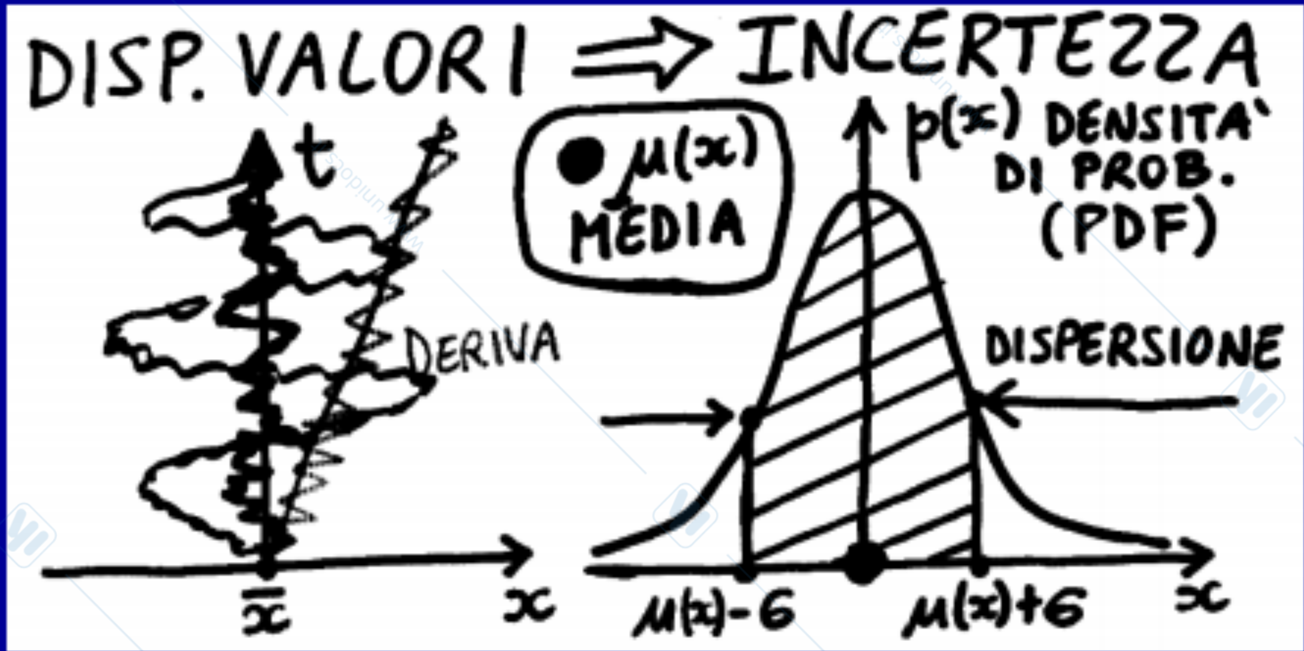
INCERTEZZA DI MISURA

Variabilità delle misure

Misure ripetute dello stesso parametro fisico non forniscono lo stesso valore



tendenza centrale ($\bar{x}$ o μ) e dispersione (σ)

L'incertezza di misura è la stima della dispersione dei valori "attribuibili" al misurando

Approccio statistico

La misurazione non è una scienza esatta

Le misure sono sempre affette da "fluttuazioni" o errori (almeno potenziali), mai perfettamente conoscibili, che si traducono in una naturale "indeterminazione" o **INCERTEZZA sul risultato di misura**

Occorre lasciare un approccio deterministico (si vorrebbero conoscere le fluttuazioni) in favore di un **approccio statistico** grazie al quale è possibile **stimare le fluttuazioni**

Incertezza di misura

La **variabilità** del risultato di una misura è analizzata grazie ai metodi consolidati della statistica (**varianza e deviazione standard**)

il risultato di misura dunque non è mai un unico numero "deterministico" ma un **intervallo di valori possibili** entro il quale il misurando può trovarsi con una data **probabilità** (e potrà anche trovarsi fuori dall'intervallo)

La **semiampiezza di un particolare intervallo** di valori (l'intervallo a ±1 deviazione standard dal valore centrale) è l'**incertezza di misura**

Teoria degli errori

La **teoria degli errori di misura** prevedeva che un misurando non potesse mai essere perfettamente conosciuto a causa degli inevitabili errori di misura (intrinseci in ogni metodo o strumento utilizzato per la misurazione)

NON CONOSCIBILE

Errore = Valore Misurato – Valore Vero

(concetto astratto)

INDETERMINATO!!!

VALORE NOTO

Tipi di errori

Errori sistematici: si presentano nella stessa entità ogni volta che si ripete la misura (*offset* o polarizzazione)

esempio: ogni volta che un peso di massa m viene posto su una bilancia digitale questa legge "sistematicamente" 100 g in più (*offset*) rispetto al valore m

Errori accidentali: si presentano in maniera diversa e "impredicibile" ogni volta che si ripete la misura (fluttuazione casuale a media nulla)

esempio: ogni volta che il peso di prima è posto sulla bilancia, il visualizzatore digitale mostra un valore diverso ($m + 100\text{ g} + \varepsilon_i$), ad esempio a causa del rumore elettronico sulla tensione di lettura inviata al *display* ($\Sigma\varepsilon_i=0$)

Problematiche

Errori sistematici ed errori accidentali non sono della stessa natura:

- i primi sono <u>componenti deterministiche</u> (e pertanto conoscibili e anche eliminabili)
- i secondi sono <u>componenti aleatorie</u> (stimabili in senso statistico e talora riducibili ma mai eliminabili del tutto)

Questi due tipi di errori non possono essere combinati/sommati in maniera corretta (si sommano solo le grandezze omogenee ma anche "logicamente" dello stesso tipo)

<u>es.</u>: lunghezza automobile ; calibro fucile ; profondità piscina

Errori → Incertezza

Date le incongruenze logiche della teoria degli errori, a fine anni '70 il CIPM incaricò un Gruppo di Lavoro di **definire procedure unificate per l'espressione dell'incertezza di misura**

Una **corretta analisi statistica della variabilità** di una misura consente di risolvere in maniera soddisfacente il problema di esprimere l'**incertezza standard di misura**
(parametro, valutato secondo procedure convenzionali, che esprime il nostro grado di non conoscenza del misurando)

2 categorie di stima dell'incertezza

A - stimata con metodi statistici (su un insieme, o campione, di misure ripetute)

B - stimata in altro modo (*e.g.* conoscenze a priori o proprietà dello strumento)

Richiami di probabilità → ppt. "Richiami di statistica"

$p \in [\,0 \text{ e } 1\,]$ (evento impossibile e evento certo)

X variabile casuale (VC) con valori $x \in \{\Re\}$

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$ PROBABILITA'

$p(x)$ funzione densità di probabilità (PDF)

La PDF descrive il processo casuale considerato assegnando la probabilità per i possibili valori d'uscita. Per una VC continua la "probabilità puntuale" è nulla mentre può non essere nulla la **probabilità di cadere in un intervallo di valori**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$$ normalizzazione della PDF

Richiami di statistica

Per X VC reale (possibili valori della misura) esistono degli stimatori che ci consentono di conoscere, in senso statistico, alcuni parametri caratteristici del processo casuale. In particolare MEDIA e VARIANZA permettono di stimare la tendenza centrale e la dispersione dei valori x associabili a X

MEDIA

$$\mu(x) = \mu_x = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,\mathrm{d}x$$

VARIANZA

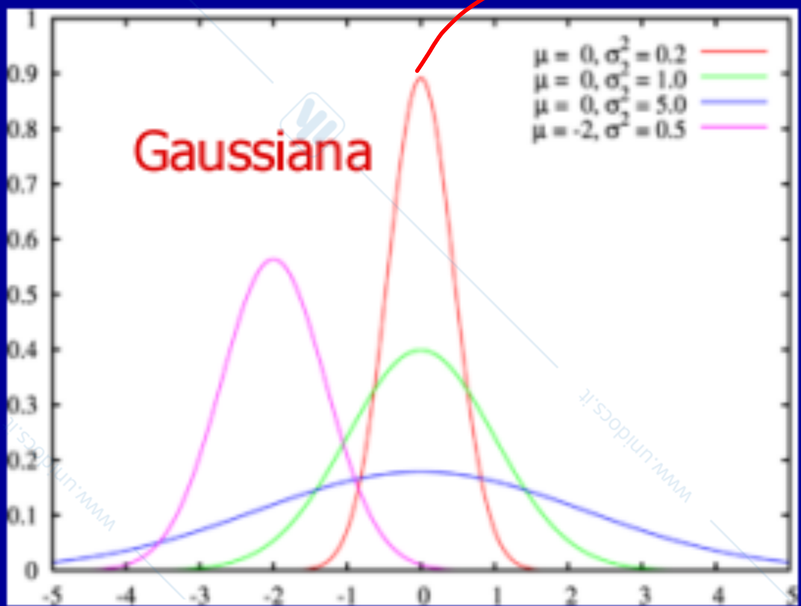
$$\sigma^2(x) = \sigma_x^2 = E\left\{[x - \mu_x]^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mu_x]^2\, p(x)\,\mathrm{d}x$$

