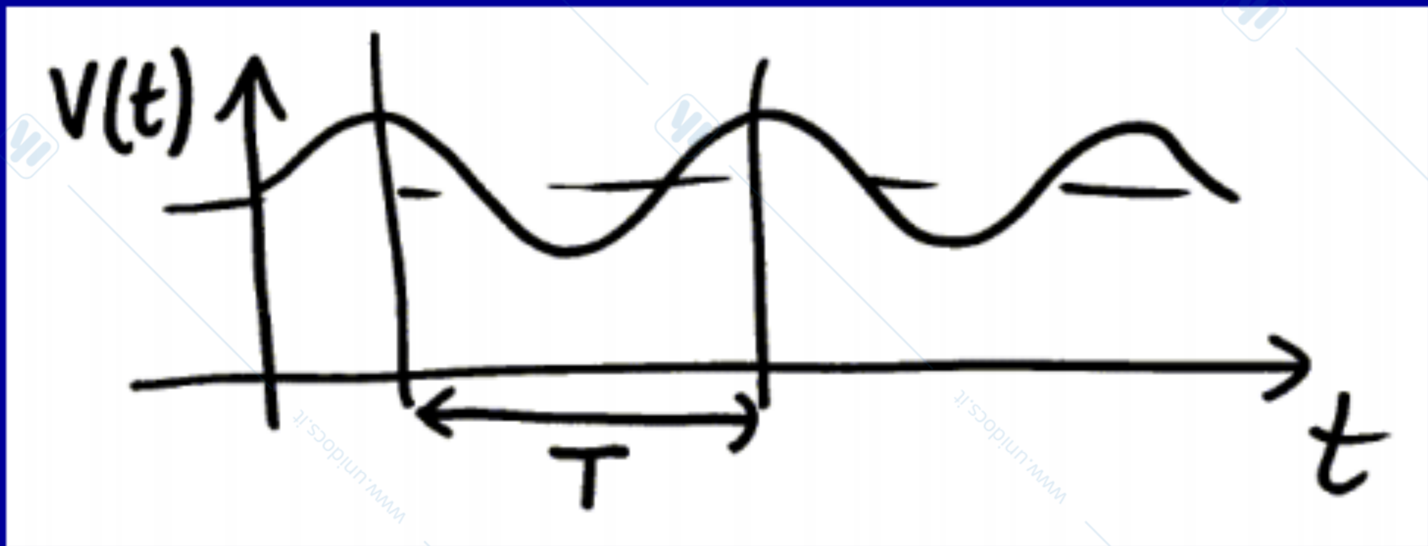
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI RISULTATI SPERIMENTALI

INTERPOLAZIONE E CURVE DI REGRESSIONE

Rappresentazione grafica

- "Visione d'insieme" di una grandezza, in funzione del tempo o di un altro parametro
- Tipicamente si utilizzano assi coordinati che devono riportare la descrizione della grandezza rappresentata e all'occorrenza anche la sua unità di misura



Tipi di Grafici

- Quando sugli assi compaiono dei valori numerici, bisogna sempre indicare l'unità di misura corrispondente. Il grafico si dice QUANTITATIVO
- Altrimenti il diagramma è QUALITATIVO e può servire per indicare degli andamenti o delle tendenze

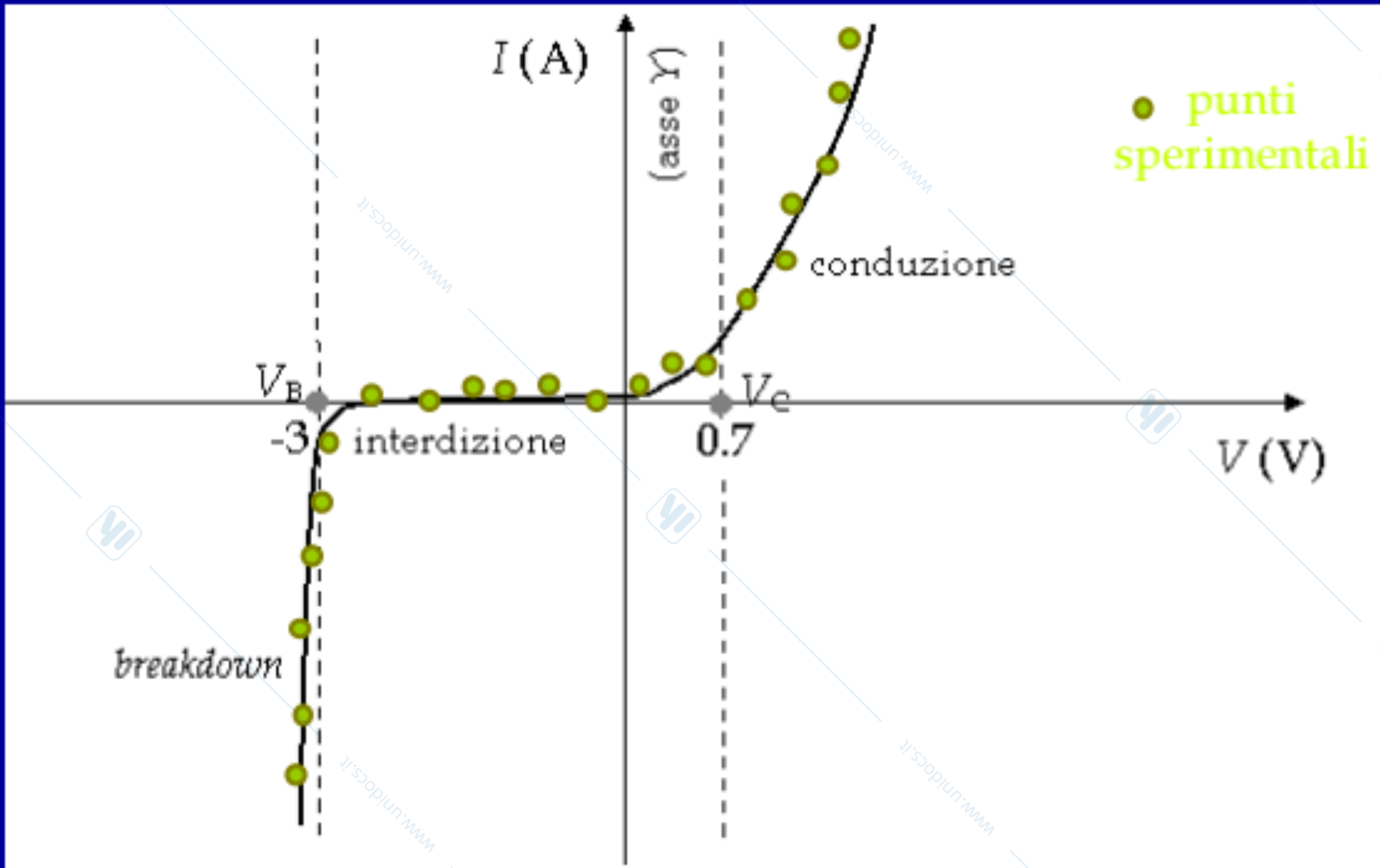
Grafico in un PIANO CARTESIANO

- ASCISSE (asse X): variabile indipendente o di comando o di ingresso
- ORDINATE (asse Y): variabile dipendente o grandezza di uscita

