**FONDAMENTI DELLA MISURAZIONE** **10 Luglio 2019**

**Prof. Michele Norgia** **Secondo appello AA 2018/2019**

**Tempo a disposizione 1h35min TOT, 1h II P** **Aula F.0.1 ore 8.30**

**COGNOME:** ___________________________ **Nome:** _______________________ *(stampatello)*

**Corso di Laurea:** __________ **Matricola e firma** __ __ __ __ __ __ _____________*(firma leggibile)*

Punteggi: (precompito **8**+ESE1 **10**+ESE2 **6**+ESE3 **9** =**33** p)

***Crocettare la scelta e gli esercizi svolti*** **(almeno parzialmente)**

ESAME INTERO (1 2 3) □ SOLO SECONDA PARTE(2 3)□

# SOLUZIONI

**(35 min)** **Esercizio 1**

*(svolgere su questo foglio e sul retro)*

1a) La misura del volume di una collana d'oro viene effettuata stimando l'incremento di volume di acqua in un recipiente tarato. La misura viene ripetuta 5 volte, ottenendo i seguenti valori di misura:

$V_i$ [cm$^3$] =1.06; 0.98; 1.02; 0.94; 1.00.

Si stimi il volume della collana $V$ e la sua incertezza tipo.

1b) In letteratura troviamo che la densità $\rho$ dell'oro puro vale 19300 kg/m$^3$, mentre l'oro a 18 carati ha densità 15500 kg/m$^3$. Supponiamo che la collana sia almeno a 18 carati, ma non sappiamo altro (potrebbe essere di oro puro).

Si calcoli la forza peso $P$ della collana e la sua incertezza relativa, sapendo che l'accelerazione di gravità vale $g$=9.81 m/s$^2$ con incertezza relativa pari all'1%.

1c) Pesiamo la collana con una bilancia elettronica con risoluzione 1 mN e accuratezza del fattore di scala pari allo 0.5 % del valore misurato, ottenendo 0.157 N. Si calcoli l'incertezza di questa misura.

1d) Si valuti la compatibilità delle due misure di peso effettuate. Considerando le due misure effettuate si giustifichi la miglior stima del peso del lingotto in questione.

1e) Con quanti gradi di libertà è stata stimata l'incertezza del volume nel punto 1a)? Che cosa indica questa grandezza?

**1a)** Essendo in presenza di 5 misure ripetute, stimiamo il valore di misura come la media campionaria delle 5 misure:

$$V = \overline{V} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{7} V_i = 1.000\ \text{cm}^3$$

L'incertezza della misura è invece stimata dalla deviazione standard campionaria del valor medio:

$$u(V) = s(\overline{V}) = \frac{s(V)}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}\frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{7}\left(V_i - \overline{V}\right)^2} = 0.02\ \text{cm}^3 .$$

Quindi, $\boldsymbol{V}$**=1.000(20) cm$^3$**.

**1b)** La misura della forza peso si ottiene come $P = V \times \rho \times g$.

Stimiamo l'incertezza della densità considerando che possa essere uniformemente distribuita da 18 carati a 24 carati (oro puro), per cui la sua incertezza è pari all'ampiezza dell'intervallo divisa per $\sqrt{12}$ e il suo valore di misura è il valor medio dell'intervallo:

$\boldsymbol{\rho}$ **= 17400 kg/ m$^3$** e $\boldsymbol{u(\rho)}$ **=** (3800 kg/ m$^3$) / $\sqrt{12}$ $\cong$ **1100 kg/ m$^3$**.

La forza peso vale dunque $\boldsymbol{P} = V \times \rho \times g$ = 1 cm$^3$ × 17400 kg/ m$^3$ × 9.81 m/s$^2$ ≅ **0.1707 N**

Essendo $P$ una produttoria di variabili ad esponente unitario, il quadrato della sua incertezza relativa è pari alla somma dei quadrati delle incertezze relative delle singole variabili. Calcoliamo prima le incertezze relative

$u_r(V) = 0.01\ \text{cm}^3 / 1\ \text{cm}^3 = 2\ \%$
$u_r(\rho) = (1100\ \text{kg/m}^3)/(17400\ \text{kg/m}^3) \cong 6.3\ \%$
$u_r(g) = 1\ \%$ (come specificato nel testo)