$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$ **DEVIAZIONE STANDARD**

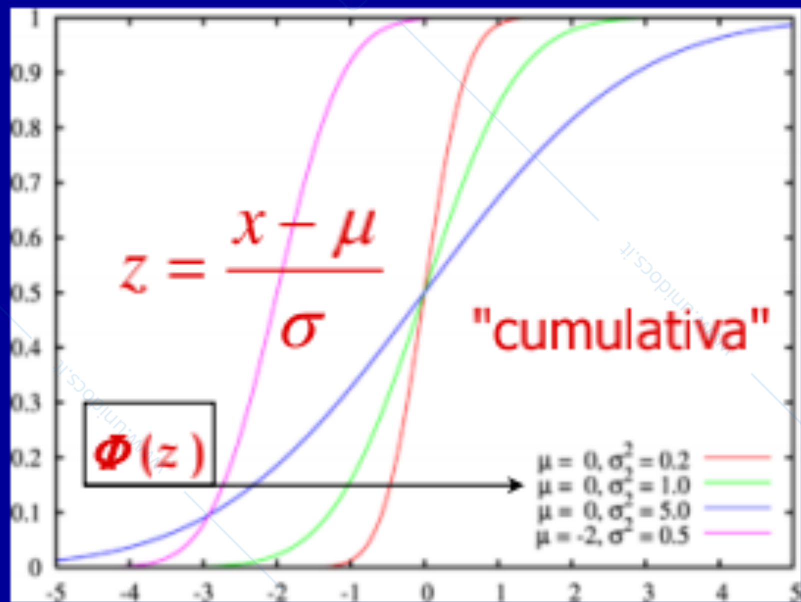
PDF normale o gaussiana

E' la PDF "più comune" per la descrizione della media di fenomeni casuali quali le misure (per il teorema del limite centrale la media di una VC tende ad avere una PDF gaussiana in una "approssimazione dei grandi numeri "):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{ -\frac{[x-\mu]^2}{2\sigma^2} \right\}$$

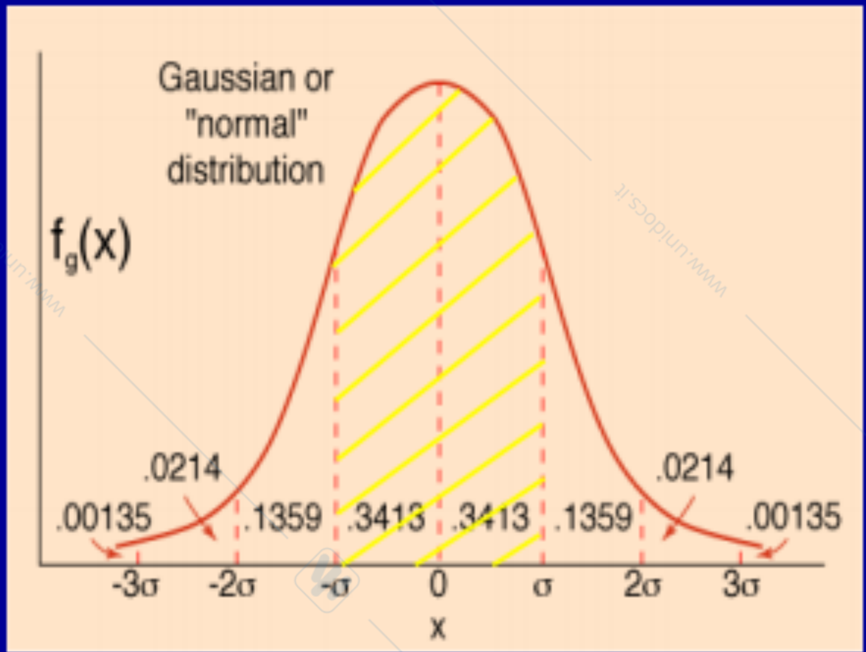


centro di prob. sul valor medio



Probabilità di "cadere" in un intervallo

Integrando la PDF gaussiana tra due valori sull'asse reale si trova la **probabilità** che il risultato (misura) "cada" (sia) nell'intervallo compreso tra i due valori considerati



Le AREE sottese dalla curva PDF sono le probabilità di avere valori (misure) in un dato intervallo di valori sull'asse reale

Lontano dalla media μ, rispetto alla larghezza σ, la PDF diviene molto bassa e dunque le aree sottese molto piccole (misure improbabili)

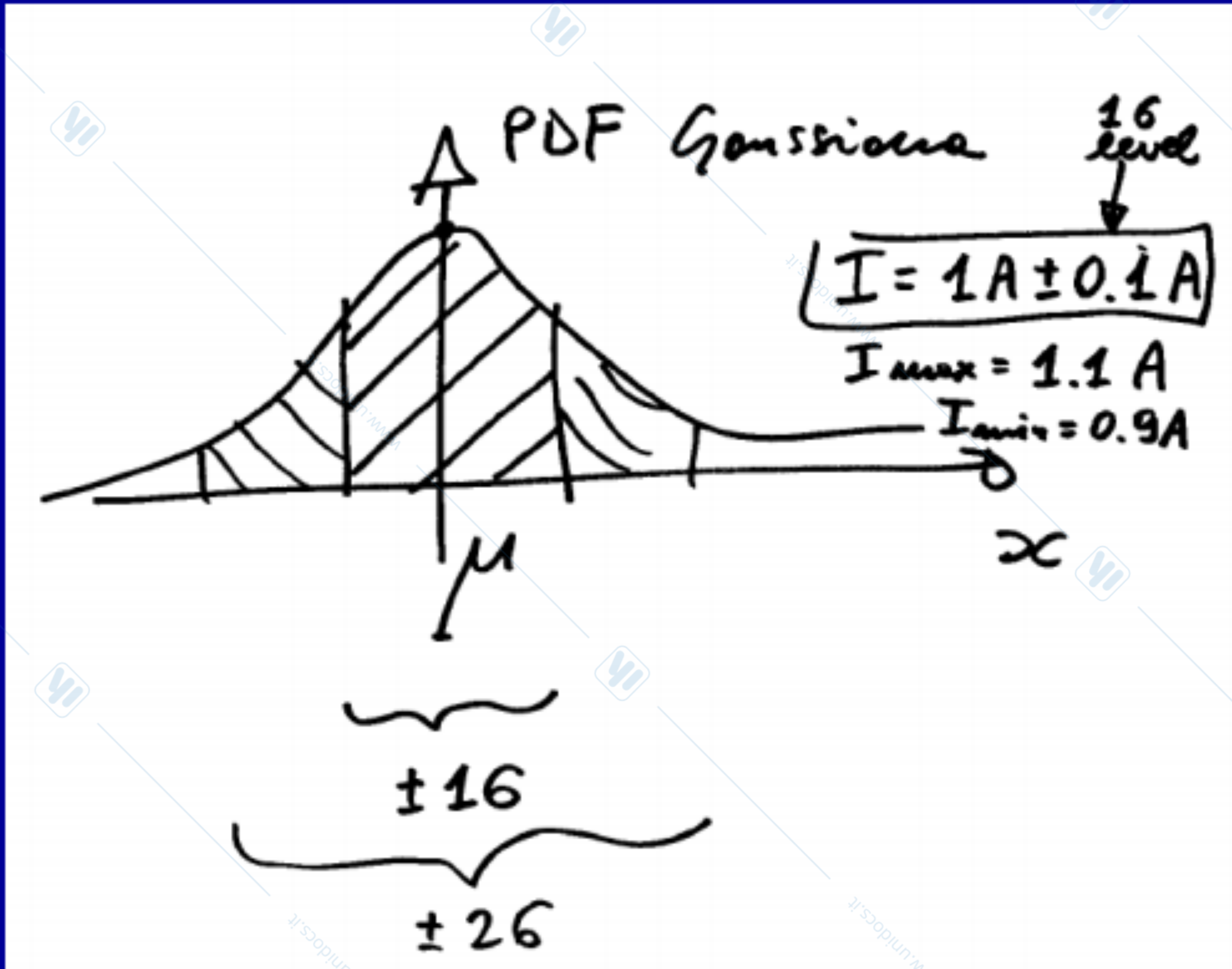
Livelli di confidenza
$$\begin{cases} 1\sigma & 68.27\% \cong 68.3\% \sim 68\% \\ 2\sigma & 95.45\% \cong 95.5\% \sim 95\% \\ 3\sigma & 99.73\% \cong 99.7\% \end{cases}$$

intervallo di confidenza $\cong (-\sigma, +\sigma)$

$$e.g.\ P\left[\,(\mu_x - \sigma_x) \le x \le (\mu_x + \sigma_x)\,\right] \cong 68.3\%$$

prob. di stare nell'intervallo di confidenza

Esempio di PDF gaussiana



misura di corrente (di valore nominale 1 A e incertezza 0.1 A)

Incertezza standard

DEFINIZIONE MOLTO IMPORTANTE

Per qualsiasi misura si definisce:

incertezza standard o scarto tipo, con simbolo "*u*" dall'inglese *uncertainty*, una stima della deviazione standard σ, radice quadrata della varianza σ^2, **previsto per il valore di misura**

A seconda del metodo impiegato per la stima di $u(\cdot)$ classificheremo questa incertezza come di categoria A o B

STIMA DI CATEGORIA A

Media campionaria

Variabile X [misurando] nota attraverso n determinazioni [misure] x_k (k=1,2,…,n) ottenute <u>in condizioni di ripetibilità</u>:

STIMA del valor medio della (intera) popolazione, $\mu(x)$, attraverso lo stimatore

MEDIA CAMPIONARIA → statistica (operatore) che si applica a dei numeri casuali x_k

è sempre un numero uguale → $\bar{x} = \bar{x}_k \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

$$\mu(x) = \mu_x \stackrel{\Delta}{=} E[x] \stackrel{S}{=} \bar{x} = \bar{x}_k$$

significa uguale nel senso della stima

$\stackrel{S}{=}$ uguale nel senso della Stima

Dimostrazione

non chiede le dimostrazioni

Dim.