Tipicamente $u(x_i) << u(y_i)$, ossia la variabile di comando è nota con buona precisione (incertezza trascurabile) mentre la variabile di uscita presenta una maggiore incertezza

Molte volte le incertezze di ingressi e uscite non sono specificate ma insieme al rumore sui dati si traducono in una "dispersione dei punti sperimentali"

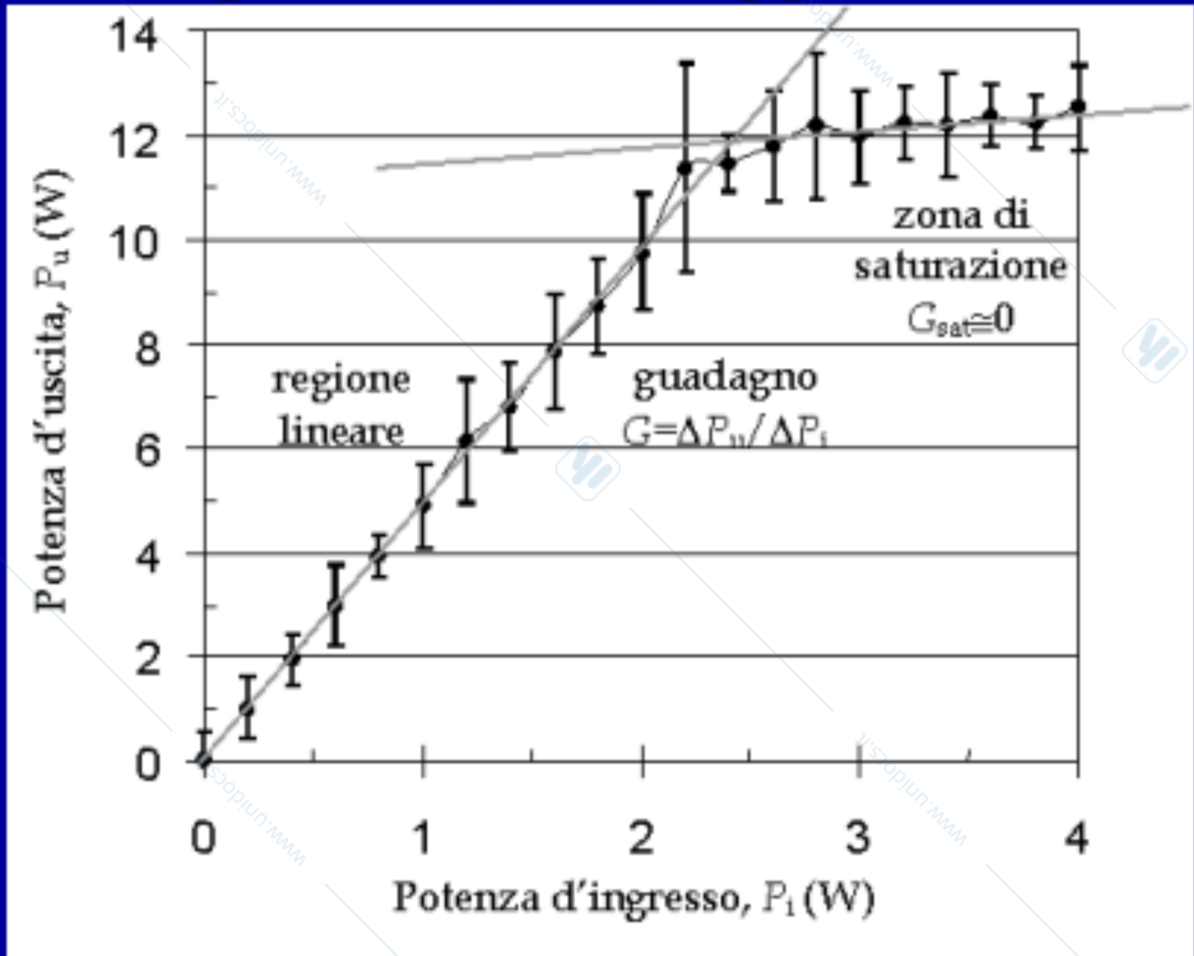
Caratteristica tensione corrente per un diodo Zener



Rappresentazione grafica della dispersione (incertezza): Barre di Errore

Caratteristica ingresso-uscita di un amplificatore elettronico.

