

$\Delta V = D/2^n = (2\ V)/(128) = 15.625\ mV$

$N_{mis} = V_x/\Delta V \cong 77.12 \Rightarrow Int\{N_{mis}\} = 77$

$\boxed{V_{mis} = Int\{N_{mis}\} \cdot \Delta V = 1.203125\ V}$

Con soli 7 bit si ha una risoluzione

$$\Delta V = \frac{V_{max}}{2^n} = \frac{2\ V}{128} \cong 15.6\ mV$$

Naturalmente $|V_x - V_{mis}| < \Delta V$ (1.875 mV<15.6 mV)

Voltmetri a integrazione

Il valore di misura dipende dal segnale (tensione) in ingresso secondo una **relazione integrale**:

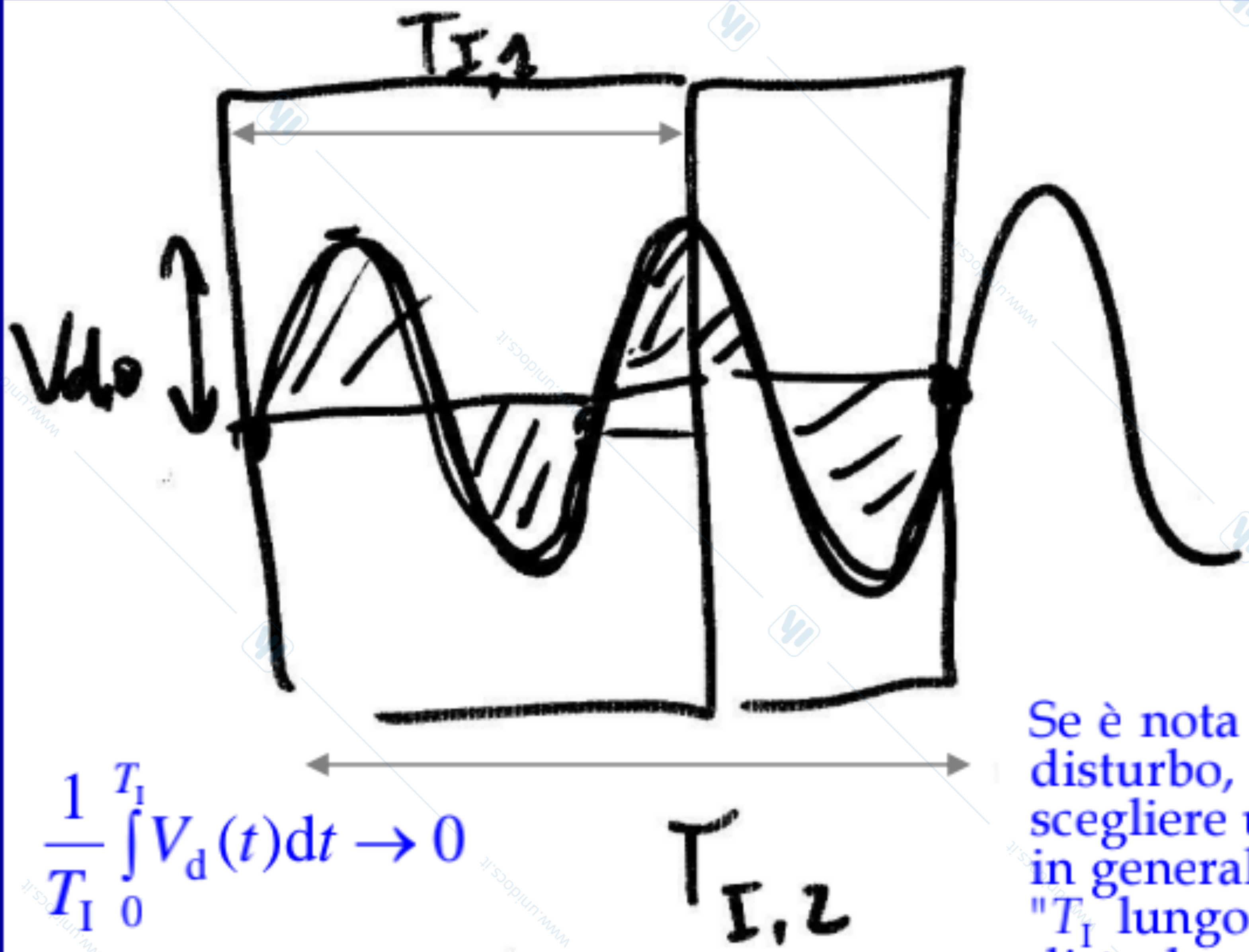
$$V_{\mathrm{m}} \propto \frac{1}{T_{\mathrm{I}}} \int_0^{T_{\mathrm{I}}} V(t)\,\mathrm{d}t$$

Calcoliamo la reiezione al disturbo in uno strumento a integrazione:

$V(t) = V_{\mathrm{x}} + V_{\mathrm{d}}(t)$ segnale + disturbo

$$V_{\mathrm{m}}(T_{\mathrm{I}}) = \frac{1}{T_{\mathrm{I}}} \int_0^{T_{\mathrm{I}}} [V_{\mathrm{x}} + V_{\mathrm{d}}(t)]\,\mathrm{d}t = V_{\mathrm{x}} + \cancel{\frac{1}{T_{\mathrm{I}}} \int_0^{T_{\mathrm{I}}} V_{\mathrm{d}}(t)\,\mathrm{d}t}$$

Esempio di reiezione al disturbo

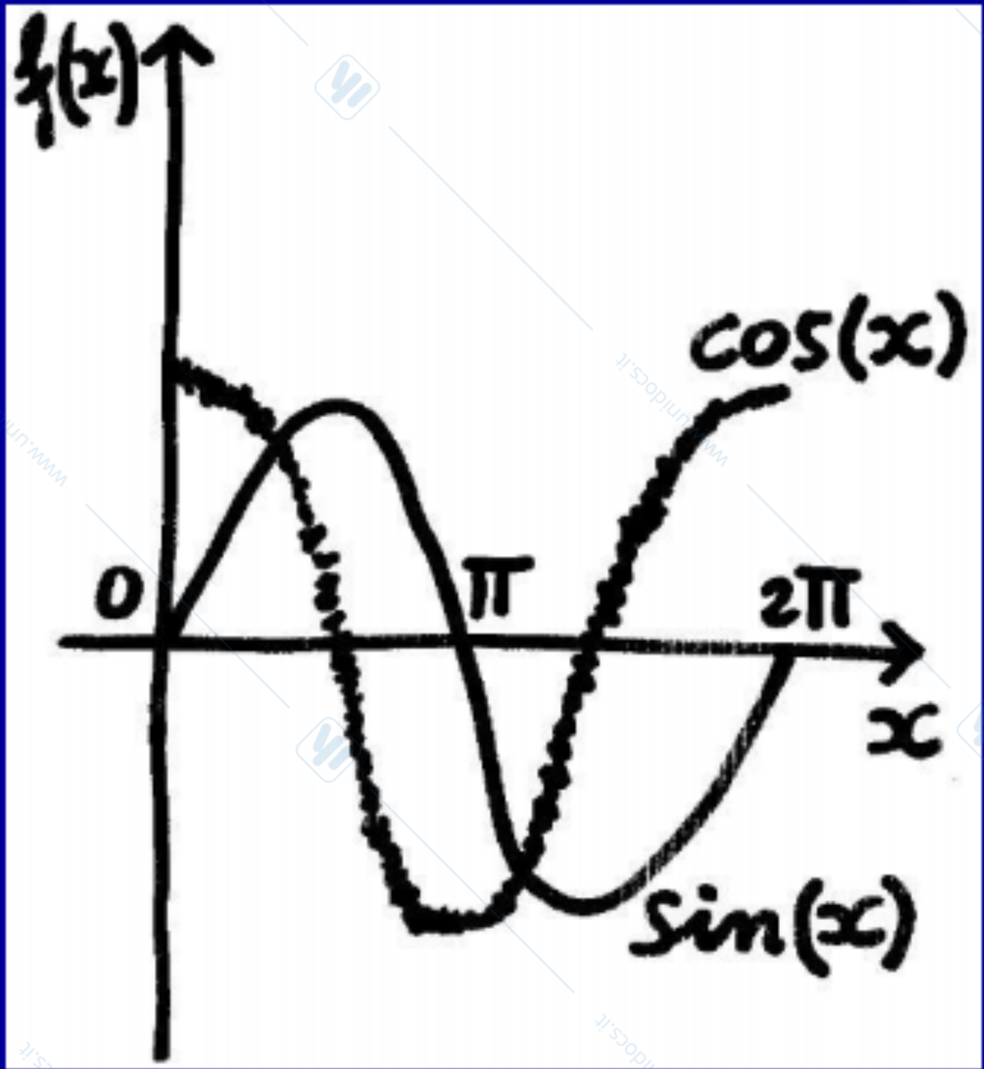


$$\frac{1}{T_I}\int_0^{T_I} V_d(t)\,dt \to 0$$

per $T_I \to \infty$ o $T_I >> T_d$

Se è nota la frequenza del disturbo, può essere utile scegliere un T_I opportuno; in generale comunque per "T_I lungo" la reiezione al disturbo migliora