l'operatore VALORE ATTESO è lineare

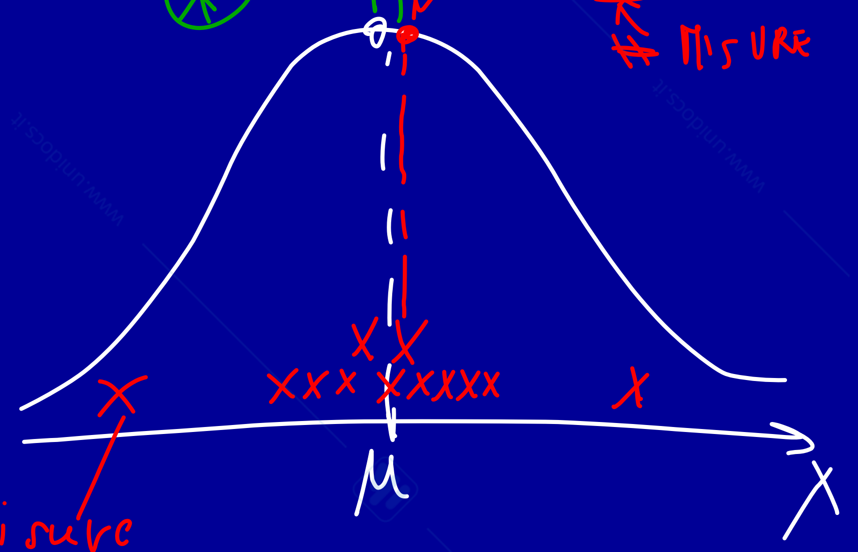
$\bar{X}$ = media campionaria

$$\boxed{E\{\bar{x}\}} = E\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\} = \frac{1}{n}E\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\right\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\{x_k\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\{x\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu(x) = \frac{1}{n} n\mu(x) = \boxed{\mu(x)}$$

Valor medio

VALOR MEDIO → $\bar{X} = \frac{1}{12}\sum X_k$

12 MISURE



⊛ non è propr. uguale al valor medio μ, ma è un valor medio STIMATO dalla media campionaria

Vogliamo vedere se con la media campionaria otteniamo la stima migliore del valor medio

Dispersione della media

Per misure ripetute di una grandezza X la miglior stima del valore di misura x coincide con il valor medio delle misure ripetute:

$$x = \bar{x} = \bar{x}_k \quad \text{VALORE DI MISURA}$$

Per determinare la dispersione (incertezza) sul valore di misura dovremo valutare la dispersione, almeno potenziale, della variabile casuale $\bar{x}$ ("valore di misura"). Dunque cercheremo $\sigma(\bar{x})$ che, come vedremo, risulta funzione di $\sigma(x)$ e del numero n di misure ripetute

Queste stime ci servono per ricavare la curva di distr. senza fare un sacco di misure

Varianza campionaria

operatore che ci indicherà che la media campionaria è la migliore stima della misura

STIMA della varianza della (intera) popolazione, $\sigma^2(x)$, attraverso lo stimatore

VARIANZA CAMPIONARIA

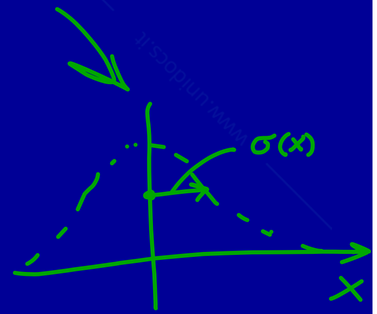
Stima la varianza della popolazione

$$s^2(x) = s^2(x_k) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2(x) = \sigma_x^2 \stackrel{\Delta}{=} E\left[(x-\mu)^2\right] \stackrel{S}{=} s^2(x) = s^2(x_k)$$

inoltre: $s^2(x) = \dfrac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - n\bar{x}^2\right]$

metodo alternativo di calcolo varianza camp.



Alternativa di calcolo per la varianza

La varianza campionaria di n valori x_k si può anche calcolare come somma dei singoli valori, elevati al quadrato, meno n volte il valor medio, al quadrato, il tutto diviso per n-1:

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - n\bar{x}^2\right]$$

DIM: $\sum (x_k - \bar{x})^2 = \sum \left(x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2\right) =$

$$= \left(\sum x_k^2\right) - 2\bar{x}\left(\sum x_k\right) + n\bar{x}^2 =$$

$$= \left(\sum x_k^2\right) - n\bar{x}^2$$

$n\bar{x}$

Se non ci fosse '-1' potrei calcolare la varianza anche con 1 solo valore

↳ non ha senso

Gradi di libertà della stima

Nella varianza campionaria, il denominatore
n-1=ν è il numero di gradi di libertà

Vediamo 3 validi motivi per cui è opportuno dividere la somma degli n scarti quadratici, che compare nell'espressione della varianza campionaria, per n-1 e non per n

1) Non ha alcun senso calcolare la varianza per un campione che contenga un solo dato (n=1). In tale caso, dividendo per n-1, otteniamo come $s^2(x)$ una forma indefinita del tipo 0/0

2) Nella formula di $s^2(x)$ calcoliamo di fatto gli scarti quadratici dalla media campionaria, $\bar{x}$ (nota), e non dalla media della popolazione, μ_x, che è ignota: dunque degli n scarti quadratici sommati solo n-1 sono tra loro indipendenti

3) Si dimostra che il valore atteso della varianza campionaria, con l'n-1 al denominatore, è la varianza della popolazione:

$$E\{ s^2(x) \} = \sigma^2(x)$$

lo stimatore è corretto
o non polarizzato

Dimostrazione

questa ipotesi costituisce un limite sul calcolo dell'incertezza

Hp. Si ipotizza che i dati non sono correlati tra loro

DIM: $\boxed{E\{s^2(x)\}} = \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - 2\bar{x}\sum_k x_k + n\bar{x}^2\right\} =$

Valore atteso dell'operatore varianza campionaria

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - \frac{2}{n}\sum_k x_k \sum_k x_k + n\left(\frac{1}{n}\sum_k x_k\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - \frac{1}{n}\sum_k x_k \sum_k x_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - \frac{1}{n}\sum_k x_k^2 - \frac{1}{n}\sum_{k\neq j} x_k x_j\right\} =$$

questa proprietà vale solo con questa ipotesi

$E\{x_k x_j\} = E\{x_k\}E\{x_j\}$ se x_k e x_j sono statisticamente indipendenti

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sum_k E\{x_k^2\} - \frac{1}{n}\sum_{k\neq j} E\{x_k\}E\{x_j\}\right] =$$

$\boxed{x_k = \mu_x + (x_k - \mu_x)}$

questo è sempre vero

$\boxed{E(x_k^2) = \mu_x^2 + \sigma_x^2}$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right) n\left[\mu^2(x) + \sigma^2(x)\right] - \frac{n(n-1)}{n}\mu^2(x)\right] =$$

serve quindi per essere una corretta stima della varianza

$$= \mu^2(x) + \sigma^2(x) - \mu^2(x) = \boxed{\sigma^2(x)}$$

dimostrazione sul quad.

Incertezza di cat. A (1/2)

Per determinare l'incertezza sul valore di misura valutiamo la deviazione standard della variabile casuale $\bar{x}$: → Varianza della media

$\bar{x}$ è, almeno potenzialmente, una variabile casuale in quanto il suo valore specifico dipende dal particolare campione di dati considerato. Se disponessimo di m diversi insiemi di n misure ripetute e per ciascuno calcolassimo la $\bar{x}$ corrispondente, otterremo m valori di $\bar{x}$ differenti tra loro, la cui varianza è:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_k x_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_k \sigma^2(x_k) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2(x) = \frac{\sigma^2(x)}{n}$$

Sempre Hp. misure diverse tra loro

Varianza della media campionaria

La miglior stima di $\sigma^2(\bar{x})$ si ottiene quindi come:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2(x)}{n} \stackrel{s}{=} \frac{s^2(x)}{n} \quad \text{e} \quad \sigma(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

Incertezza di cat. A (2/2)

Si definisce **incertezza di categoria A** la dispersione del valor medio delle misure ripetute, calcolabile come

$$u_A(x) = s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}$$

Nel caso di incertezza solo di categoria A, il risultato di misura è allora $x = \bar{x} \pm s(x)/\sqrt{n}$ con una qualità della misura che migliora (l'incertezza diminuisce) al crescere di n

Incertezza relativa

Parleremo di **incertezza relativa** quando normalizziamo il valore di incertezza tipo al valore di misura

→ Se c'è l'unità di misura
↳ l'incertezza è assoluta
→ se ~~NON~~ c'è l'unità di misura → incertezza relativa

$$u_r(y) = \frac{u(y)}{\overline{y}}$$

[1] numero puro!

Incertezze relative anche di grandezze diverse (non omogenee) possono essere confrontate direttamente fra loro.
L'inc. rel. indica, indipendentemente dal valore e tipo del misurando, il grado di conoscenza che abbiamo raggiunto sul valore di misura

Incertezza estesa

Quando si vuole definire un intervallo di valori, attorno al valore di misura $y = \bar{y}$, "all'interno del quale si ritiene che il misurando debba cadere con un certo livello di confidenza (probabilità P)", si utilizza l'**incertezza estesa** → non si utilizza sempre l'incertezza tipo

$$U(y) = k\,u(y)$$ → ma un suo multiplo per fornire un livello di copertura

k **fattore di copertura**

valori tipici k = "1"; 2; 3 (68%; 95%; 99.7%)

Cifre significative per l’incertezza

nuova normativa

L’incertezza si esprime con [redacted] due cifre significative: esiste infatti anche un’incertezza dell’incertezza e di norma non ha senso impiegare più di due cifre significative per $u(x)$

Nei calcoli e passaggi intermedi, tuttavia, conviene conservare anche più di due cifre significative

Esercizio: calcolo inc. cat. A (1/5)

Si dispone di $n = 10$ misure ripetute V_k di una tensione incognita V.