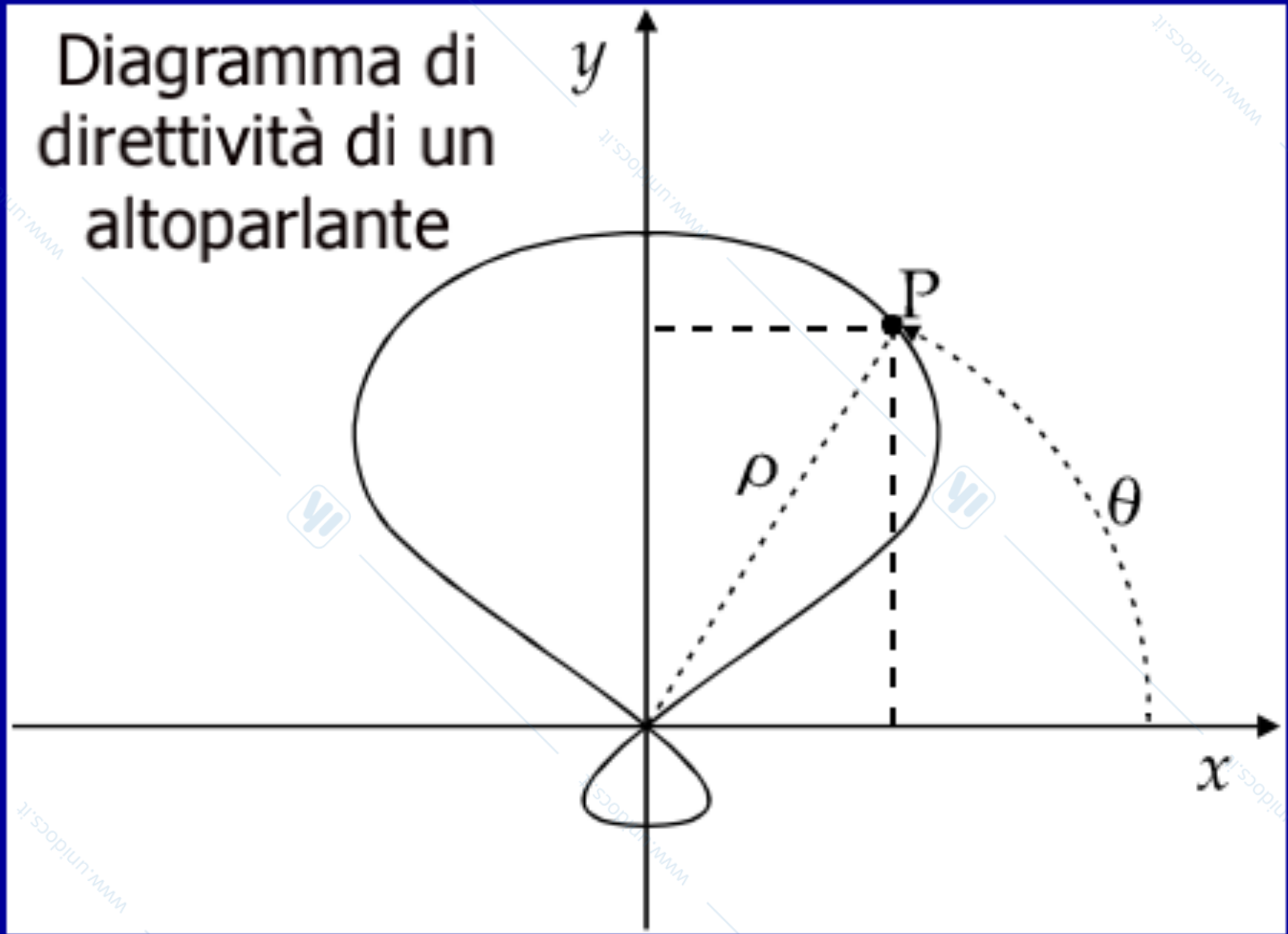
Le barre di errore indicano un intervallo di confidenza, che va specificato: ad esempio $\pm 1\sigma$ (68%), oppure ad esempio il 90%.



Diagrammi polari

Coordinata radiale $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$

Coordinata angolare $\theta = \mathrm{arctg}(y/x)$ per $x \geq 0$



$x = \rho \cos(\theta)$

$y = \rho \sin(\theta)$

$\rho(\theta)$ può anche indicare la potenza irradiata da un'antenna

Scale logaritmiche

Utili per visualizzare grandezze che variano di **diversi ordini di grandezza**, con dettaglio relativo costante: punti equispaziati in scala logaritmica stanno in uno stesso rapporto in scala lineare.

$z|_{log}=\log_B(z/z_0)$ B è la base e z_0 è il riferimento

Molto comuni **dB e dBm** (con B=10)

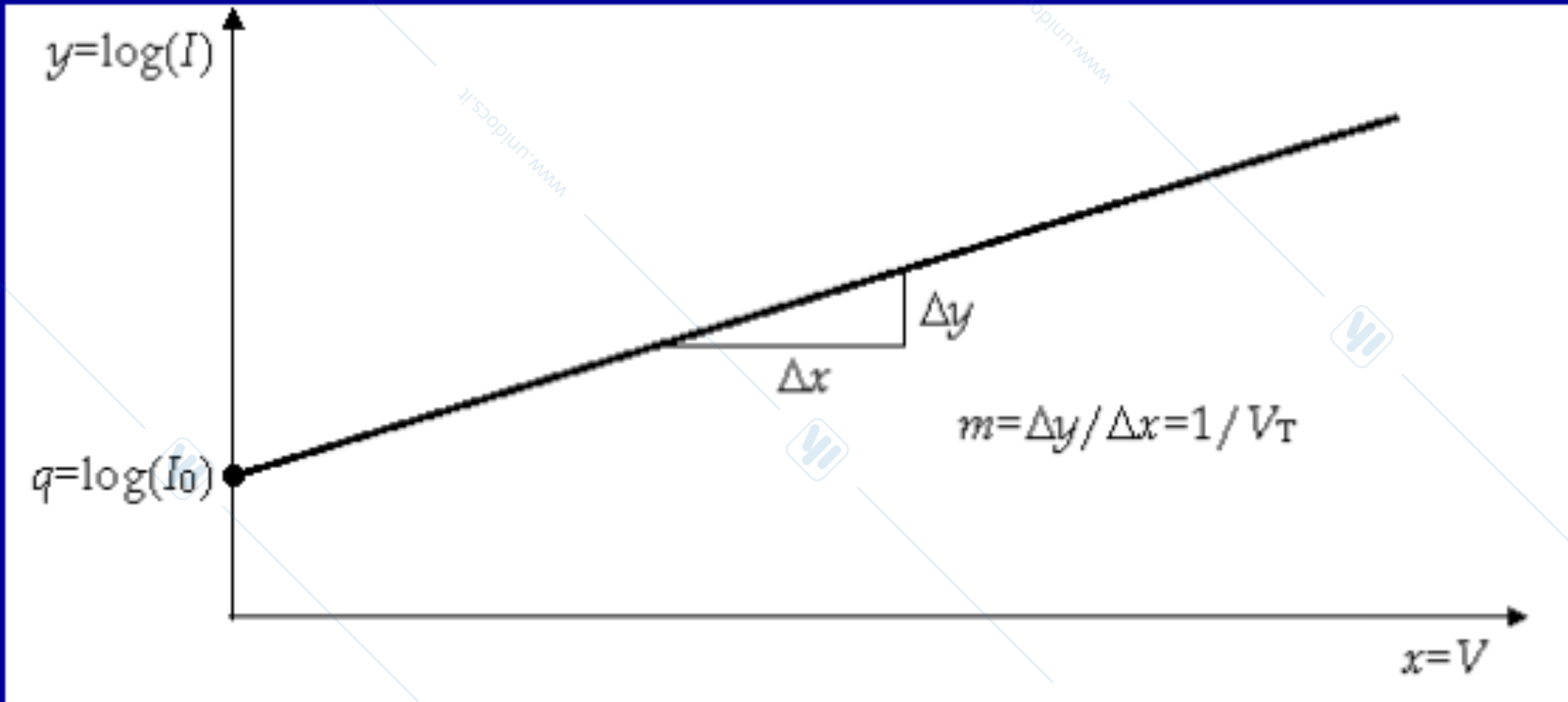
$P|_{dB}=10\log_{10}(P/P_0)$

$A|_{dB}=20\log_{10}(A/A_0)$

$P|_{dBm}=10\log_{10}[P/(P_m)]$ con P_m=1 mW

Diagrammi Semilogaritmici (log-lin)