[richiami] Funzioni trigonometriche



$$\cos(x)=\sin(x+\pi/2)$$
$$\sin(x)=\cos(x-\pi/2)$$

$$\frac{d}{dx}\{\sin(x)\}=\cos(x)$$
$$\frac{d}{dx}\{\cos(x)\}=-\sin(x)$$

$$\int\sin(x)dx=-\cos(x)$$
$$\int\cos(x)dx=\sin(x)$$

[richiami] Formula di Eulero

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{aligned}\right\} \rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

[richiami] Somme di seni e coseni

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

da cui

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

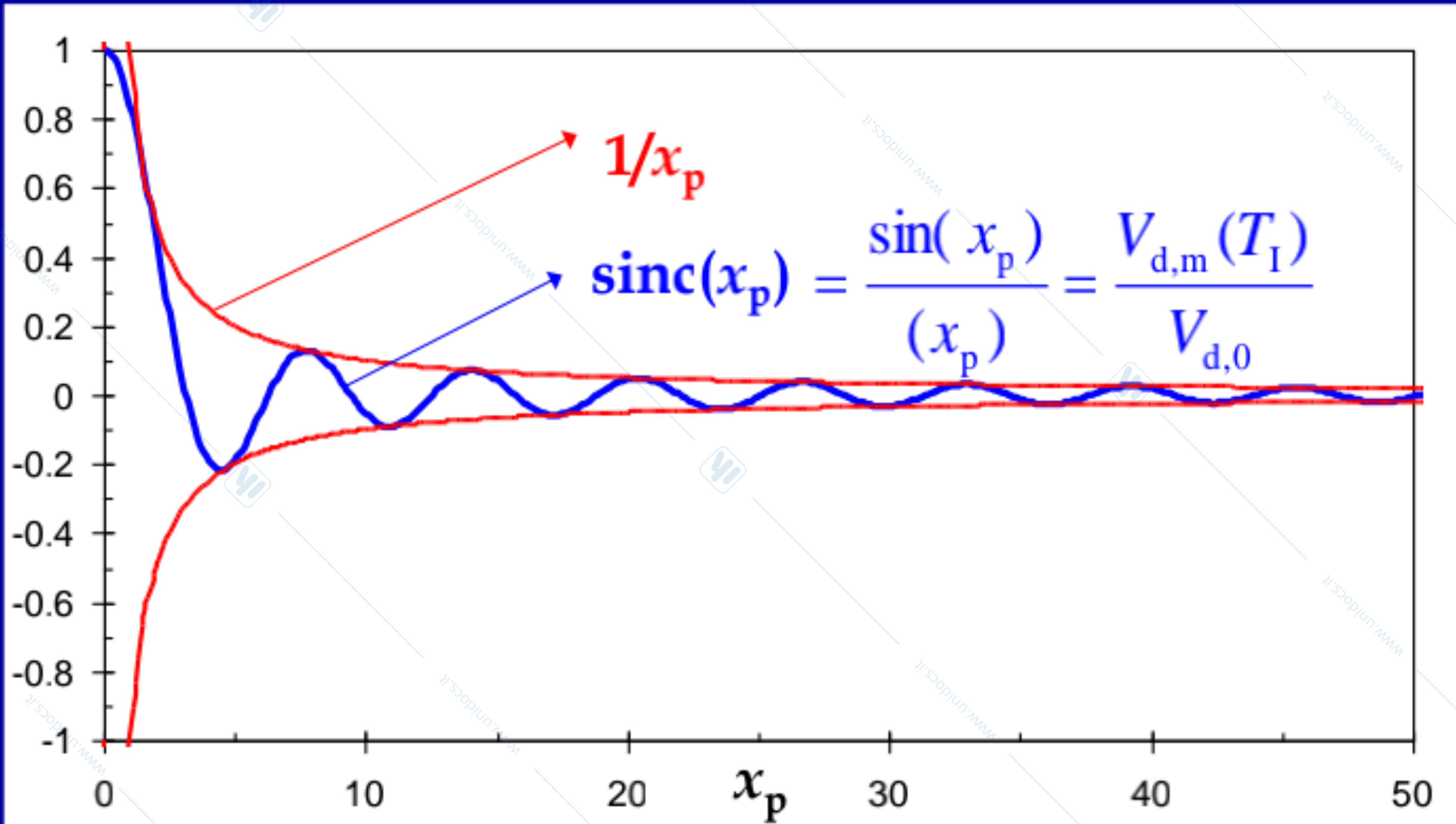
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

somma e differenza ← prodotto

Integrazione (andamento sinc x_p)



Integrazione (caso generale) (1/2)

Disturbo "sinusoidale qualsiasi" (con fase φ arbitraria) su un intervallo di integrazione sempre T_I ma centrato su "t_0 qualsiasi"

$$V_d(t) = V_{d,0}\sin(2\pi f t + \varphi)$$

Per brevità indicheremo $T=T_I$ e $f=f_d$ ma non necessariamente è $T=1/f$

$$V_{d,m} = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} V_d(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} V_{d,0}\sin(2\pi f t + \varphi)\,dt =$$

$$= \frac{V_{d,0}}{T}\left[\frac{-\cos(2\pi f t + \varphi)}{2\pi f}\right]_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}$$

$$V_{d,m} = \frac{V_{d,0}}{2\pi f T}\left\{\cos\left[2\pi f\left(t_0 - \frac{T}{2}\right) + \varphi\right] - \cos\left[2\pi f\left(t_0 + \frac{T}{2}\right) + \varphi\right]\right\}$$

Integrazione (caso generale) (2/2)

$$V_{d,m} = \frac{V_{d,0}}{2\pi f T}\left\{\cos\left[2\pi f\left(t_0 - \frac{T}{2}\right)+\varphi\right]-\cos\left[2\pi f\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)+\varphi\right]\right\} =$$

$$= \frac{V_{d,0}}{\cancel{2}\pi f T}\cancel{2}\sin(2\pi f t_0+\varphi)\sin(\cancel{2}\pi f T/\cancel{2})$$

essendo

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = = 2\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$= V_{d,0}\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\sin(2\pi f t_0+\varphi)$$

massimizzabile con +1 (*worst case*)

$$V_{d,m}(T) = V_{d,0}\frac{\sin(x)}{x}F(t_0,\varphi)$$

il particolare valore di reiezione dipende anche da t_0 e φ

dove $\underline{x=\pi f T}$ e $F(t_0,\varphi)=\sin(2\pi f t_0+\varphi)$ con $-1 \le F(t_0,\varphi) \le +1$

Integrazione (disturbo min e max)

$$V_{d,m}(T) = V_{d,0}\frac{\sin(x)}{x}F(t_0,\varphi) \qquad x = \pi f T$$

$F(t_0,\varphi)=\sin(2\pi f t_0+\varphi)$

Mentre $\sin(x)/x$ dipende dal prodotto (fT), variare t_0 e φ vuole dire scegliere una diversa fase per l'onda sinusoidale di disturbo e dunque un particolare valore $\in[-1,+1]$ per la funzione $F(t_0,\varphi)$