Calcolare V e $u_A(V)$

k [1]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_k [V]	7	9	8	6	7	5	7	8	6	7

Esercizio: calcolo inc. cat. A (2/5)

media campionaria

$$V = \overline{V} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{1}{10}\,70\text{ V} = 7\text{ V}$$

1a

$$u_A(V) = \frac{s(V)}{\sqrt{n}} =$$

2a

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(V_k - \overline{V}\right)^2} =$$

3a

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} V_k^2\right) - n\overline{V}^2\right]}$$

Esercizio: calcolo inc. cat. A (3/5)

2ª espressione per $u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{N}\left(V_k - \overline{V}\right)^2}$

Calcoliamo prima gli scarti $\left(V_k - \overline{V}\right)$

$\left(V_k - \overline{V}\right)$[V]	0	2	1	-1	0	-2	0	1	-1	0

per poi ricavare

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10\times 9}(0+4+1+1+0+4+0+1+1+0)\,\mathrm{V}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{12}{90}\,\mathrm{V}^2} \cong 0.37\ \mathrm{V}$$

Esercizio: calcolo inc. cat. A (4/5)

3ª espressione per $u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_{k=1}^{N} V_k^2\right) - n\overline{V}^2\right]}$

si calcola $\sum_{k=1}^{N} V_k^2 = 502\ \mathrm{V}^2$ e $\overline{V} = 7\ \mathrm{V}$

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10\times 9}\left[502\ \mathrm{V}^2 - 10\times 49\ \mathrm{V}^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{12}{90}\ \mathrm{V}^2} \cong 0.37\ \mathrm{V}$$

(le 2 formule usate sono equivalenti)

Esercizio: calcolo inc. cat. A (5/5)

$$1^a \text{ espressione per } u_A(V) = \frac{s(V)}{\sqrt{n}}$$

dobbiamo prima conoscere o calcolare la radice della varianza campionaria (dev.st. camp.)

$s(V) = 1.1547$ V e poi dividere per $\sqrt{n}$

$$u_A(V) = \frac{1.1547 \text{ V}}{\sqrt{10}} \cong 0.37 \text{ V}$$

MA perché 0.365148… = 0.37 ?

E se fosse stato 0.364321… ? → arrotondo sempre con 0,37 (per eccesso)

Cifre significative nel risultato di una misura

N.B max 2

Con i numeri dell'esercizio precedente:

$V = 7.00\ \text{V} \pm 0.37\ \text{V}$ oppure $V = 7.00(37)\ \text{V}$

notazione usabile, ma sconsigliata per l'incertezza tipo

notazione compatta

Altro esempio: $\overline{V}$=5289 V e $u(V)$=300 V=3.0×10^2 V

$V = 5290\ \text{V} \pm 300\ \text{V} = 529(30)\times10^1\ \text{V}$

nella parentesi non si mettono virgole, ma solo 2 cifre

E se fosse $u(V)$=0.37 V come nel caso precedente?

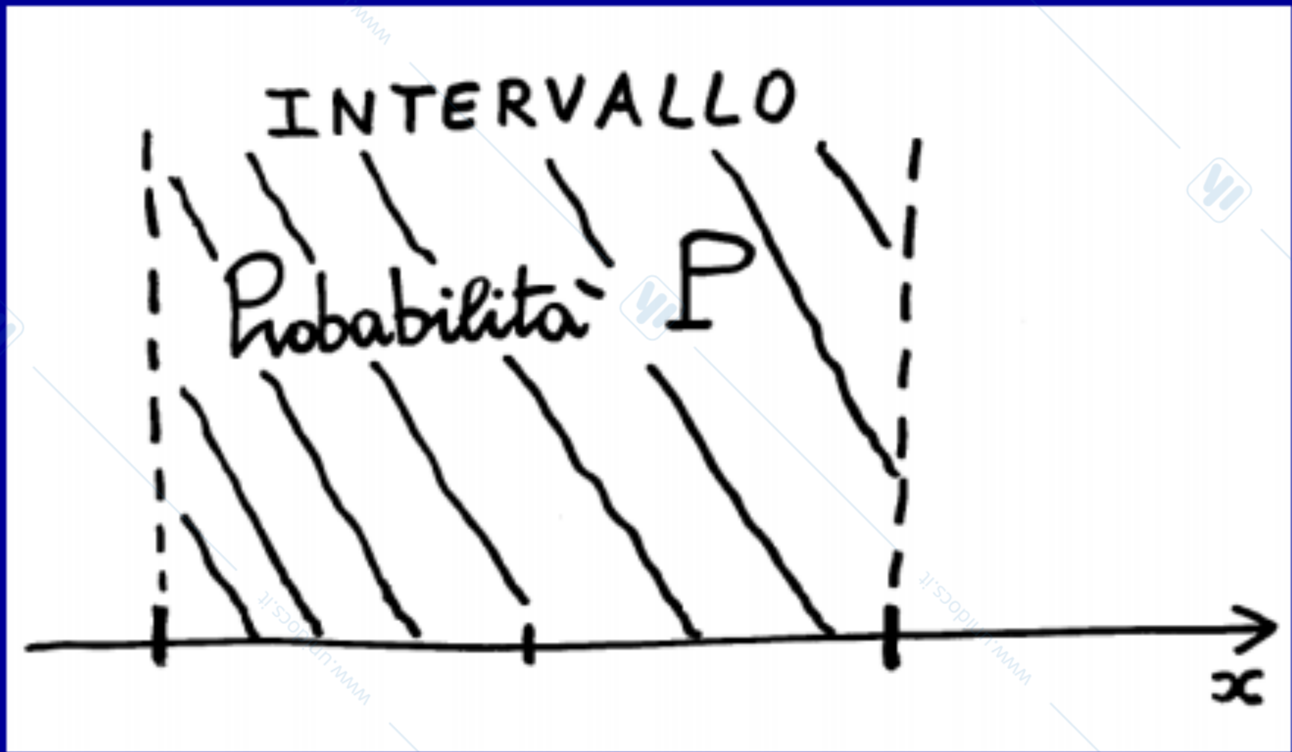
$V = 5289.00\ \text{V} \pm 0.37\ \text{V}$ oppure $V = 5289.00(37)\ \text{V}$

Es. $m = 72{,}3$ kg $u(m) = 1{,}1$ kg $m = 72{,}3(11)$ kg oppure $m = 723(11)\cdot10^2$ g

Incertezza di categoria B

potrebbe non avere sempre una sol. univoca

Si basa sulla definizione "a priori" di un opportuno intervallo di valori entro il quale si suppone debbano cadere i valori del misurando (con una data probabilità)



Es. V_{rete}

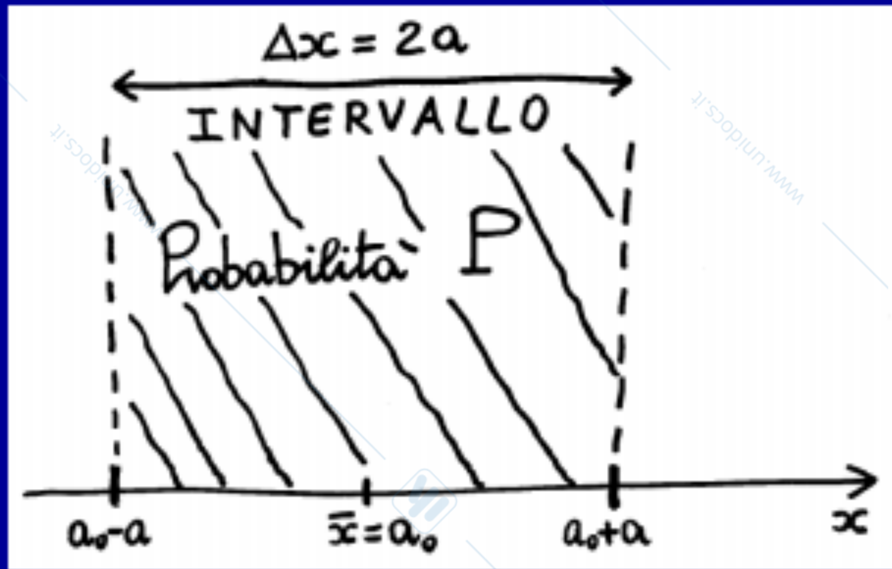
Parametri dell'intervallo

L'intervallo fissato è tipicamente centrato attorno al **valor medio**

$$\bar{x} = a_0 = \frac{(a_0 + a) + (a_0 - a)}{2}$$

e ha una piena larghezza

$$\Delta x = (a_0 + a) - (a_0 - a) = 2a$$



Alla larghezza Δx sarà legata l'incertezza della misura

Stima dell'incertezza di categoria B

3 PASSI:

(1) → (2) → (3)