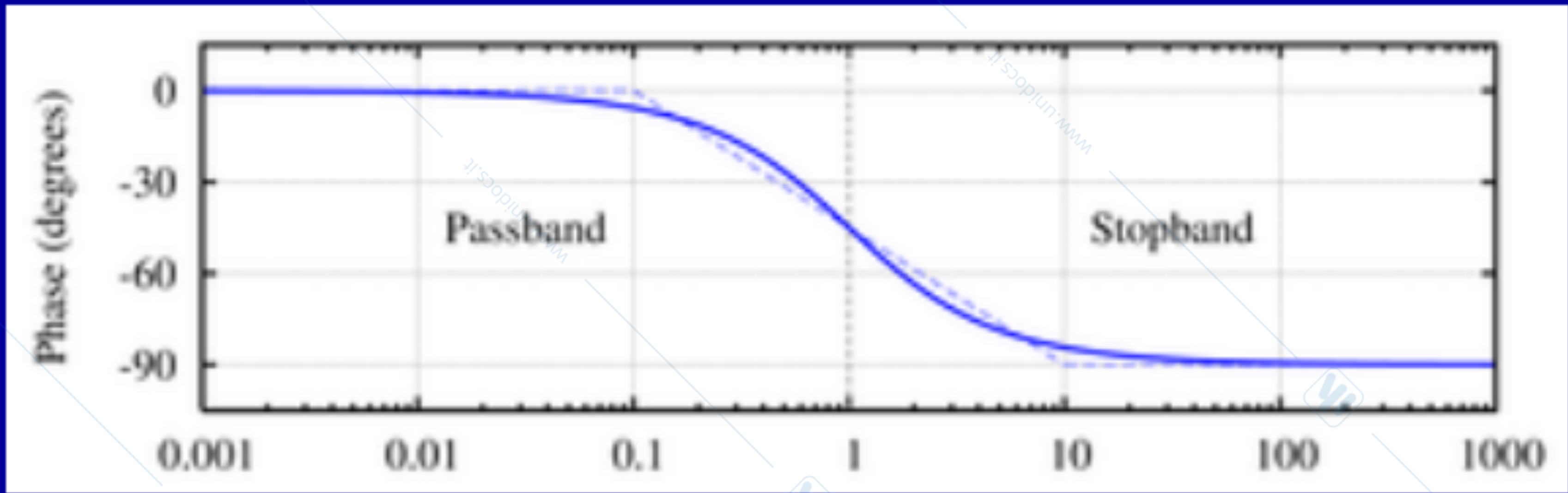
Diagramma semilog-y per la curva I-V di un diodo a semiconduttore in polarizzazione diretta: $I=I_0\exp(V/V_T)$



$$y = \log(I) = (1/V_T)\times V+\log(I_0) = mx+q$$

$$m = (1/V_T) \qquad q=\log(I_0)$$

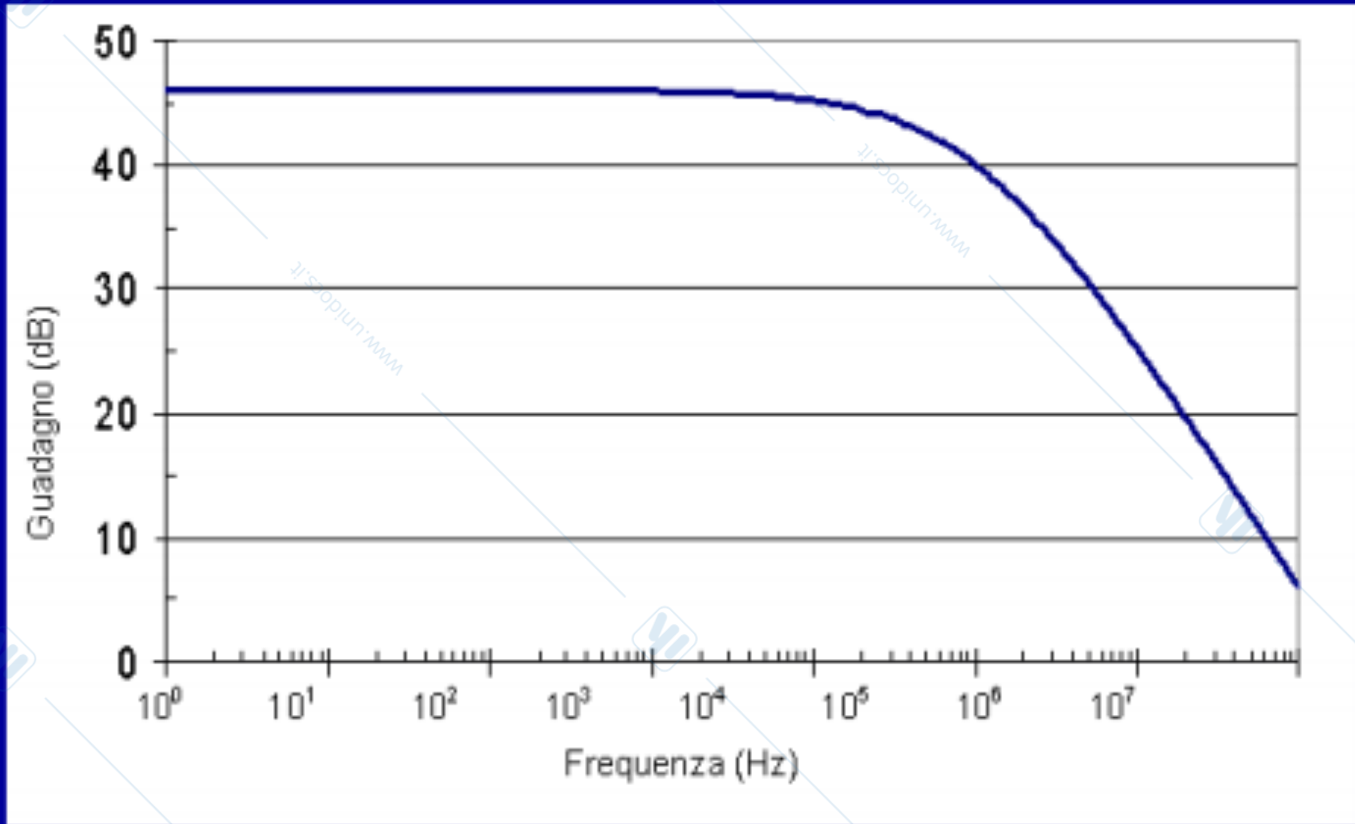
Diagrammi Semilogaritmici (lin-log): diagramma di Bode (della fase)