Scegliendo una fase opportuna per il disturbo (o meglio per la finestra di integrazione) si può sempre ottenere $F(t_0,\varphi)=\sin(2\pi f t_0+\varphi)=0$ e dunque il valore **"minimo"** per il disturbo integrato che è $V_{d,m,min}=0$. Invece, senza alcun controllo sulla fase/finestra, nel **caso peggiore**, ossia per $F(t_0,\varphi)=\sin(2\pi f t0+\varphi)=\pm1$, il **disturbo residuo "massimo"** è

$$\left|V_{d,m,\max}\right| = \frac{\left|\sin(x)\right|}{x}V_{d,0} \le \frac{1}{\pi f T}V_{d,0}$$

Attenuazione $A \ge \pi f T$ sul disturbo $V_{d,0}$: $A >> 1$ se $T >> 1/f$ o $f >> 1/T$

Integrazione (disturbo efficace)

$$V_{d,m}(T) = V_{d,0}\frac{\sin(x)}{x}F(t_0,\varphi) \qquad x = \pi f T \qquad F(t_0,\varphi)=\sin(2\pi f t_0+\varphi)$$

Mentre $\sin(x)/x$ dipende dal prodotto (fT), **i parametri t_0 e φ possono essere considerati come variabili casuali**

Per φ variabile casuale con $\varphi \in [-\pi, \pi]$

$\mu_F = \langle F \rangle = 0 \qquad \sigma_F^2 = \langle F^2 \rangle = 1/2 \rightarrow u(F) = \sqrt{\langle F^2 \rangle} = 1/\sqrt{2}$

Anche per "t_0 casuale" si ricava $u(F)=1/\sqrt{2}$

Lavorando a f e T fissati, e facendo variare arbitrariamente φ e/o t_0, si ottiene per il **disturbo integrato un "valore efficace"**

$$\boxed{V_{d,m,\mathrm{eff}} = \sqrt{\left\langle V_{d,m}^2(T)\right\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|\sin(x)|}{x}V_{d,0}} \cong 0.7 \times V_{d,m,\max}$$

Integrazione (trasmissione e reiezione)

La **trasmissione (t)** e la **reiezione (r)** del disturbo, in ampiezza, saranno:

$$t = \left|\frac{V_{d,m}}{V_{d,0}}\right| = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \qquad \frac{V_{OUT}}{V_{IN}}$$

$$r = \left|\frac{V_{d,0}}{V_{d,m}}\right| = \left|\frac{x}{\sin(x)}\right| \qquad \frac{V_{IN}}{V_{OUT}}$$

$$\boxed{x = \pi f T = \pi f_d T_I}$$

La reiezione cresce (tendenzialmente) al crescere di x e dunque di f_d e T_I e inoltre $r \rightarrow \infty$ se $f_d \cdot T_I = m$

Integrazione (reiezione in potenza)

La **trasmissione in potenza** del disturbo è:

$$T = t^2 = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

La **reiezione in potenza** al disturbo sarà data da:

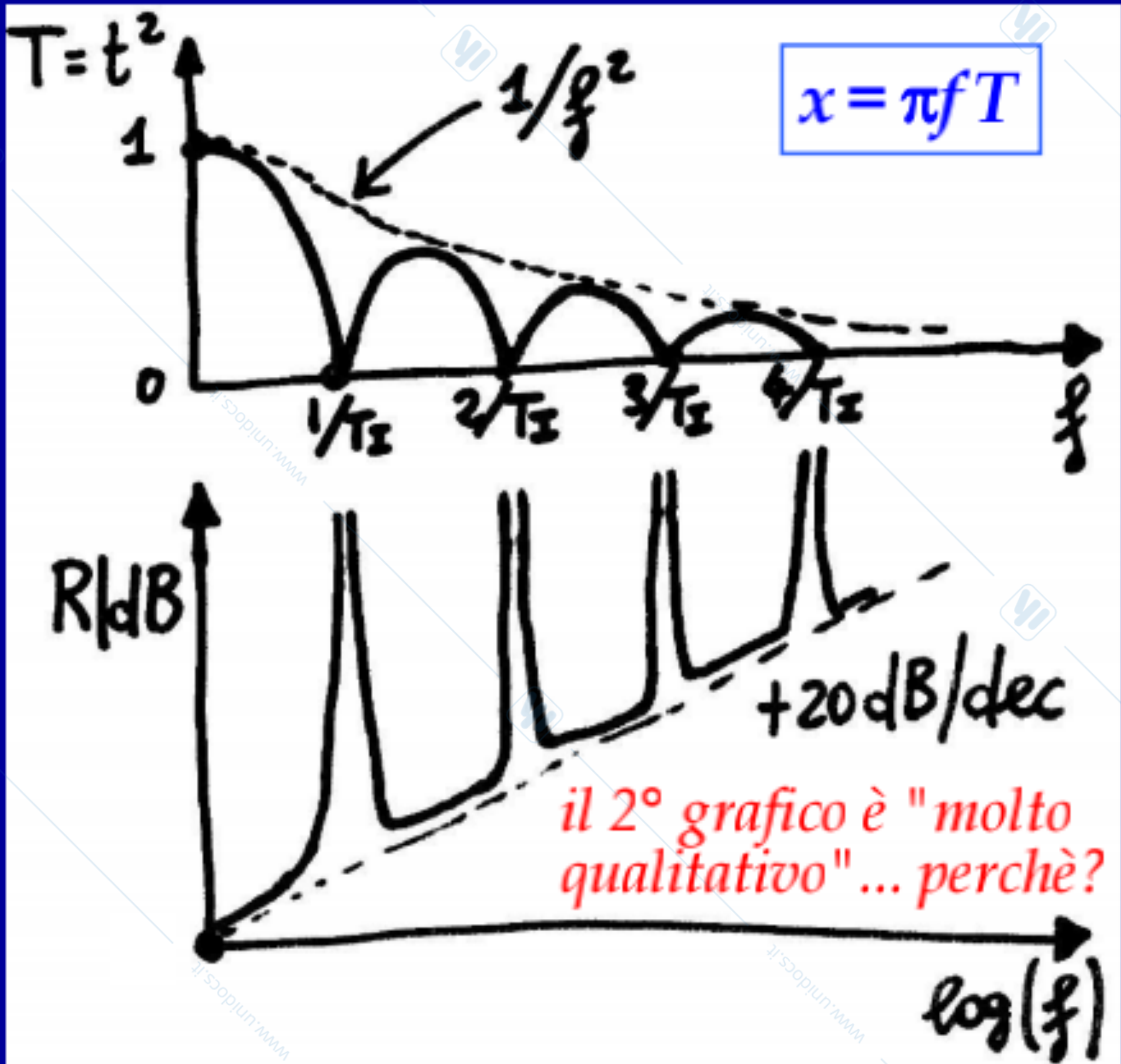
$$R = r^2 = \frac{x^2}{\sin^2(x)}$$

che in scala logaritmica diventa:

$$R_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10} R = 20\log_{10}\left|\frac{x}{\sin(x)}\right|$$

Andamenti di trasmissione e reiezione

attenzione alle **scale lin** e **log** e alle differenze



Ovviamente, per $f=f_d$ fissata, i diagrammi restano validi in funzione di $T=T_I$ variabile, "secondo i calcoli svolti"