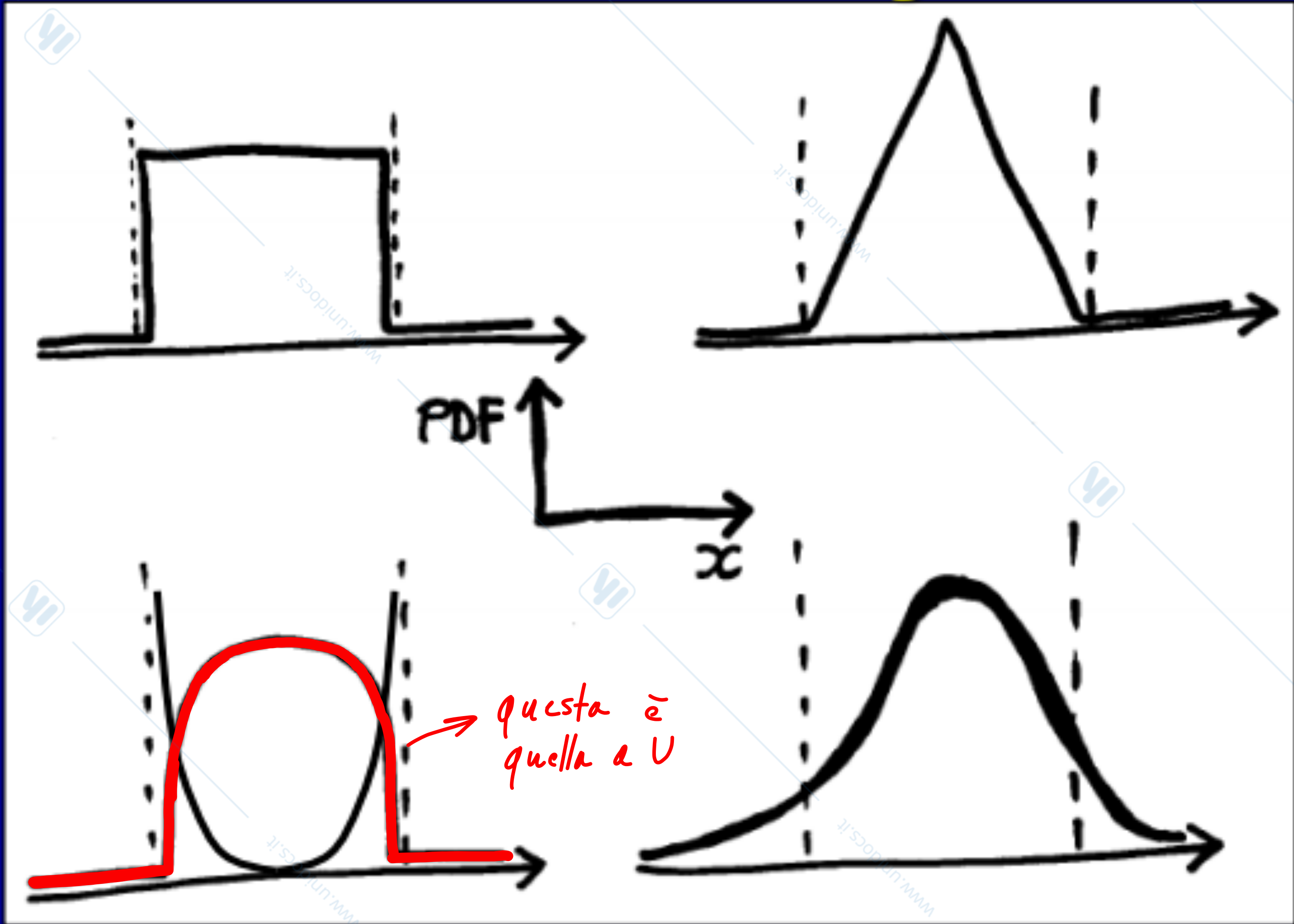
INTERVALLO → **PDF** → $\mu \quad \sigma$

1) definito un intervallo di categoria B
2) si associa una densità di probabilità (PDF)
3) di questa si calcolano media, varianza e deviazione standard

Esempi di PDF comuni

uniforme

triangolare



a "U"

gaussiana

Scelta di intervallo e PDF

→ vari metodi x arrivarci

Tanto la larghezza dell'intervallo quanto la PDF ad esso associata si scelgono sulla base di:

- precedenti conoscenze o dati di misura
- esperienza sul comportamento del misurando
- specifiche dei costruttori di materiali e strumenti coinvolti nella misura
- dati di calibrazioni
- informazioni da articoli scientifici/tecnici
- incertezza sui parametri di riferimento (presa dai manuali o da altre fonti)

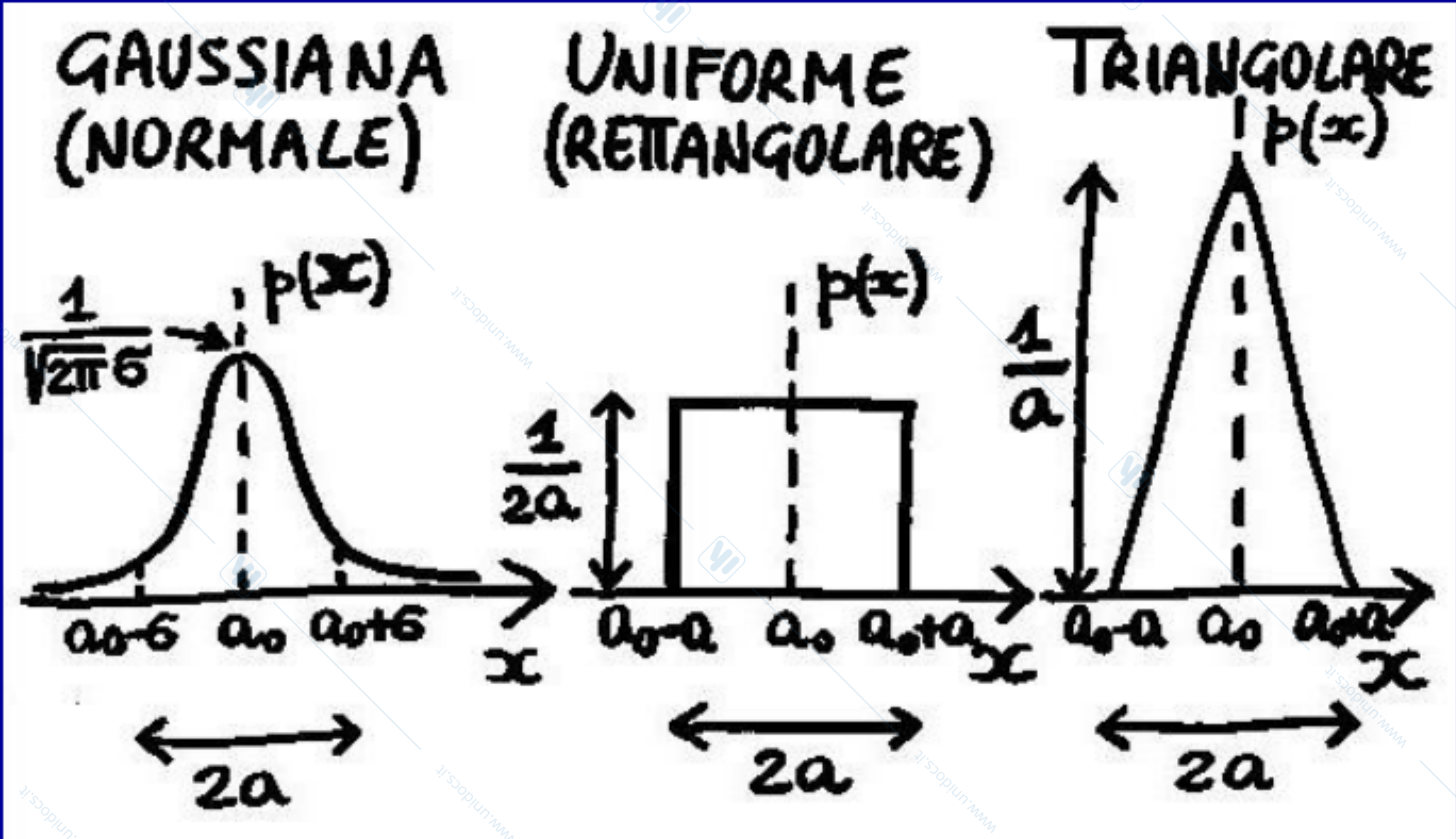
Stima di $u_B(x)$

Quando si dispone di una PDF per la grandezza x, è possibile calcolare $\mu(x)$ e $\sigma(x)$ che danno, rispettivamente, il **valore di misura** e la sua **incertezza**:

$$x = x_{MIS} = \mu(x)$$

$$u_B(x) = INC_B(x) = \sigma(x)$$

PDF più comuni



PDF normale

Gaussiana

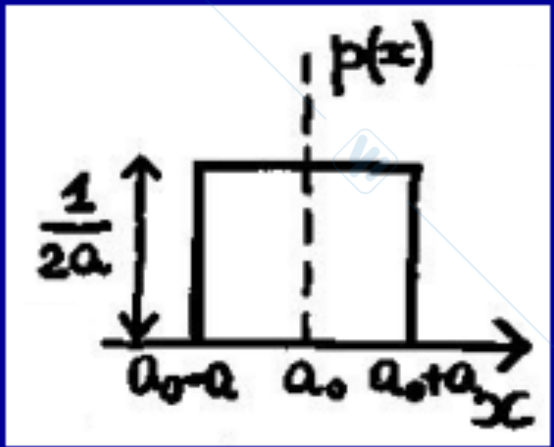
Già si dispone di $\mu(x)$ e $\sigma(x)$, dalla espressione della PDF. Occorre ricordare, o calcolare, che:

1σ *level*: $P[\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma] \approx 68.3\%$