6 decadi (da 1 mHz a 1 kHz)

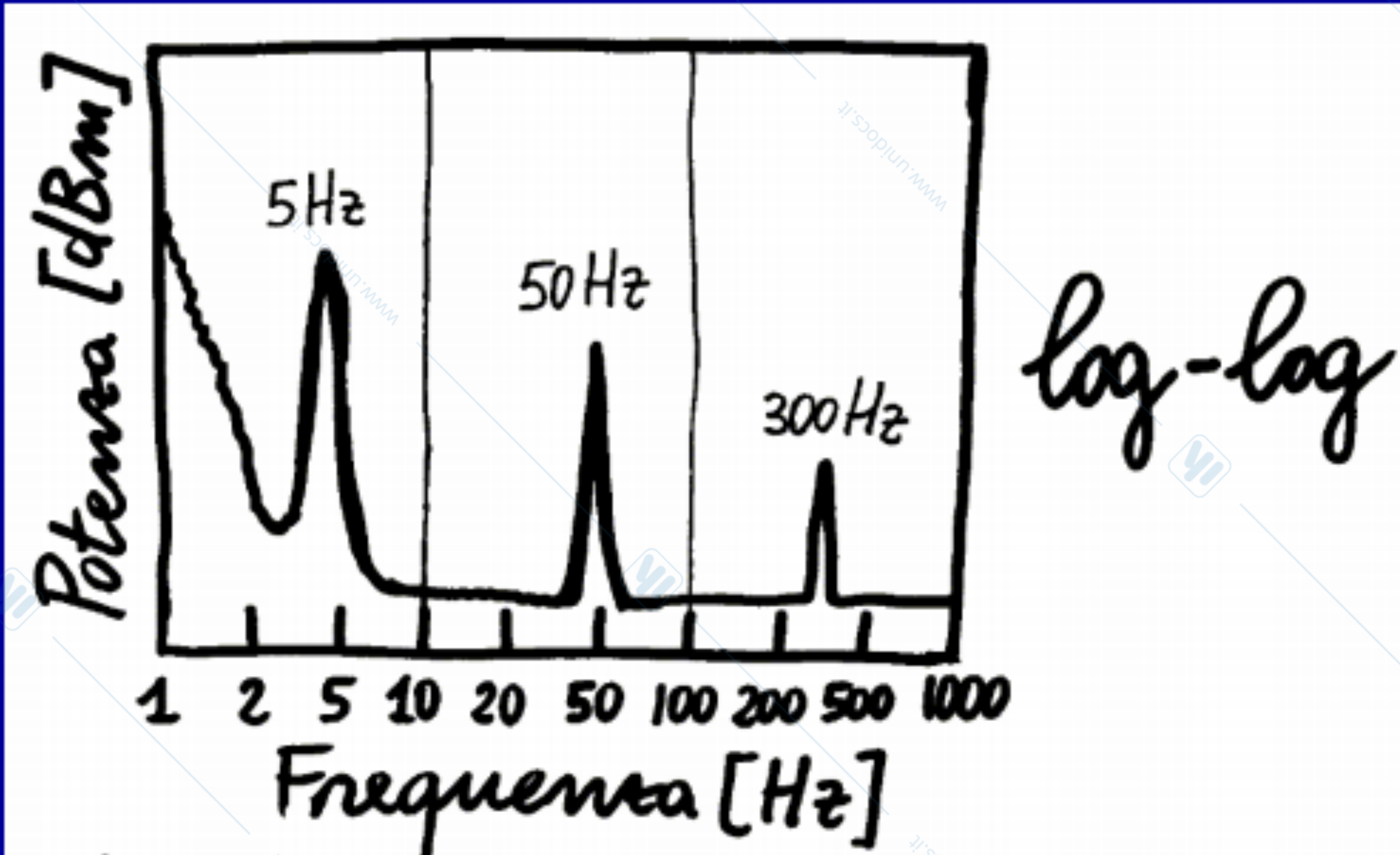
Sfasamento in gradi o radianti in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica (ampia dinamica).

Diagrammi Bilogaritmici (log-log): diagramma di Bode (dell'ampiezza)



Ampiezza o guadagno in dB in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica: si possono individuare delle pendenze tipiche (*e.g.* -20 dB/dec).

Diagrammi Bilogaritmici (log-log): spettro di potenza di un segnale



Ampia dinamica di frequenze e potenze visualizzabili sullo stesso diagramma.