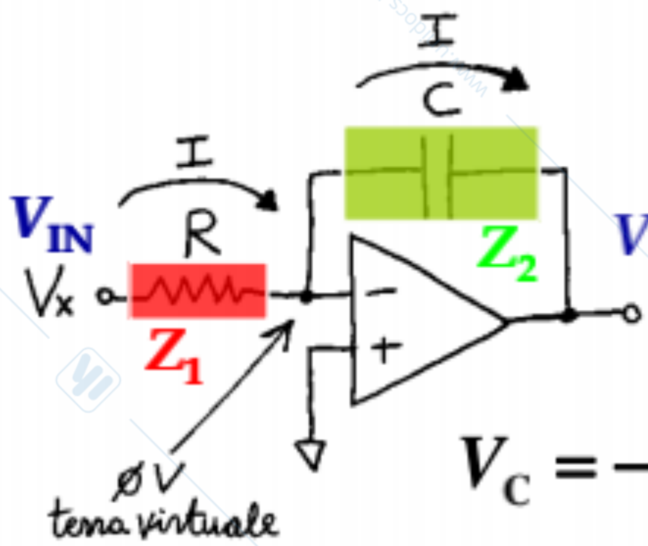
Circuito integratore

L'impedenza complessa Z per un generico carico è

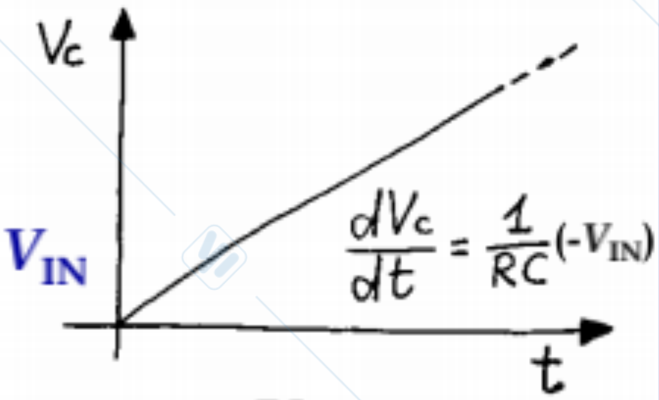
$Z_R = R$ per un resistore

$Z_C = 1/j\omega C$ per un condensatore

$Z_L = j\omega L$ per un induttore



$$V_{OUT} = -Z_2 I = -\frac{Z_2}{Z_1} V_{IN}$$

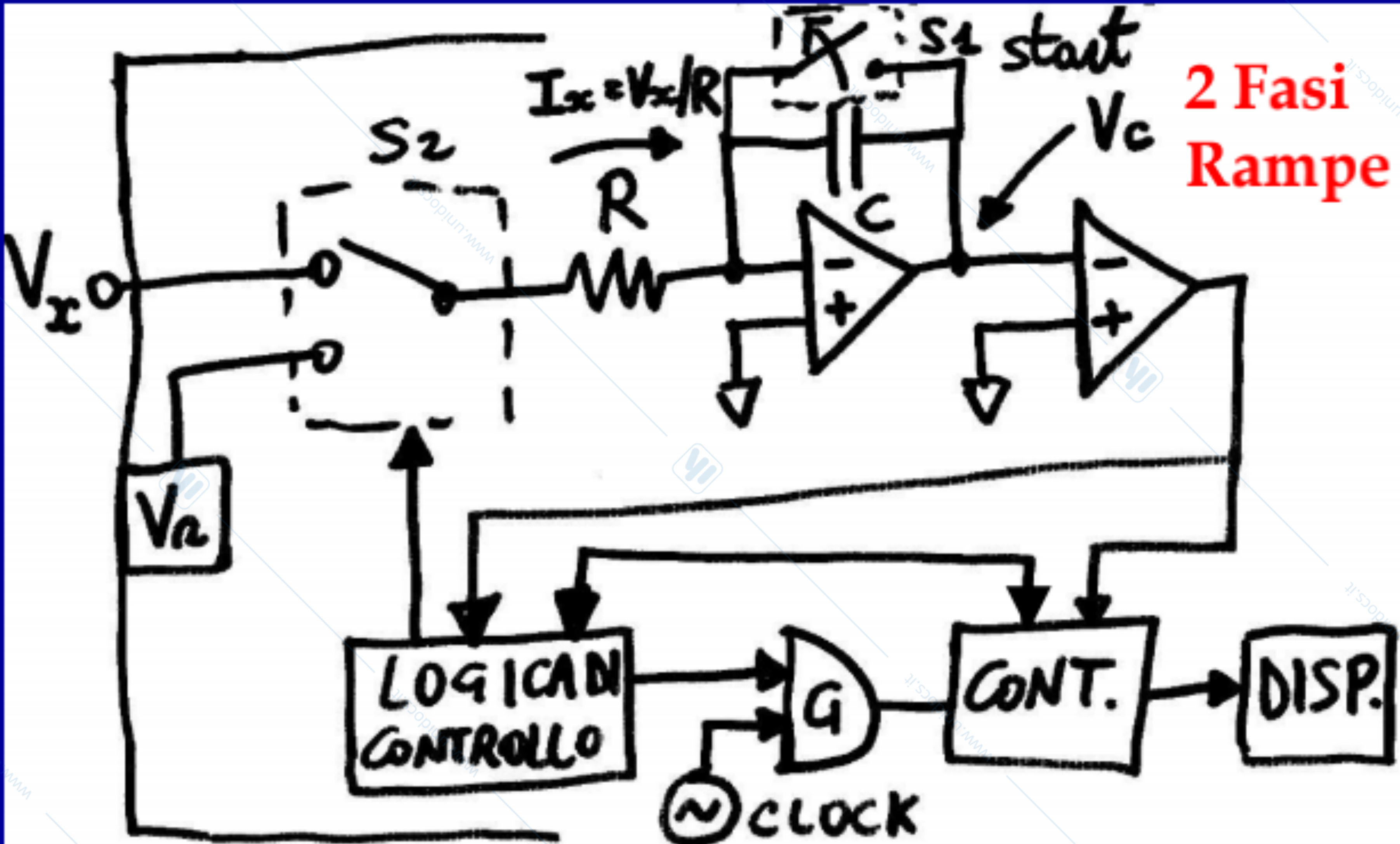


$$V_C = -Z_C I = -\frac{1}{j\omega RC} V_x = -\int \frac{V_x}{RC} dt$$

$I = V_x/R$ corrente costante (fissata V_x) e dunque il condensatore si carica a corrente costante, con una **tensione V_C che cresce linearmente nel tempo**

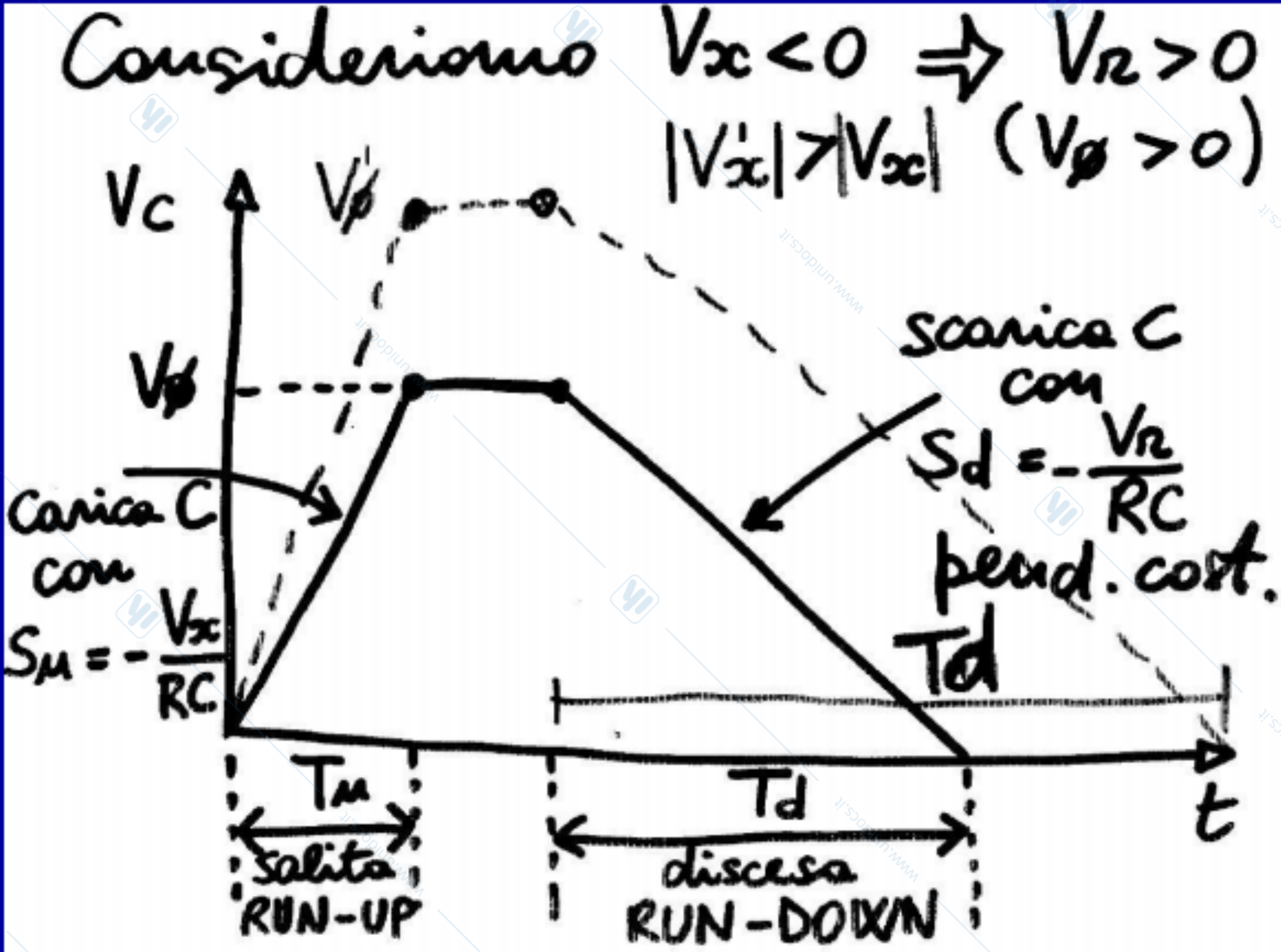
Voltmetro a doppia rampa (1/5)