2σ *level*: $P[\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma] \approx 95.5\%$

3σ *level*: $P[\mu-3\sigma \le x \le \mu+3\sigma] \approx 99.7\%$

PDF uniforme (1/2)



$\Delta x = 2a$

scrittura formale della distribuzione

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < a_0 - a \\ 1/2a & a_0 - a \le x \le a_0 + a \\ 0 & x > a_0 + a \end{cases}$$

funzione a tratti

E' immediato verificare che:

$$\mu(x) = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, p(x) \, \mathrm{d}x = a_0$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

PDF uniforme (2/2)

media del valore atteso

$$\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0-a}^{a_0+a} x \frac{1}{2a}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{a_0-a}^{a_0+a} = \frac{1}{2a}\frac{2a_0a+2a_0a}{2} = a_0$$

varianza

$$\sigma^2(x) = E\left[(x-\mu(x))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu(x))^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{a_0-a}^{a_0+a} (x-a_0)^2 \frac{1}{2a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\left[\frac{(x-a_0)^3}{3}\right]_{a_0-a}^{a_0+a} =$$

ossia non dipende dalla media

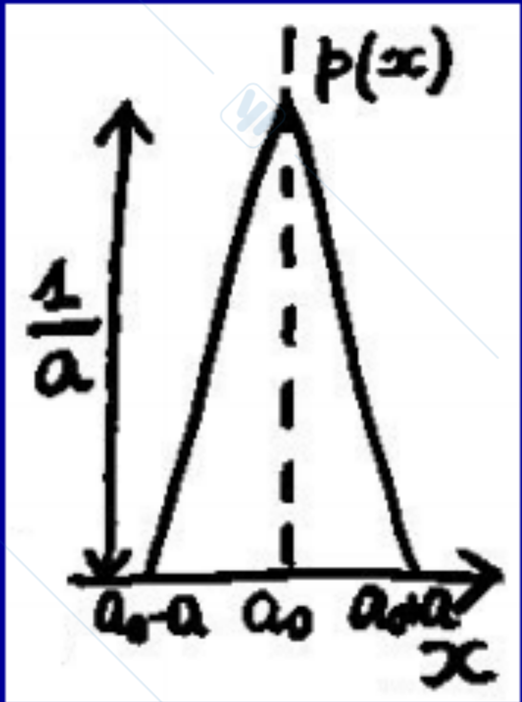
$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a^3}{3} - \left(-\frac{a^3}{3}\right)\right] = \frac{a^2}{3} = \frac{(\Delta x)^2}{12}$$

non dipende da a_0

$$\sigma_{\mathrm{UNI}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

deviazione

PDF triangolare



$$\mu(x) = a_0$$

$$\sigma^2(x) = \frac{a^2}{6} = \frac{(\Delta x)^2}{24}$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{24}}$$

A pari larghezza Δx, si ha naturalmente che

$$u_{B,\text{triangolare}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{24}} < u_{B,\text{uniforme}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

infatti <u>la PDF$_{Tri}$ è "meno dispersa" della PDF$_{Uni}$</u>

Altri metodi di stima di $u_B(x)$ (1/2)

- Si calcola $u_B(x)$ partendo dalla conoscenza di un **intervallo di confidenza con probabilità P**:

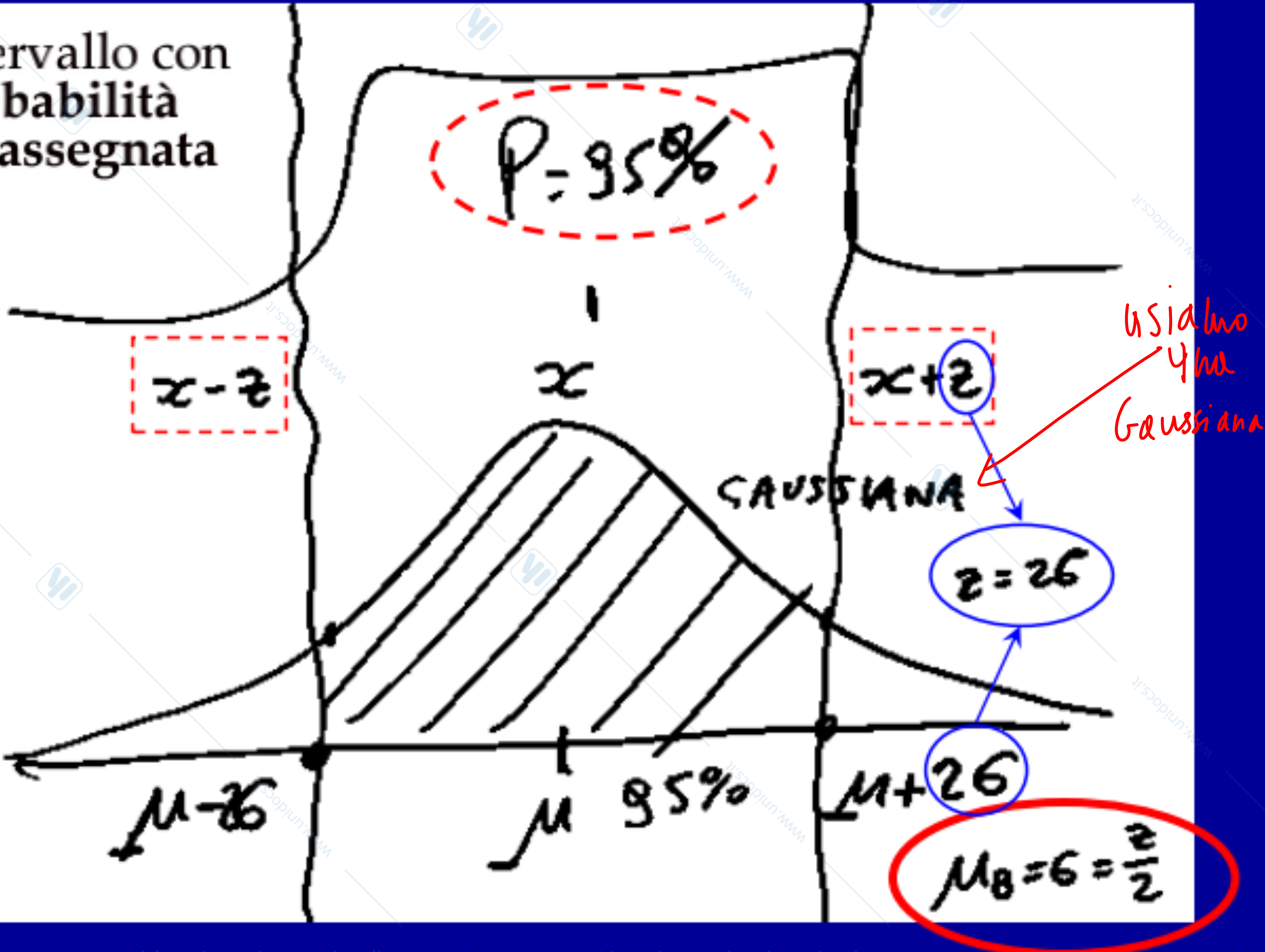
  si usa PDF normale con confidenza P, centrata sul valore centrale dell'intervallo, e si stima
  $u_B(x) = \sigma(x) = \sigma_x$ Es. V_{rete}

- Si calcola $u_B(x)$ partendo da conoscenza di una **INCERTEZZA ESTESA ($U_B = k\, u_B$)**:

  già si conosce il fattore di copertura k
  e quindi si ricava $u_B(x) = U_B(x)/k$ Es. …

Altri metodi di stima di $u_B(x)$ (2/2)

Intervallo con **Probabilità preassegnata**



Misure dirette e indirette

\+ contributi di incert.

MISURE DIRETTE:

$y = x$ *e.g.:* misura di V con un voltmetro

$u^2_C = u^2_A + u^2_B$ **Incertezza Composta**

→ si sommano tutti quadraticamente → consideremo quindi la somma di varianze

MISURE INDIRETTE:

INC = ???

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$

$P = RI^2$ *misura ottenuta da R e I (no wattmetro)*

$P = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]I^2 = f(I, R_0, \alpha, T)$

Misure indirette (definizioni)

Misurando $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ **ricavato** **"indirettamente"** dalla conoscenza di N altre grandezze (**parametri di ingresso**)

La funzione $f(X_i)$ prende il nome di **relazione funzionale (equazione della misura)**

Y e X_i sono le variabili mentre y e x_i i valori

Naturalmente **dalla** conoscenza dei **valori degli ingressi** è possibile ricavare il **valore dell'uscita**: $\boxed{y=f(x_i)}$

Saranno invece le **incertezze degli ingressi, opportunamente "combinate"**, a fornire l'**incertezza dell'uscita**: $\boxed{u_C(y)=\Phi[u(x_i);f(\cdot)]}$

INC composta u_C in misure ind. (1/5)

linearizziamo

Valori della relazione funz. (equazione della misura)

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

In un intorno del valore di misura (punto di lavoro)

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)$$

è possibile sviluppare in serie di Taylor (1° ordine) la relazione funzionale f:

$$\boxed{(y-\bar{y}) \cong \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\bar{y}} \overbrace{(x_1-\bar{x}_1)}^{\text{SCARTI}} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)_{\bar{y}} (x_N-\bar{x}_N)}$$

Scarto dell'uscita dal suo valor medio $\cong \ldots$

INC composta u_C in misure ind. (2/5)