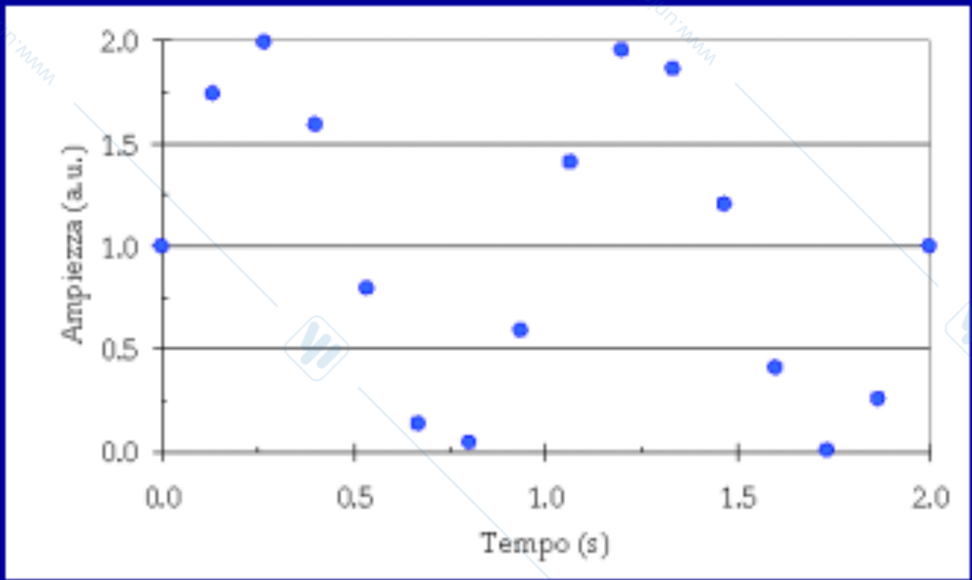
Interpolazione

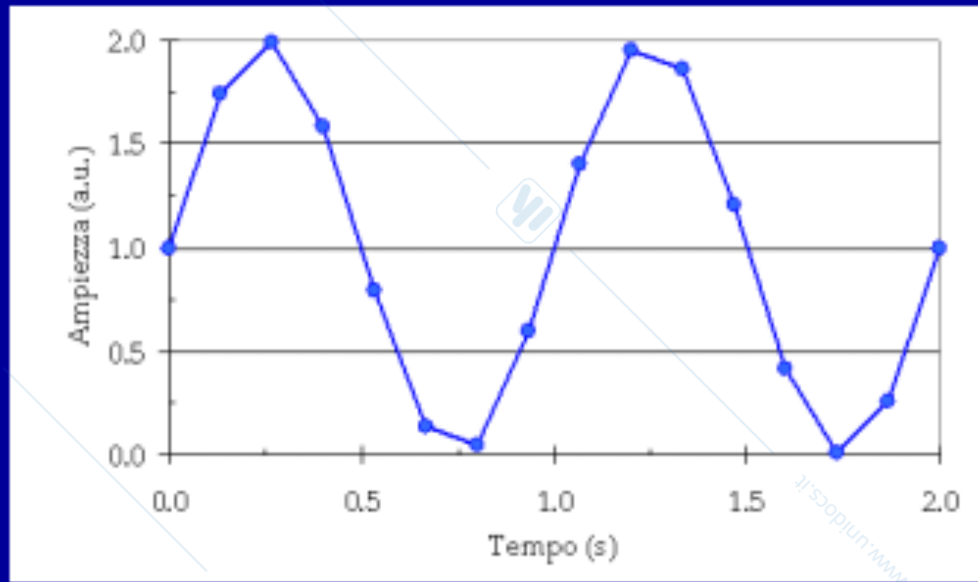
come ottenere una curva da pochi punti di misura

- Misura: insieme finito e discreto di valori sperimentali.
- Questi punti sperimentali discreti sono tipicamente i valori assunti dal misurando al variare di uno o più parametri di comando (grandezza/e di ingresso). Oppure sono i campioni discreti prelevati nel tempo.
- La rappresentazione è più facilmente leggibile se operiamo un "riempimento" o **interpolazione tra due punti sperimentali adiacenti**.
- Interpolante: è una funzione continua, che passando per i due punti in questione ci fornisce l'andamento presunto (interpolato) della relazione ingresso-uscita.

Interpolazione lineare

È la più semplice interpolazione possibile: consiste nel congiungere i punti con una spezzata (insieme dei segmenti di rette che passano per due punti adiacenti).

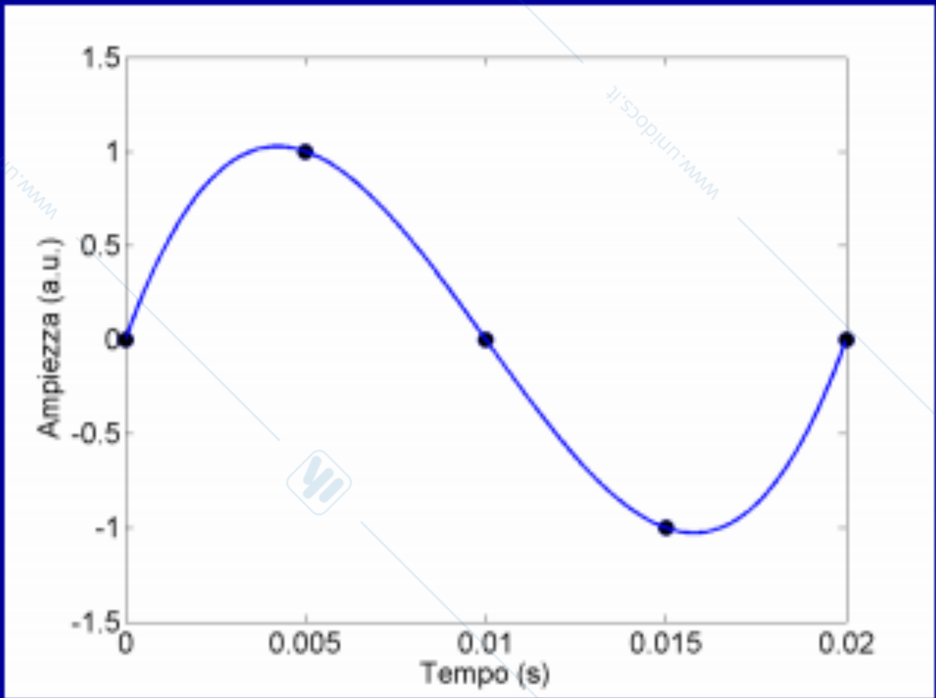


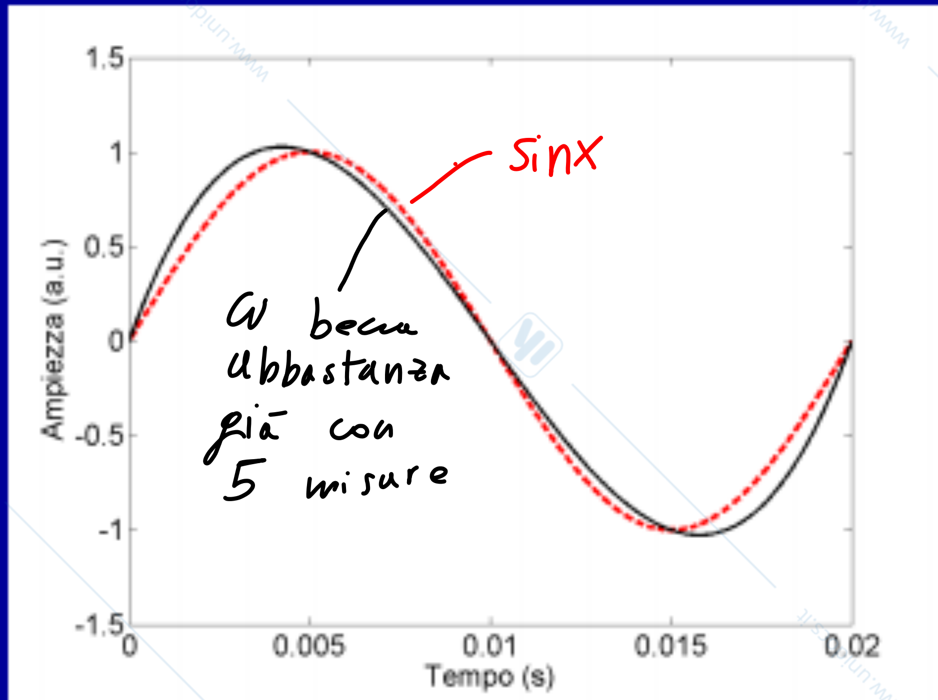


Non consente una buona ricostruzione del segnale perché non sfrutta l'informazione dei punti precedenti e successivi.

Interpolazione polinomiale cubica

È la curva che passa per i punti sperimentali, mantenendo continue la derivata prima e seconda.