Conversione tensione-tempo e misura di ΔT_G
(come nel voltmetro a rampa analogica)



2 Fasi
Rampe

Voltmetro a doppia rampa (2/5)



Voltmetro a doppia rampa (3/5)

$T_u = N_u T_c =$ cost. è fissato

$T_{mis} = T_u + T_d$
è variabile con T_d (che peraltro varia prop. a V_x) dipende da V_x come nel rampa anlogica (cost. in flash e approx. succ)

$$V_0 = V_C(t = T_u) = -\frac{V_x T_u}{RC} = \frac{V_r T_d}{RC}$$

$$V_x = -V_r \frac{T_d}{T_u} = \left(-\frac{V_r}{T_u}\right) T_d \qquad S_{T\to V} = \frac{\Delta V_x}{\Delta T_u} = \left(-\frac{V_r}{T_u}\right)$$

costante strumentale

$$V_x = -V_r \frac{N_d T_c}{N_u T_c} = \left(-\frac{V_r}{N_u}\right) N_d$$

var. cost. var.

sensibilità

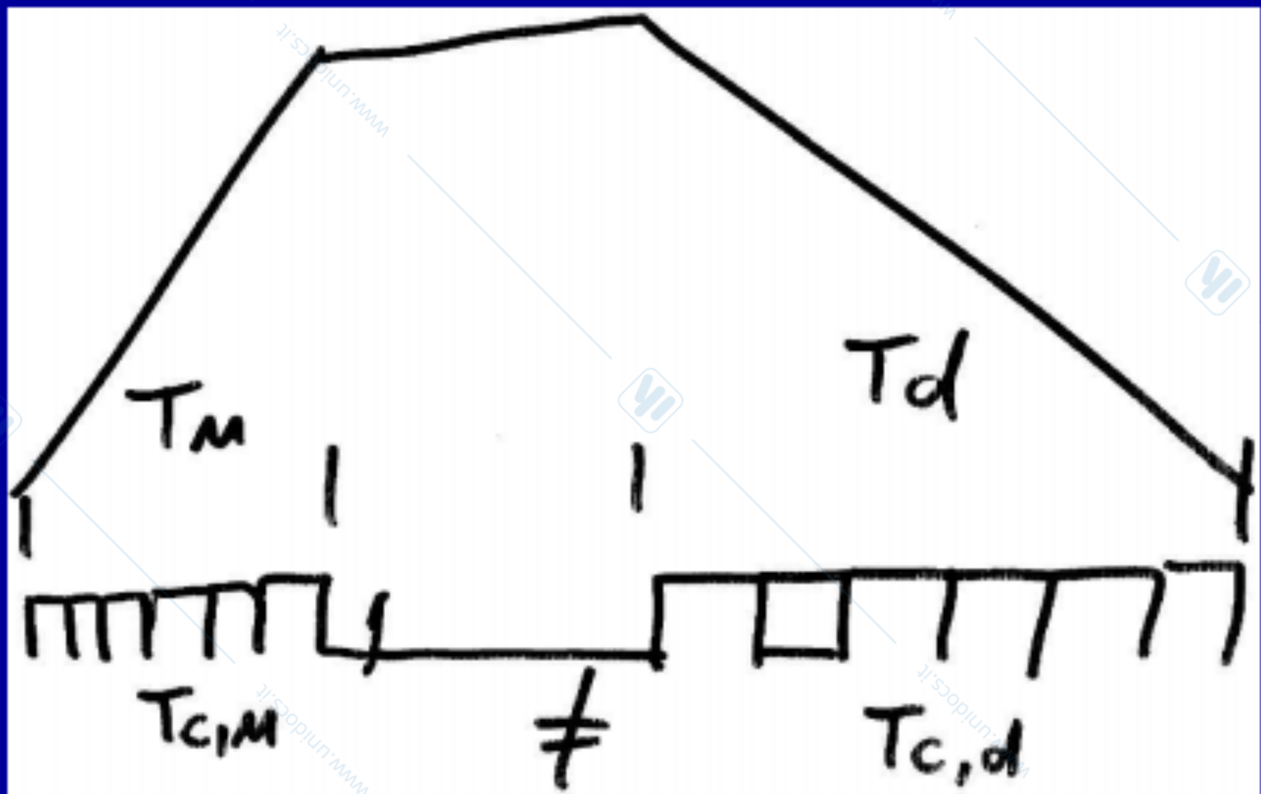
$$V_x = S_{N\to V} N_d$$

misuro V_x con il numero di conteggi N_d

Voltmetro a doppia rampa (4/5)

Misura teoricamente insensibile a valori, e incertezze, di R e C e agli altri parametri strumentali (f_c e T_c) che pesano allo stesso modo su rampa di salita e di discesa

Naturalmente l'INC di V_r si trasferisce 1:1 sull'INC di V_x



Pb. Instabilità di frequenza del *clock* in T_{mis} (con $T_{mis} \approx 1$ s)

Voltmetro a doppia rampa (5/5)

Come nel caso del voltmetro a rampa analogica, essendo la **misura effettuata per conteggio**, ci sarà sempre un errore e un'**incertezza di quantizzazione**

Incertezza = 1 conteggio / $\sqrt{12}$ $(\sigma_{\text{PDF-unif.}})$

L'INC di quantizzazione si può vedere sulla **misura di T_d, con risoluzione $\Delta T_d = T_c$**, o anche sulla **misura di N_d, con risoluzione $\Delta N_d = 1$**

entrambi sono "troncati"

$$u_q(V_x) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} = \left(-\frac{V_r}{T_u}\right)\cdot\frac{T_c}{\sqrt{12}} = \left(-\frac{V_r}{N_u}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}$$

$S_{N\to V} = \Delta V_x / \Delta N_d$ e $S_{N\to V} = V_{x,\max} / N_{d,\max} = \Delta V$

$S_{N\to V} = \Delta V_{x,\min} / \Delta N_{d,\min} = \Delta V / 1$

Dunque sensibilità (e risol. e INC_q) dipendono da: "portata del voltmetro" ($V_{x,\max}$) e "capacità del conteggio" ($N_{d,\max}$)

Considerazione (sull'incertezza limite)

Come visto l'INC di V_r si trasferisce 1:1 sull'INC di V_x

Da $V_x = -V_r\, N_d / N_u$, essendo $u_r(N_u)=0$ si ha semplicemente

$$u_r^2(V_x) = u_r^2(V_r) + u_r^2(N_d)$$

$$u_r(N_d) = \frac{1/\sqrt{12}}{N_d} \cong \frac{0.3}{N_d} \propto N_d^{-1}$$

Per $N_d >> 1/u_r(V_r)$ si ha $u_r(N_d) << u_r(V_r)$ e $u_r(V_x) \cong u_r(V_r)$

LIMITE ULTIMO DI INC. DELLA MISURA

Poiché il valore limite per $u_r(V_r)$ è $\approx 2\times10^{-7}$ se ne deduce che il migliore DVM può avere ~6½ cifre (significative): $N_{max} \approx 5\times10^6$ ($n = \log_2 N_{max} \approx 22$ bit … equivalenti!)