Definiamo **coefficienti di sensibilità**

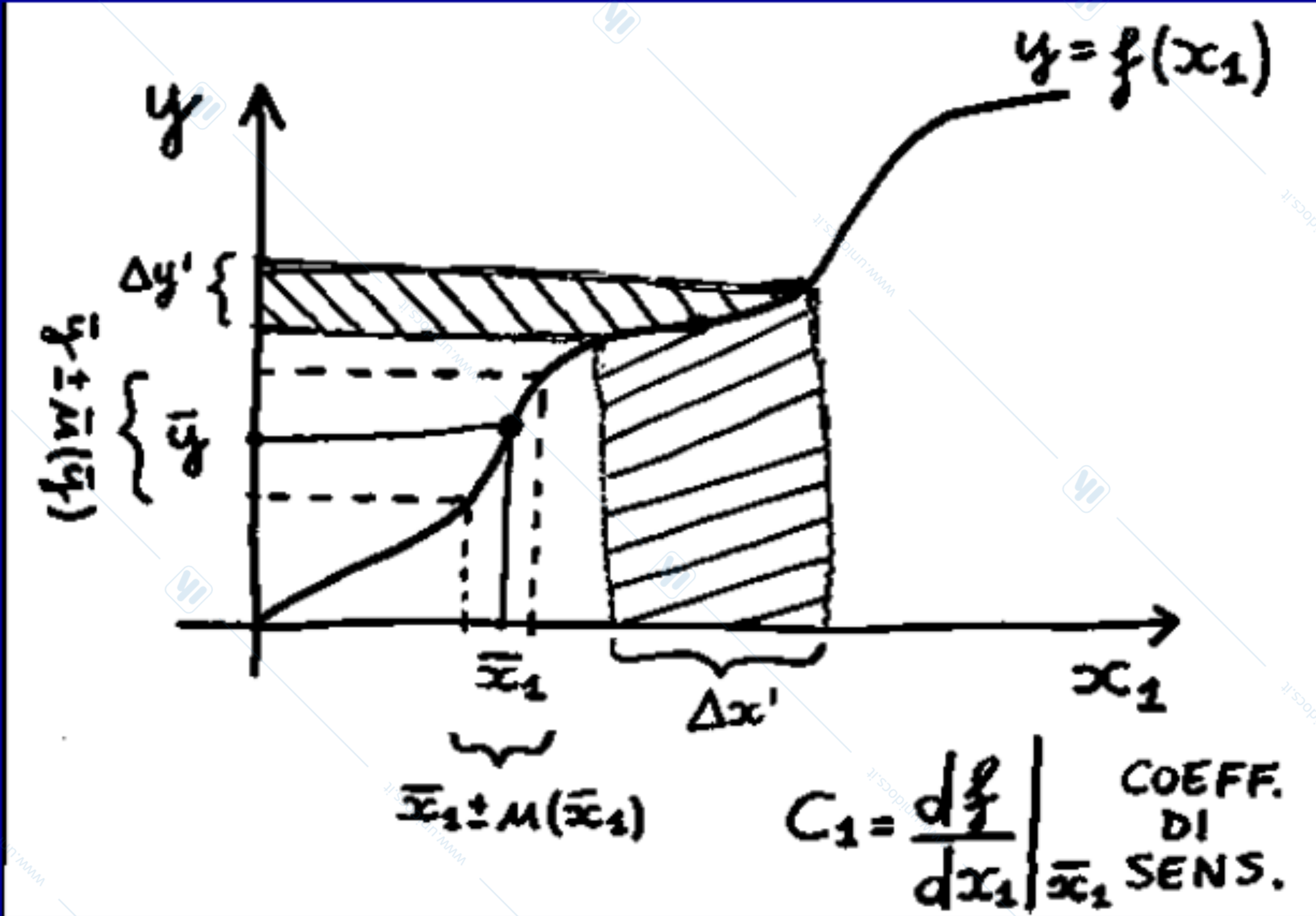
$$\boxed{c_i \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\overline{y}}}$$

coeff. "costante" una volta stabilito il punto di lavoro

le derivate prime parziali della relazione funzionale rispetto alla variabile x_i

c_i indica come varia il misurando Y in corrispondenza di una variazione del parametro X_i di dipendenza

INC composta u_C in misure ind. (3/5)



INC composta u_C in misure ind. (4/5)

$$E\left\{(y-\bar{y})^2\right\} \cong E\left\{\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i-\bar{x}_i)\right]^2\right\}$$

→ guarda ppt.

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)\right\} =$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\bar{y}}\right]^2(x_i-\bar{x}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)\right\}$$

$$E\left\{(x_i-\bar{x}_i)^2\right\} \stackrel{\Delta}{=} \sigma^2(x_i) = u^2(x_i)$$ VARIANZA o INCERTEZZA²

$$E\left\{(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)\right\} \stackrel{\Delta}{=} \sigma^2(x_i,x_j) = u(x_i,x_j)$$

ci dice quanto le 2 var. x_i, x_j sono correlate tra loro

COVARIANZA tra x_i e x_j

INC composta u_C in misure ind. (5/5)

(*espressione con le covarianze*)

$$\boxed{u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) u(x_i, x_j)}$$

Somma pesata, con pesi c_i^2, delle incertezze (varianze) degli ingressi x_i più la somma dei termini di covarianza, sempre pesati con le derivate prime della relazione funzionale

Risultato della misura

Il **valore di misura** della grandezza Y è:

$$y = \bar{y} = f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N\right)$$

con una **incertezza composta**:

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i, x_j)}$$

In generale ciascuna incertezza $u(x_i)$ è:

$$u_C(x_i) = \sqrt{u_A^2(x_i) + u_B^2(x_i)} = \sqrt{s^2(\bar{x}_i) + u_B^2(x_i)} =$$

$$= \sqrt{\frac{s^2(x_i)}{n} + u_B^2(x_i)}$$

Coefficienti di correlazione

x_i e x_j sono correlate → $r_{ij} = 1$

$r_{ij} = -1$ ← x_i e x_j sono anticorrelate
↳ es. una sale l'altra scende

normalizzazione della covarianza per la deviaz. standard delle variabili

$$\boxed{r_{ij}(x_i, x_j) \overset{\Delta}{=} \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \in [-1, +1]}$$

$$r_{ij} \overset{\Delta}{=} \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_i \sigma_j}$$

STAT.

$r_{ij} = 0 \Leftarrow$ x_i e x_j **statisticamente indipendenti**

indica correlazione

↳ noi vedremo nella maggior parte dei casi $r_{ij} = 0$

Utilizzando la definizione di r_{ij}, si può scrivere:

(*espressione con i coefficienti di correlazione*)

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j r_{ij} u(x_i) u(x_j)}$$

INC dell'uscita si ricava da INC ingressi e da f o c_i (e anche r_{ij})

Variabili statisticamente indipendenti

Nel caso di variabili d'ingresso **statisticamente indipendenti** tutti i termini di covarianza e i coefficienti di correlazione sono nulli ($r_{ij} \equiv 0$ tra le variabili x_i e x_j con $x_i \neq x_j$) e pertanto:

formula che mi da l'incertezza se non ci sono correlazioni tra le variabili ($r_{ij}=0$)

$$\boxed{u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}}$$

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$$

combinazione di varianze

somma pesata

Casi particolari di rel. funzionali (1/2)

Casi particolari di relazioni funzionali per variabili d'ingresso X_i statisticamente indipendenti:

- Misurando somma o differenza delle x_i:

$$\bar{y} = n_1\bar{x}_1 \pm \ldots \pm n_i\bar{x}_i \pm \ldots \pm n_N\bar{x}_N$$

Se la relazione è già lineare

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} n_i^2 u^2(x_i)$$

incertezze assolute

le incertezze si sommano quadraticamente

Se inoltre $n_i = 1$ per ogni i, cioè la relazione funzionale è una somma e differenza semplice: $u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)}$

Casi particolari di rel. funzionali (2/2)

- Misurando **prodotto** o **rapporto** delle x_i :

$$\underbrace{\bar{y} = \bar{x}_1^{n_1} \times \ldots \times \bar{x}_i^{n_i} \times \ldots \times \bar{x}_N^{n_N}}_{\text{con una produttoria}} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i^{n_i}\right) = n_i x_i^{(n_i-1)} = x_i^{n_i}\left[n_i \frac{1}{x_i}\right]$$

$$u_C^2(y) = \left(\bar{x}_1^{n_1}\bar{x}_2^{n_2}\ldots\bar{x}_N^{n_N}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left[n_i^2 \frac{1}{x_i^2}\right] u^2(x_i) = y^2 \sum_{i=1}^{N} n_i^2 \frac{u^2(x_i)}{x_i^2}$$

e dunque $$u_{r,C}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} n_i^2 u_r^2(x_i)}$$

incertezze relative pesate sugli esponenti

Se inoltre $n_i = \pm 1$ per ogni i, cioè se la relazione funzionale è espressa da **prodotti e rapporti** semplici, si ottiene:

$$\boxed{u_{r,C}^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_r^2(x_i)}$$

Esercizio: legge dei gas perfetti (1/4)

$p = n\dfrac{RT}{V} = f(n,R,T,V)$ Relazione funzionale

$R = 8.31 \ \mathrm{Pa \cdot m^3/(mol \cdot K)}$ $u(R)$ "=" 0 (≅0!!!)