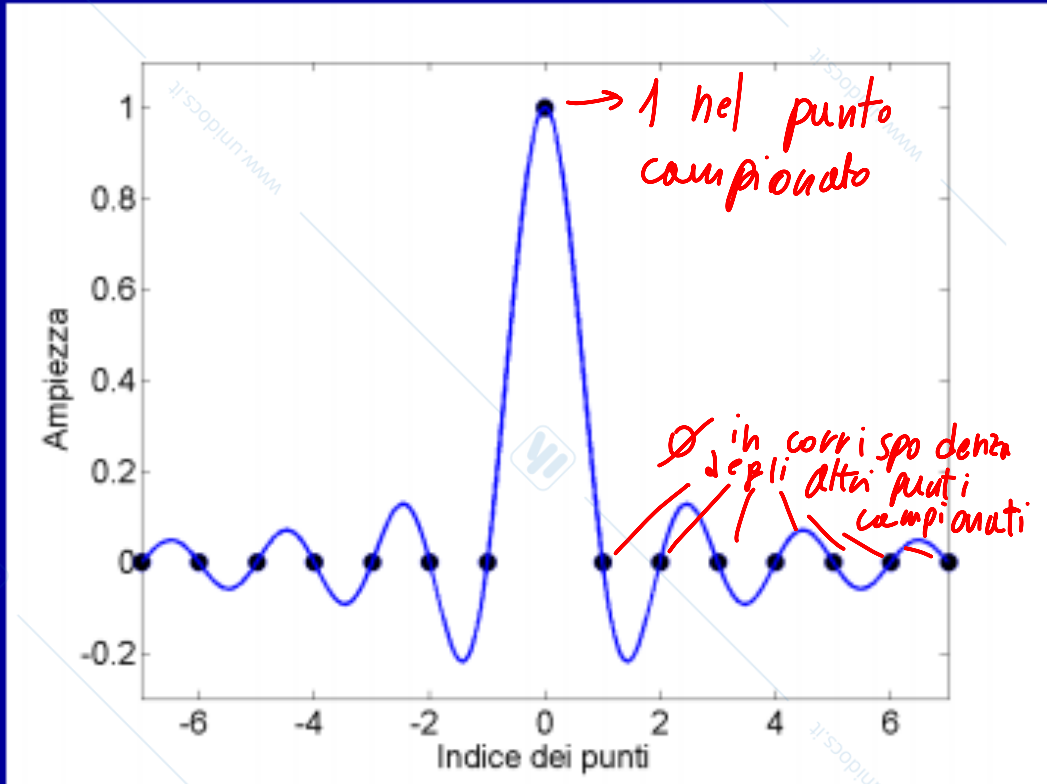
Ha l'effetto visivo di una "linea smussata". Può essere ottenuta con differenti condizioni al contorno (nei due punti estremi dell'intervallo di dati disponibili).

Interpolazione a seno cardinale

- Utilizzata per la ricostruzione di segnali campionati nel tempo.

↳ guarda quad.

- Si ricava matematicamente dall'operazione di filtraggio passa-basso ideale del segnale campionato.
- Nel dominio del tempo consiste in una convoluzione del segnale campionato con la funzione $\mathrm{sinc}(\pi x)=\sin(\pi x)/\pi x$



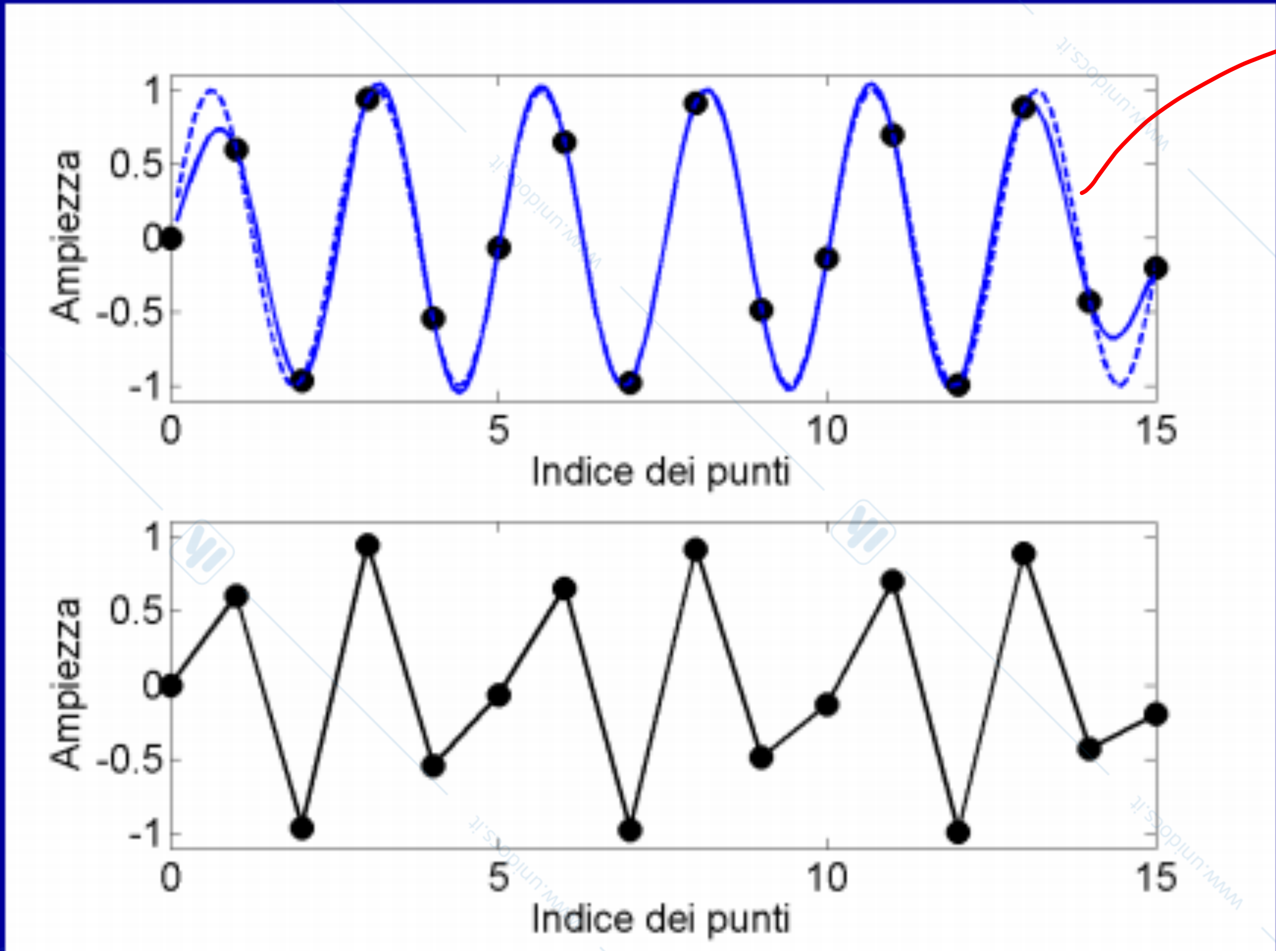
Esempio di ricostruzione di un segnale mediante interpolatore