Voltmetro a doppia rampa (esercizio)

Misura di tensione a 16 bit in presenza di disturbo a f_{dis} = 50 Hz

T_I = 100 ms con **QUARZO** a frequenza f_c **= 1 MHz**

[[velocità di lettura f_{mis} = ? ; cifre decimali $M_{contatore}$ = ?]]

$$T_{I,min} = \frac{1}{f_{dis}} = 20 \text{ ms} \le T_{mis} \text{ o in genere } T_I = m T_{dis} = m \frac{1}{f_{dis}}$$

qui $T_I = 5T_{dis} = 100$ ms $\Rightarrow N_u = T_I / T_c = T_I f_c = 10^5$ (5 cifre di conteggio)

n=16 bit $\Rightarrow N=N_{d,max}=2^{16}$=65 536 livelli (4½ cifre) *[misura unipolare]*

con misura bipolare: 1 bit di segno (+/-) e 15 bit su dinamica pos./neg. $N_{d,max}=2^{15}$=*32768 liv.*

$\Rightarrow T_{d,max} = N_{d,max} T_c$ = 65 536 µs ≅ 65 ms (($\Rightarrow N_{contatore} \neq N_{ADC}$))

$\Rightarrow T_{mis,max} = T_I + T_{d,max} \cong$ 165 ms e quindi $f_{mis} = 1/T_{mis,max} \cong$ **6 Hz**

$M_{contatore} = \log_{10}(\max\{N_u, N_{d,max}\}) = \log_{10}(N_u)$ **= 5 cifre**

Se V_x=1 V e D=20 V $\Rightarrow \Delta V$=? e $u_r(V)$=?

e se D=±20 V ???

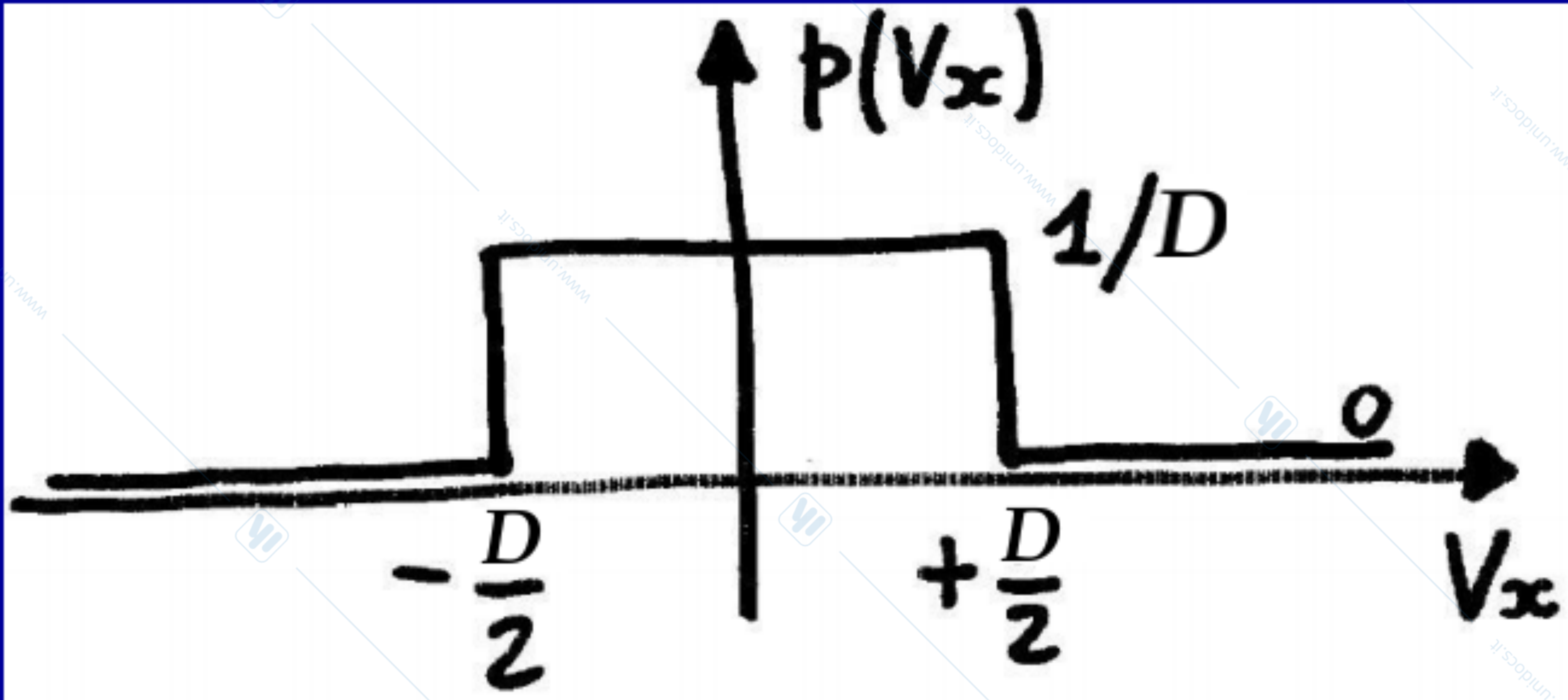
ΔV =20V/65536≅ 0.3 mV

$u(V) = \Delta V/(12)^{0.5} \cong$ 88 µV

$u_r(V) = u(V)/V_x \cong 8.8 \times 10^{-6}$

Bit equivalenti (1/7)

segnale $s(t) = V_x \in [-D/2, +D/2]$ dinamica del voltmetro



La dinamica di variazione del segnale è $D = \pm D/2$ $\Rightarrow$ $\sigma_s^2 = \frac{D^2}{12}$

Bit equivalenti (2/7)

Disponendo di un convertitore/voltmetro che quantizza il segnale $s(t)$ mediante n bit, si avrà un PASSO DI QUANTIZZAZIONE $Q=D/2^n$

Se D **è la dinamica** del segnale e anche del voltmetro, si ha una varianza ("incertezza di quantizzazione")

$$\sigma_q^2 = \frac{Q^2}{12} = \frac{1}{12}\left(\frac{D}{2^n}\right)^2 = \frac{\sigma_s^2}{2^{2n}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} = \text{costante} = 2^{2n} = \frac{S}{N_q}}$$ per un quantizzatore ideale

rapporto segnale rumore

è possibile ricavare n (n° di bit) dal rapporto S/N (*Signal/Noise*)

Bit equivalenti (3/7)

da $\frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} = \text{costante} = 2^{2n}$

In un convertitore ideale

$$n = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2}\right)$$

$$S = \sigma_s^2$$

$$N_q = \sigma_q^2$$

$$\rightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{S}{N_q}\right) \quad \textbf{caso “ideale”}}$$

$$N_c = N_q + \overbrace{N_{A/D} + N_{ext}}^{\text{rumore aggiunto}} > N_q$$

In un convertitore reale

$$\sigma_c^2 = \sigma_q^2 + \underbrace{\sigma_{n,A/D}^2}_{\text{convertitore reale}} + \underbrace{\sigma_{n,ext}^2}_{\text{rumore esterno}} > \sigma_q^2$$

Bit equivalenti (4/7)

Si definisce il **numero di bit equivalenti** come

$$n_e \equiv \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_c^2}\right) < n \quad \rightarrow \quad \boxed{n_e = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{S}{N_c}\right) \text{ caso reale}}$$

rumore complessivo del convertitore (quantizzazione + rumore aggiunto)

$$n_e = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2}\frac{\sigma_q^2}{\sigma_c^2}\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_q^2}{\sigma_c^2}\right) =$$

$$= n - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_q^2}\right) = n - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\overbrace{\sigma_{n,A/D}^2 + \sigma_{n,ext}^2}^{\text{rumore aggiunto}}}{\sigma_q^2}\right)$$

Bit equivalenti (5/7)

Poiché $\frac{S}{N_q} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} = 2^n$

$N = \sigma_n^2$ rum. aggiunto

$$\frac{\sigma^2_{n,A/D} + \sigma^2_{n,ext}}{\sigma^2_q} = 2^{2n}\frac{N}{S}$$

rumore aggiunto

$\Rightarrow \frac{\sigma_n^2}{\sigma_q^2} = \frac{N}{N_q} = N \cdot \frac{2^n}{S}$

essendo $\sigma_q^2 = \dfrac{\sigma_s^2}{2^{2n}}$

ci domandiamo se $(\sigma_n^2/\sigma_q^2) = 2^{2n}(N/S)$ *sia* << 1 o >> 1 ...