L'incertezza relativa di $P$ vale quindi:

$$\boldsymbol{u_r(P)} = \sqrt{u_r^2(V) + u_r^2(\rho)^2 + u_r^2(g)^2} \cong \mathbf{6.7\ \%}$$

da cui $\boldsymbol{u(P)} = u_r(P) \times P = \mathbf{0.011\ N}$

Il risultato finale della misura è

$\boldsymbol{P} = \mathbf{0.171(11)\ N}$

**1c)** L'incertezza della pesata $P_2$ è data da due contributi: l'incertezza di quantizzazione $u_q$ e l'incertezza del fattore di scala $u_f$, che si sommano quadraticamente, in quanto scorrelati:

$u_q = 1\ \text{N} / \sqrt{12} \cong 0.29\ \text{mN}$
$u_f = 0.157\ \text{N} \times 0.5\ \% \cong 0.79\ \text{mN}$

$$\boldsymbol{u(P_2)} = \sqrt{u_q^2 + u_f^2} \cong \mathbf{0.84\ mN}$$

Il risultato finale della misura è

$\boldsymbol{P_2} = \mathbf{157.00(84)\ mN}$

**1d)** Siamo in presenza di due misure indipendenti della stessa grandezza che hanno fornito valori di misura diversi tra loro. Valutiamo la compatibilità tra le due misure secondo il criterio di compatibilità standard che prevede di confrontare la distanza tra i due valori con una combinazione delle due incertezze standard, secondo la relazione: $|P - P_2| \le k_{\text{comp}} \sqrt{u^2(P) + u^2(P_2)}$. Sostituendo i valori del caso, si ottiene (14 mN) $\le k_{\text{comp}}$(11 mN) che è verificata con $k_{\text{comp}}=2$. Le due misure sono tra loro **compatibili, con fattore di copertura $\boldsymbol{k_{\text{comp}}=2}$**.

In questo particolare caso la miglior stima del peso del lingotto è data dalla seconda pesata diretta $\boldsymbol{P_2} = \mathbf{157.00(84)\ mN}$, in quanto non è noto il grado di purezza dell'oro (è stato solo supposto maggiore di 18 carati) e quindi la media pesata con la prima misura aggiungerebbe una polarizzazione dettata solo dalla nostra supposizione. In ogni caso, vista la notevole differenza di accuratezza delle due misure, anche la media pesata avrebbe praticamente fornito lo stesso risultato.

**1e)** La misura di volume è stata ricavata da 5 misure ripetute, per cui ha $\boldsymbol{\nu = n-1 = 4}$ gradi di libertà. Tale valore è utile per ottenere una stima dell'incertezza che abbiamo sulla nostra stima di incertezza, più precisamente:

$$u_r(u(V)) \cong \frac{1}{\sqrt{2\nu}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \cong 35\%$$

Questo significa che il valore di incertezza ottenuto, 0.02 cm$^3$, deve essere considerato come una variabile casuale (quindi non è un valore "esatto"), con una deviazione standard non trascurabile, pari al 35% del suo valore. Infatti, una misura ripetuta su solo 5 dati non può fornire una buona stima della varianza della distribuzione da cui i dati sono stati estratti.

**(25 min)** **Esercizio 2**

*(svolgere su questo foglio e sul retro)*

2) Con un voltmetro integratore a doppia rampa si misura una tensione di 5 V con sovrapposto un disturbo a 50 Hz. Inoltre si accoppiano due ulteriori disturbi con ampiezze e frequenze: $V_1$=50 μV e $f_1$=417 Hz, $V_2$=400 μV e $f_2$=600 Hz. Il voltmetro è bipolare con dinamica ±10 V e 20000 livelli. La tensione in continua all'uscita dall'alimentatore vale 5.0 V e per questa tensione in ingresso al voltmetro la pendenza della rampa in salita eguaglia esattamente la pendenza della rampa in discesa.

2a) Quanto vale la risoluzione dimensionale $\Delta V$ e l'incertezza di quantizzazione $u_q(V)$?

2b) Si vuole ottenere una reiezione massima al disturbo di rete (50 Hz) e due valori di reiezione $r_1 \geq 35$ dB e $r_2 \geq 90$ dB ai due disturbi aggiuntivi: si scelga il minimo tempo di integrazione $T_{up}$ utile allo scopo.