Sinusoide campionata a 2.51 punti per periodo

quad.

avrei bisogno del contributo dei punti dopo che però alla fine non ci sono

Sui bordi sbaglia un pochino (effetto di bordo)



Interpolatore sinc(x)

Interpolatore lineare

Regressione di più punti sperimentali

- Un **diagramma sperimentale**, ottenuto da risultati di misura, spesso mostra una dipendenza $y = f(x)$ che appare ragionevolmente approssimabile con una **funzione nota**
- Alternativamente, da un'**analisi teorica**, possiamo conoscere quale tipo di **relazione matematica (modello)** dovrebbe essere rappresentata dai punti, ma la dispersione dei dati è talmente grande (*e.g.* per la presenza di rumore) che non riusciamo a definire con sufficiente affidabilità i **valori dei parametri**

- Come è possibile **ricavare questi valori (parametri caratteristici del fenomeno misurato)** da una misura/**osservazione di più punti?**

Regressione ai minimi quadrati (LS)

- Consideriamo una generica dipendenza di una variabile fisica y da un'altra variabile x, attraverso una funzione f con più parametri $A,B,\ldots$: $y = f(A,B,\ldots x)$
- Effettuiamo quindi n misure y_i della variabile y in funzione della variabile x osservata nei punti x_i
- Per stimare i parametri che meglio rappresentano la realtà misurata, definiamo una funzione "distanza" tra la misura e la funzione f. Si vuole minimizzare tale distanza
- La funzione "distanza" più comunemente usata è la somma degli scarti quadratici tra f e il valore misurato
- Scarto: $\delta_i = y_i - f(x_i)$
- Funzione "distanza" da minimizzare:

$$\begin{cases} \frac{\partial D(m,b)}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial D(m,b)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\Phi = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}$$

Regressione lineare LS (1/2)

Un importante caso di regressione, semplice da risolvere analiticamente, è quello della regressione lineare:

Consideriamo una dipendenza lineare $y = m\,x + b$ di cui si vogliono ricavare i due parametri m e b.

Per il punto i-esimo di misura, lo scarto δ_i tra il valore empirico, y_i, e quello della curva di regressione, $f(x_i)$, vale

$$\delta_i = y_i - [\, m\, x_i + b \,]$$

Dobbiamo trovare i valori dei parametri (m e b) per i quali è minima la "distanza"

$$\boxed{\Phi(m,b) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (m x_i + b)]^2}$$

Regressione lineare LS (2/2)

Per trovare il minimo di Φ, **annulliamo le due derivate prime parziali rispetto a *m* e *b*** :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} = 0 \Rightarrow \left(m \sum x_i^2 \right) + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \Rightarrow \left(m \sum x_i \right) + nb = \sum y_i$$

dove tutte le sommatorie sono ovviamente estese per i che va da 1 fino a n.

Si è ottenuto un sistema lineare di due equazioni in due incognite, m e b appunto.

Regressione lineare: calcolo di *m* e *b*

La soluzione del sistema (che si ottiene facilmente per sostituzione) è:

→ formule molto sensibile agli errori
↳ non bisogna arrotondare (bisogna tenere tutte le cifre)

~~non~~ dobbiamo sapere la dimostrazione

$$m = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

anche b

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\sum y_i - m\sum x_i}{n} = \bar{y} - m\bar{x}$$

Questa soluzione corrisponde a un minimo (lo si può dimostrare matematicamente facendo le derivate seconde, entrambe >0, oppure ripensando al significato della funzione "distanza", intrinsecamente positiva e che cresce allontanandosi dai punti acquisiti...)

MIN → CONVESSA $f''(x) > 0$

Esercizio su retta di regressione (1/2)

n(=5) misure di y=f(x) con punti sperimentali

i	1	2	3	4	5
x_i =	[0	1	2	3	4]
y_i =	[1	2	2	2	3]

x_i	y_i
0	1
1	2
2	2
3	2
4	3

Modello lineare $\delta_i = y_i - [\, m\, x_i + b \,]$

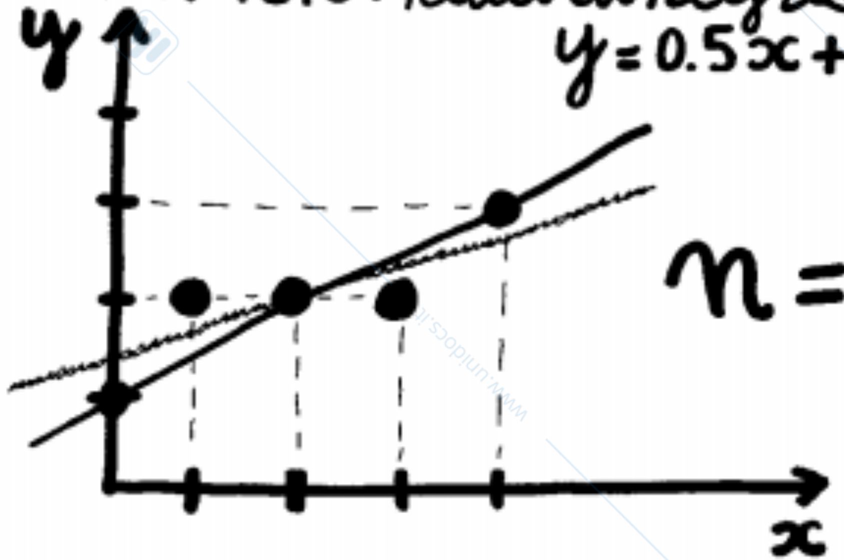
Regressione ai minimi quadrati → $\sum(\delta_i)^2$="min."

$$m = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \quad b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\sum y_i - m\sum x_i}{n} = \bar{y} - m\bar{x}$$

Esercizio su retta di regressione (2/2)

ESERCIZIO: retta di regressione

$y = 0.5x + 1$???



$n = 5$

x_i	y_i
0	1
1	2
2	2
3	2
4	3

Modello: $y = mx + b$ retta di regr.

$$m = \frac{5(0+2+4+6+12) - 10 \times 10}{5(0+1+4+9+16) - (10)^2} = \frac{20}{50} = 0.4$$

$$b = \frac{10 - 0.4 \times 10}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$