Esistono due condizioni limite per $n - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\sigma^2_{n,A/D} + \sigma^2_{n,ext}}{\sigma^2_q}\right)$

"alto" $\dfrac{S}{N} >> 2^{2n}$ $\quad \boxed{n_e \cong n}$

→ rumore molto minore rispetto alla quantizzazione

"basso" $\dfrac{S}{N} << 2^{2n}$ $\quad n_e \cong n - \frac{1}{2}\log_2\left(2^{2n}\right) - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\log_2(S/N)}$$

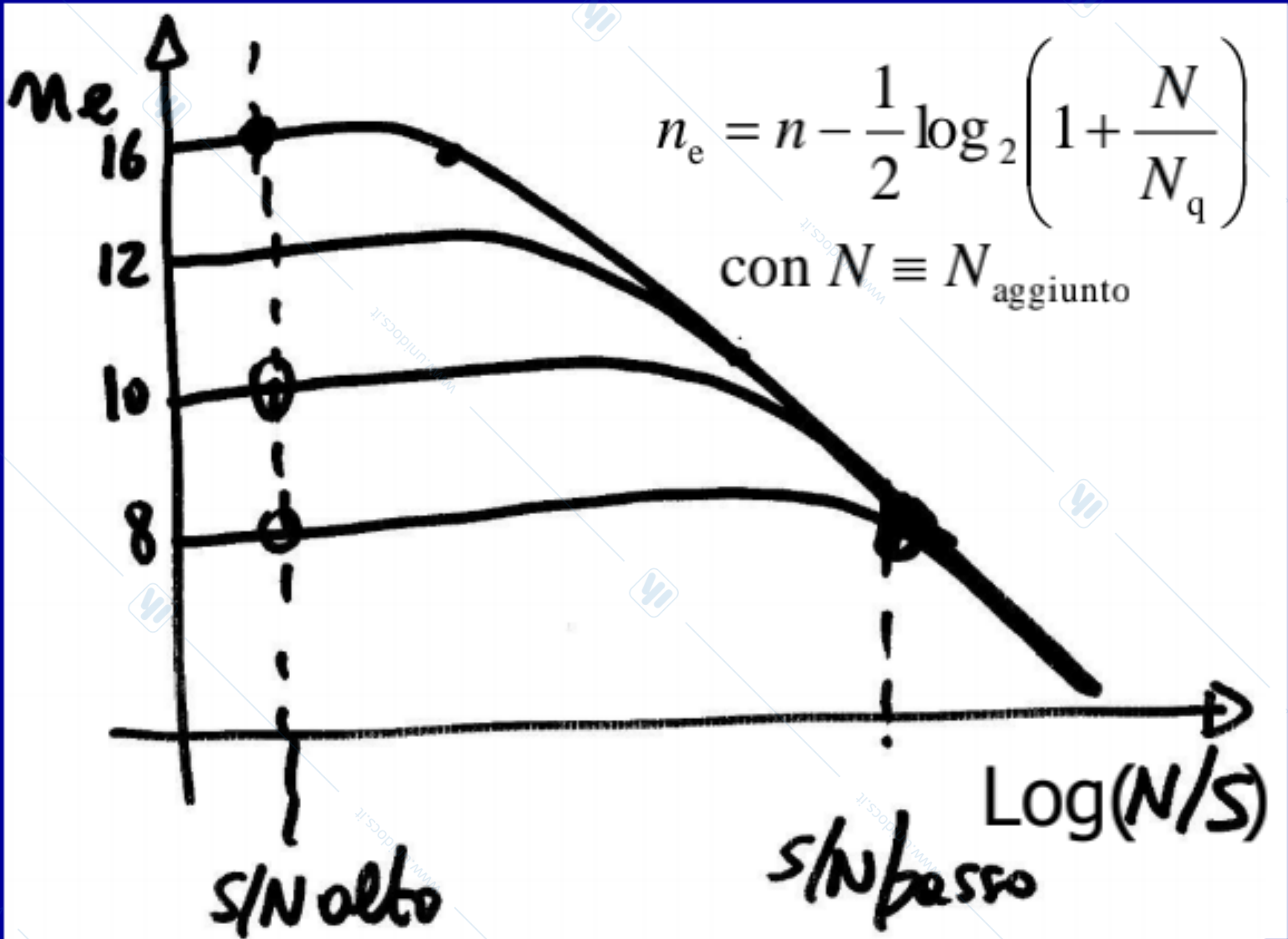
il numero di bit dipende solo dal rapporto segnale/rumore (S/N) (e non da n originario)

Per S/N basso, si perde 1 bit per un calo di S/N di un fattore 4 (-6 dB)

Bit equivalenti (6/7)

$$n_e = n - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{N}{N_q}\right)$$

con $N \equiv N_{aggiunto}$



Bit equivalenti (7/7)

Perdendo un fattore 4 = 6 dB in S/N si perde 1 bit
Per ogni fattore 2 = 3 dB, sempre perso in S/N, si perde invece ½ bit...

Se anziché perdere in S/N si guadagna in S/N (S/N aumenta), allora si guadagnano gli stessi incrementi in bit equivalenti (**+½ bit ogni ×2 in S/N**)

Esercizio: in zona di S/N "basso", si passa da $(S/N)_1$ a $(S/N)_2$ perdendo 30 dB. Come diminuiscono i bit equivalenti?

$$\text{si ha } \frac{(S/N)_2}{(S/N)_1} = -30\text{ dB} = \frac{1}{1000} \text{ con}$$

$$n_{e,1} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{S}{N}\right)_1 \qquad n_{e,2} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{S}{N}\right)_2$$

$$n_{e,2} = n_{e,1} + \frac{1}{2}\log_2\frac{(S/N)_2}{(S/N)_1} \cong n_{e,1} - \frac{10}{2} = n_{e,1} - 5\text{ bit}$$

infatti $1000 \approx 4^5 = 2^{10}$
e si perde 1 bit ogni fattore 4

Digital Multi-Meter (DMM)

Strumento di misura per:
tensione e corrente (DC e AC)
resistenza, capacità,
prova-transistor o diodi,
temperatura, …