2c) Con questo valore di $T_{up}$, quanto valgono la tensione di riferimento interna $V_r$ e il tempo complessivo di misura, $T_m$, della tensione in continua all'uscita dell'alimentatore?

2d) Quanto deve valere la frequenza dell'orologio interno (*clock*)?

**2a)** La risoluzione dimensionale del voltmetro è pari alla dinamica dello strumento divisa per il suo numero di livelli e quindi:

$\Delta V = D / N = 20$ V / 20000 = **1 mV**

L'incertezza di quantizzazione è legata ai livelli di quantizzazione (uniformi) ed è pari a:

$u_q(V) = \Delta V / \sqrt{12} = \cong$ **290 μV**

**2b)** È possibile rendere la misura immune da disturbi a frequenza fissa utilizzando un tempo di integrazione $T_{up}$ che sia multiplo intero del periodo del disturbo (si vedano le dispense del corso).

Il tempo di integrazione vale dunque $T_{up} = n\, T_{50\,\mathrm{Hz}} = n \times 20$ ms.

Per stimare la reiezione del disturbo a $f_1$ = 417 Hz applichiamo la formula $R = \dfrac{\pi f T_{up}}{\left|\sin\left(\pi f T_{up}\right)\right|}$, provando i multipli di 20 ms:

$n$=1 $\quad R = \dfrac{\pi f T_{up}}{\left|\sin\left(\pi f T_{up}\right)\right|} = \dfrac{\pi \times 417 \times 0.02}{\left|\sin\left(\pi \times 417 \times 0.02\right)\right|} \cong 29.9$ corrispondente a circa 29.5 dB (non sufficiente),

$n$=2 $\quad R = \dfrac{\pi f T_{up}}{\left|\sin\left(\pi f T_{up}\right)\right|} = \dfrac{\pi \times 417 \times 0.04}{\left|\sin\left(\pi \times 417 \times 0.04\right)\right|} \cong 62$ corrispondente a circa 35.8 dB >35 dB richiesti,

quindi $\boldsymbol{T_{up}}$ **= 40 ms** soddisfa la condizione richiesta.

Mentre per $f_2$ = 600 Hz, essendo un multiplo intero di 50 Hz, il voltmetro presenterà già una reiezione infinita.

**2c)** Il tempo complessivo di misura $T_m$ sarà pari alla somma di $T_{up}$, costante nel voltmetro a doppia rampa, e di $T_{down}$ (dipendente dal valore di tensione in ingresso al voltmetro). Essendo la pendenza in salita pari alla pendenza in discesa il tempo d'integrazione dovrà eguagliare il tempo di discesa e quindi:

$\boldsymbol{T_m = 2T_{up}}$ **= 80 ms**

Inoltre, la tensione di riferimento interna dovrà essere uguale alla tensione in continua all'uscita dall'alimentatore $\boldsymbol{V_r}$ **=5.0 V**

**2d)** Il periodo $T_{\text{clock}}$ dell'orologio interno del voltmetro può essere ricavato dalla relazione funzionale che lega la tensione in ingresso al voltmetro a doppia rampa con il tempo di discesa. Se infatti prendiamo il caso in cui la tensione in ingresso è pari alla minima tensione rilevabile (la risoluzione dello strumento), ad essa corrisponderà un singolo conteggio del *clock* dello strumento.

$T_{\text{clock}} = \left|\frac{\Delta V_x}{V_r}\right| T_{\text{up}} = \frac{1\,\text{mV}}{5\,\text{V}} \times (40\,\text{ms})$ **= 8 µs** corrispondenti a una **frequenza di 125 kHz.**

**(35 min)**

## Esercizio 3

*(svolgere su questo foglio e sul retro)*

3) Con un oscilloscopio digitale (2 canali, 60 MHz di banda passante, campionatore a 1 GSa/s) si osservano i seguenti segnali:

$v_1 = (5\ \text{V})\cdot\sin[2\pi\cdot(100\ \text{kHz})\cdot t] + \textit{disturbo}$

$v_2 = (15\ \text{mV})\cdot\sin[2\pi\cdot(100\ \text{kHz})\cdot t+\pi] + 5\ \text{mV}$

Al segnale $v_1$ è sommato un disturbo sinusoidale alla frequenza di 9 MHz e con ampiezza efficace di 600 μV.

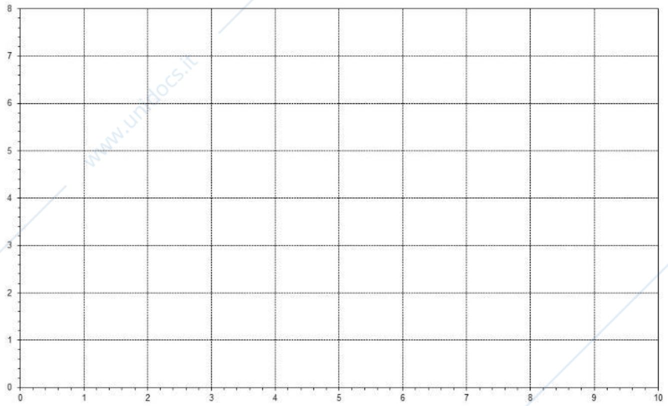
3a) Si scelgano le impostazioni ottimali per la visualizzazione di un periodo dei 2 segnali.

3b) Si disegni qui sotto la schermata oscillografica corrispondente alla misura.

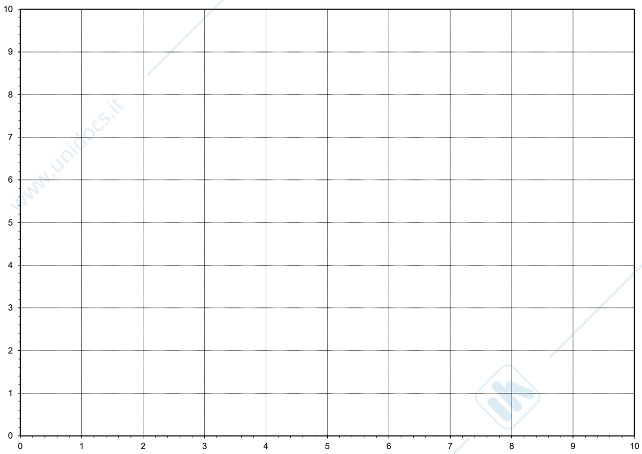
3c) Si decidano le impostazioni di un analizzatore di spettro con *noise figure* +25 dB, per visualizzare il segnale $v_1$ attenuato di 30 dB.

3d) Si disegni qui sotto la schermata visualizzata sull'analizzatore di spettro.

OSCILLOSCOPIO



ANALIZZATORE DI SPETTRO

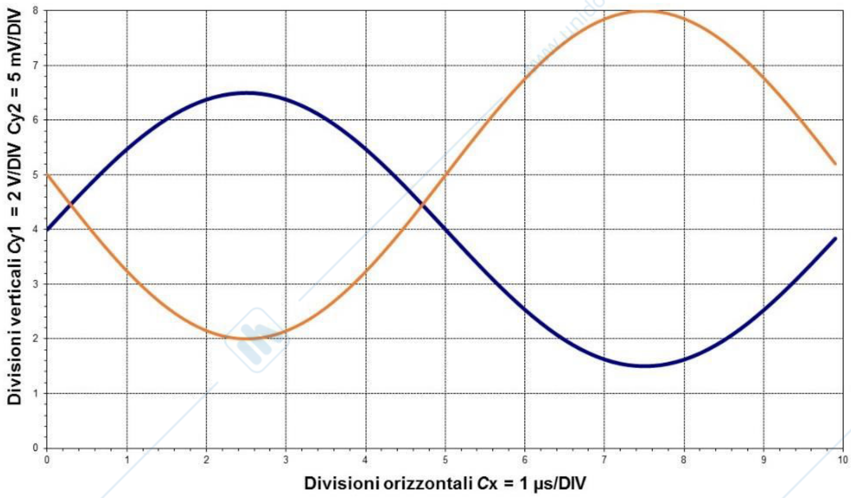


**3a)** Per visualizzare correttamente l'intera dinamica verticale del segnale $v_1$ è necessario impostare il CH1 dell'oscilloscopio con una deflessione verticale di 2V/DIV. Il disturbo è assolutamente invisibile su questa scala.

Per quanto riguarda il segnale $v_2$ si può impostare un'amplificazione verticale di 5 mV/DIV. I segnali vanno accoppiati in DC (indispensabile per visualizzare l'offset di 5 mV del secondo segnale).