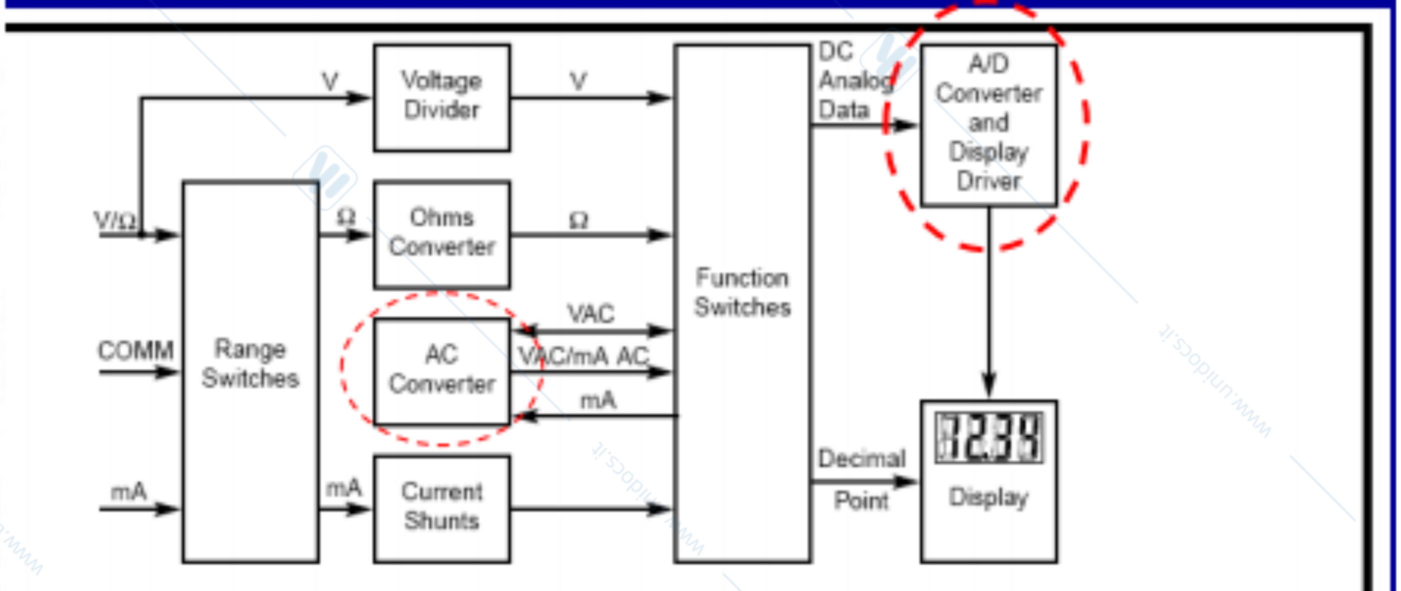


Figure 1 Simplified Block Diagram

Misure di *V*, *I*, *R* e *display*

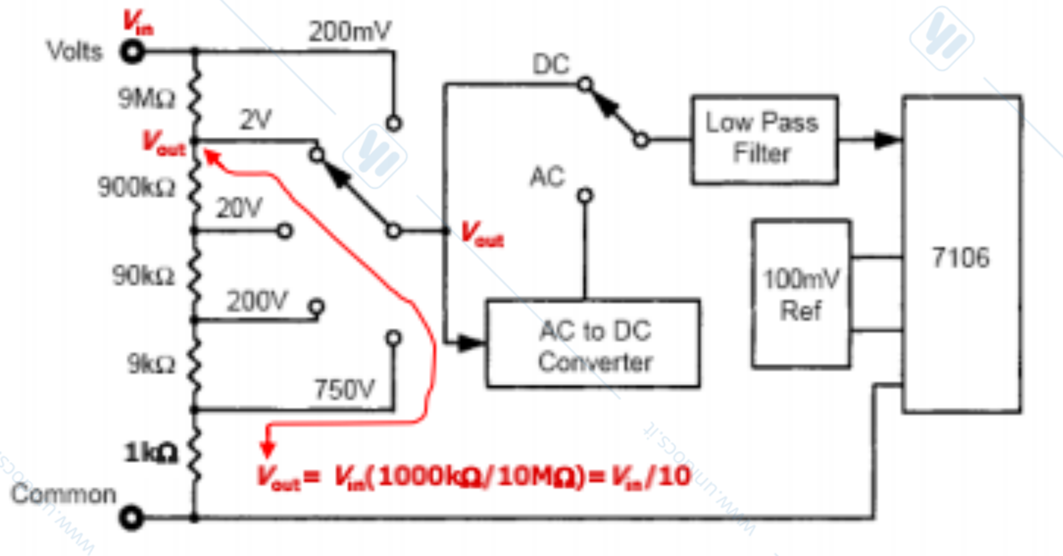


Figure 3 Simplified Voltage Measurement Diagram

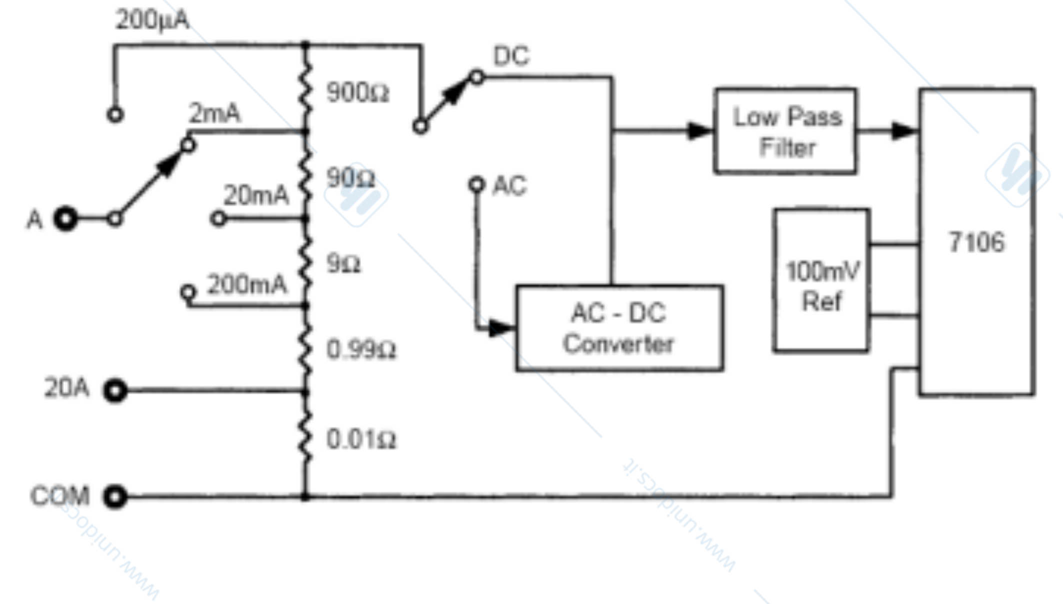


Figure 4 Simplified Current Measurement Diagram

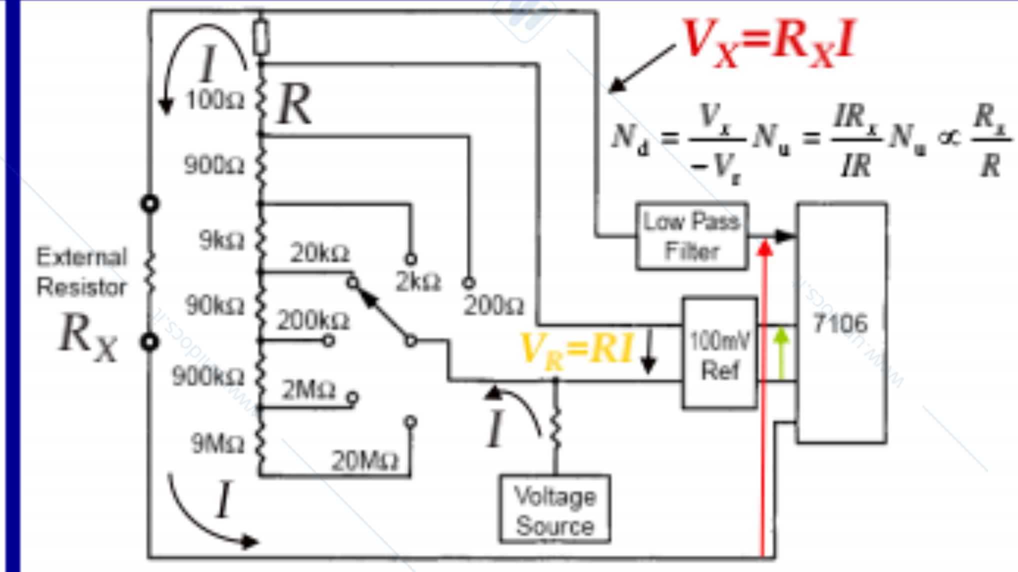


Figure 5 Simplified Resistance Measurement Diagram

visualizzatore
(a 3½ cifre)