Per quanto riguarda l'amplificazione orizzontale, è necessario visualizzare un periodo dei segnali a 100 kHz, con periodo 10 μs, scegliamo quindi **1 μs/DIV**. Poniamo il livello di 0 V a centro schermo per entrambi i canali.

Il **trigger viene prelevato su $v_1$**, anche se è presente un piccolo disturbo, in quanto è nettamente più alto di $v_2$ ed il disturbi è troppo piccolo per influenzare la misura. Scegliamo un **livello di 0 V e una pendenza positiva**, con **accoppiamento in DC**.



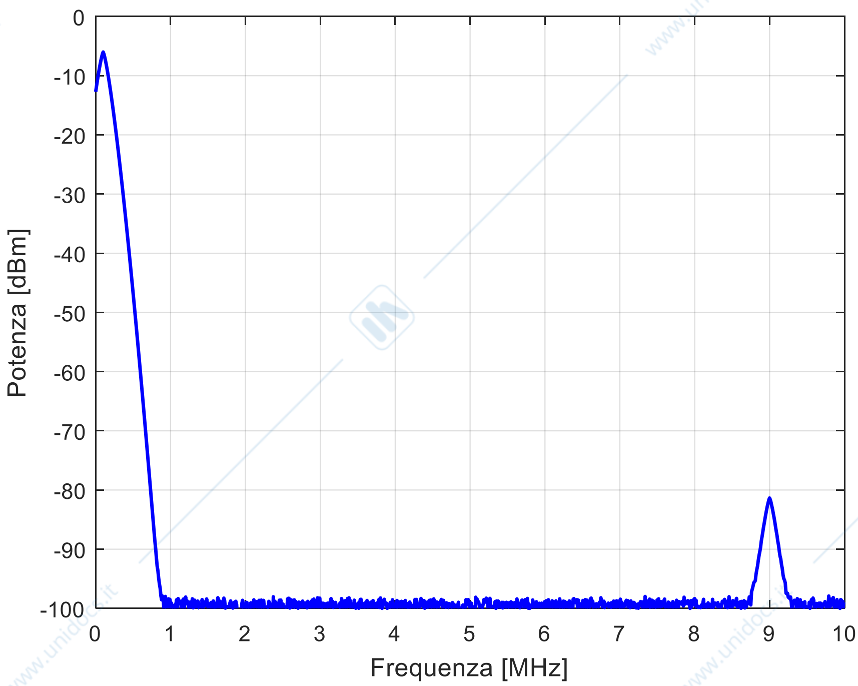

**3b)**

**3c)** L'analizzatore di spettro misura la potenza sulla sua impedenza pari a 50 Ω. Connettendo il segnale $v_1$ all'analizzatore di spettro, possiamo misurare due segnali di potenza:

$P$=(5 V)$^2$/(2·50 Ω) = 250 mW, corrispondenti a + 24 dBm
$P_{disturbo}$=(600 μV)$^2$/(50 Ω) = 7.2 nW, corrispondenti a -51.4 dBm

Dopo l'attenuazione di 30 dB otteniamo:
**$P_{100\ kHz}$=-6 dBm**
**$P_{9\ MHz}$=-81.4 dBm**

Per quanto riguarda le frequenze, dovendo visualizzare un segnale a 100 kHz e uno a 9 MHz, possiamo scegliere **$f_{start}$ = 0 Hz e $f_{stop}$ = 10 MHz.**
Per la scelta della *RBW* dobbiamo tenere in conto della distanza tra i segnali e del fondo di rumore. Impostando ***RBW* = 100 kHz** sicuramente i segnali saranno ben distinti ed il fondo di rumore vale (i calcoli sono in logaritmico:
**$P_N$(dBm)=**$kT$+$NF$+$RBW$= -174 dBm/Hz + 25 dB + 50 dBHz = **-99 dBm**
Dato che il fondo di rumore è nettamente inferiore al minimo segnale, confermiamo la scelta di RBW e impostiamo un ***reference level* a 0 dBm** con **10 dB/DIV**.




**3d)**

**Esercizio ___** *(continua)*

*[foglio addizionale per eventuale esercizio "lungo"]*

**INDICARE IL RICHIAMO IN FONDO ALLA PAGINA DELL'ESERCIZIO CORRISPONDENTE**