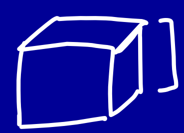
$n = 2 \ \mathrm{mol}$ $u_r(n) = 10^{-6}$

$T = 300 \ \mathrm{K}$ $u(T) = 0.1 \ \mathrm{K}$

$V = 1 \ \mathrm{m^3}$ da $V = L^3$ e $L = 1 \ \mathrm{m} \pm 1$ mm

mm

cubo



L

Esercizio: legge dei gas perfetti (2/4)

$$p = \frac{2\,[\mathrm{mol}] \times 8.31\,\left[\mathrm{Pa \cdot m^3}/\mathrm{mol \cdot K}\right] \times 300\,[\mathrm{K}]}{1\,[\mathrm{m^3}]} = 4986\ \mathrm{Pa} \cong \cancel{5\ \mathrm{kPa}}$$

non dobbiamo arrotondare prima di aver calcolato l'incertezza

$$\boxed{V = L^3}$$

$$u(V) = \sqrt{\left[\frac{\partial V}{\partial L}\right]^2 u^2(L)} = \sqrt{\left[3\ \mathrm{m}^2\right]^2 \times \left[10^{-3}\ \mathrm{m}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{9 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^6} = 3 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

Hp. L lunghezza uguale di tutti i lati del cubo

Conoscendo ora tutte le variabili/grandezze d'ingresso (valore e incertezza) possiamo calcolare l'INC della grandezza misurata indirettamente

Esercizio: legge dei gas perfetti (3/4)

$$u(p)=\sqrt{\left[\frac{\partial p}{\partial n}\right]^2 u^2(n)+\left[\frac{\partial p}{\partial T}\right]^2 u^2(T)+\left[\frac{\partial p}{\partial V}\right]^2 u^2(V)}=$$

$$\boxed{p=n\frac{RT}{V}}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{RT}{V}\right]^2 u^2(n)+\left[\frac{nR}{V}\right]^2 u^2(T)+\left[\frac{nRT}{-V^2}\right]^2 u^2(V)}=$$

$$=\sqrt{\left[\frac{nRT}{V}\right]^2 \frac{u^2(n)}{n^2}+\left[\frac{nRT}{V}\right]^2 \frac{u^2(T)}{T^2}+\left[\frac{nRT}{-V}\right]^2 \frac{u^2(V)}{V^2}}$$

$$u_r(p)=\sqrt{u_r^2(n)+u_r^2(T)+u_r^2(V)}$$

Esercizio: legge dei gas perfetti (4/4)

$$u_r^2(n) = 10^{-12}$$

$$u_r^2(T) = \frac{(0.1\,\mathrm{K})^2}{(300\,\mathrm{K})^2} \cong 1.1\times10^{-7}$$

$$u_r^2(V) = \frac{\left(3\times10^{-3}\,\mathrm{m}^3\right)^2}{\left(1\,\mathrm{m}^3\right)^2} \cong 9\times10^{-6}$$

$$u_r(p) = \sqrt{10^{-6}\left(10^{-6}+0.11+9\right)} \cong 3\times10^{-3} \quad [= u_r(V)!!!]$$

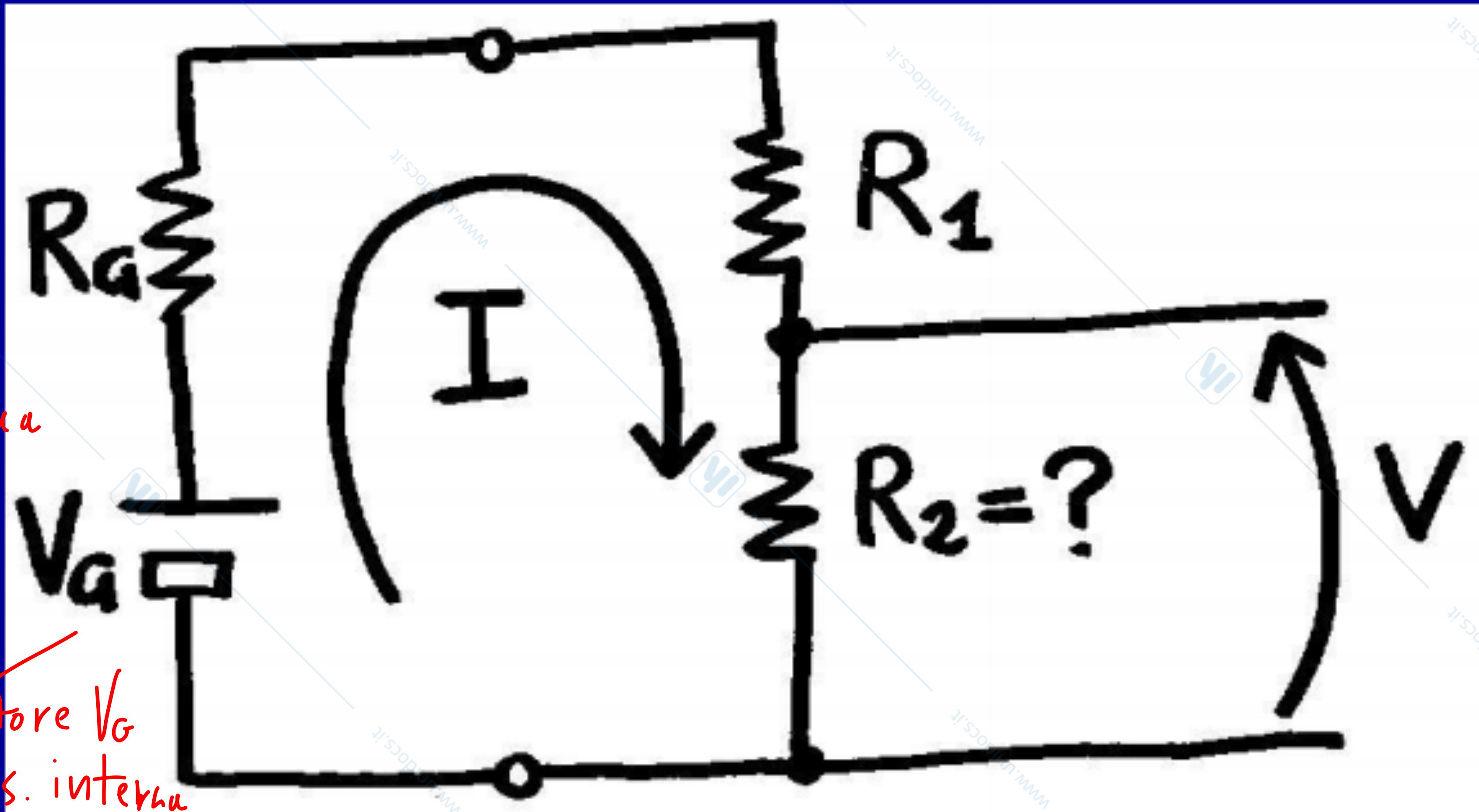
$$u(p) = u_r(p)\times p = 14.9\ \mathrm{Pa} \cong 15\ \mathrm{Pa}$$

$$p = 4986 \pm 15\ \mathrm{Pa} = 4986(15)\ \mathrm{Pa}$$

quindi <u>non</u> dovevamo arrotondare a 5kPa

Esercizio: circuito elettrico (1/13)

Calcolo dell'incertezza composta in una misura indiretta su un circuito elettrico



in continua

generatore V_G con res. interna R_G

Esercizio: circuito elettrico (2/13)

inc. estesa

- V_G è data pari a +12 V e $U(V_G)$ = 10 mV $k = 2$

$U(V_G) = 5\,mV$

- R_G è nota attraverso 10 letture ripetute $R_{G,k}$,
  $\overline{R}_G = 50\ \Omega \qquad s\left(R_{G,k}\right) = 12.65\ \Omega$
- $R_1 = 1\ k\Omega \pm 5\ \Omega$

3 cifre sono da 0 a 9

1 cifra ha un intervallo minore di quello da 0 a 9

- V = 7.77 V letta con un voltmetro a 3 ½ cifre, con ± 19.99 V di dinamica, e "ideale" (solo errore di quantizzazione)

da −1999 a +1999 → 4000

intervallo di valore ≥ 1000 e ≤ 10000

3 cifre $\boxed{999}$ 4 cifre $\boxed{?}$

Esercizio: circuito elettrico (3/13)

1) Calcolare l'incertezza assoluta e relativa di tutti i parametri coinvolti nella misura

2) Calcolare R_2, la sua incertezza e la sua incertezza relativa ($u(R_2)$ e $u_r(R_2)$)

3) Quali parametri sono determinanti e quali sono trascurabili per il calcolo di $u(R_2)$?

Esercizio: circuito elettrico (4/13)

$$I = \frac{V_G}{R_G + R_1 + R_2} = \frac{V}{R_2}$$

descrizione analitica del fenomeno fisico in esame

$$R_2 \cdot V_G = (R_G + R_1 + R_2) \cdot V$$

$$R_2 (V_G - V) = (R_G + R_1) V$$

$$R_2 = \frac{V}{(V_G - V)}(R_G + R_1) = f(V_G, V, R_G, R_1)$$

relazione funzionale → non è nè una produttoria, nè sommatoria

↳ non posso semplificare

Esercizio: circuito elettrico (5/13)

$$u^2(R_2) = \left[\frac{\partial f}{\partial V_G}\right]^2 u^2(V_G) + \left[\frac{\partial f}{\partial V}\right]^2 u^2(V) + \left[\frac{\partial f}{\partial R_G}\right]^2 u^2(R_G) + \left[\frac{\partial f}{\partial R_1}\right]^2 u^2(R_1)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ coeff. di sensibilità dice come f, ossia R_2, varia al variare di un parametri di dipendenza

Esercizio: circuito elettrico (6/13)

da inc. estesa Vanno riportate in inc. tipo

1) $u(V_G) = \quad U(V_G)/k = 5\times10^{-3}\ \text{V}$

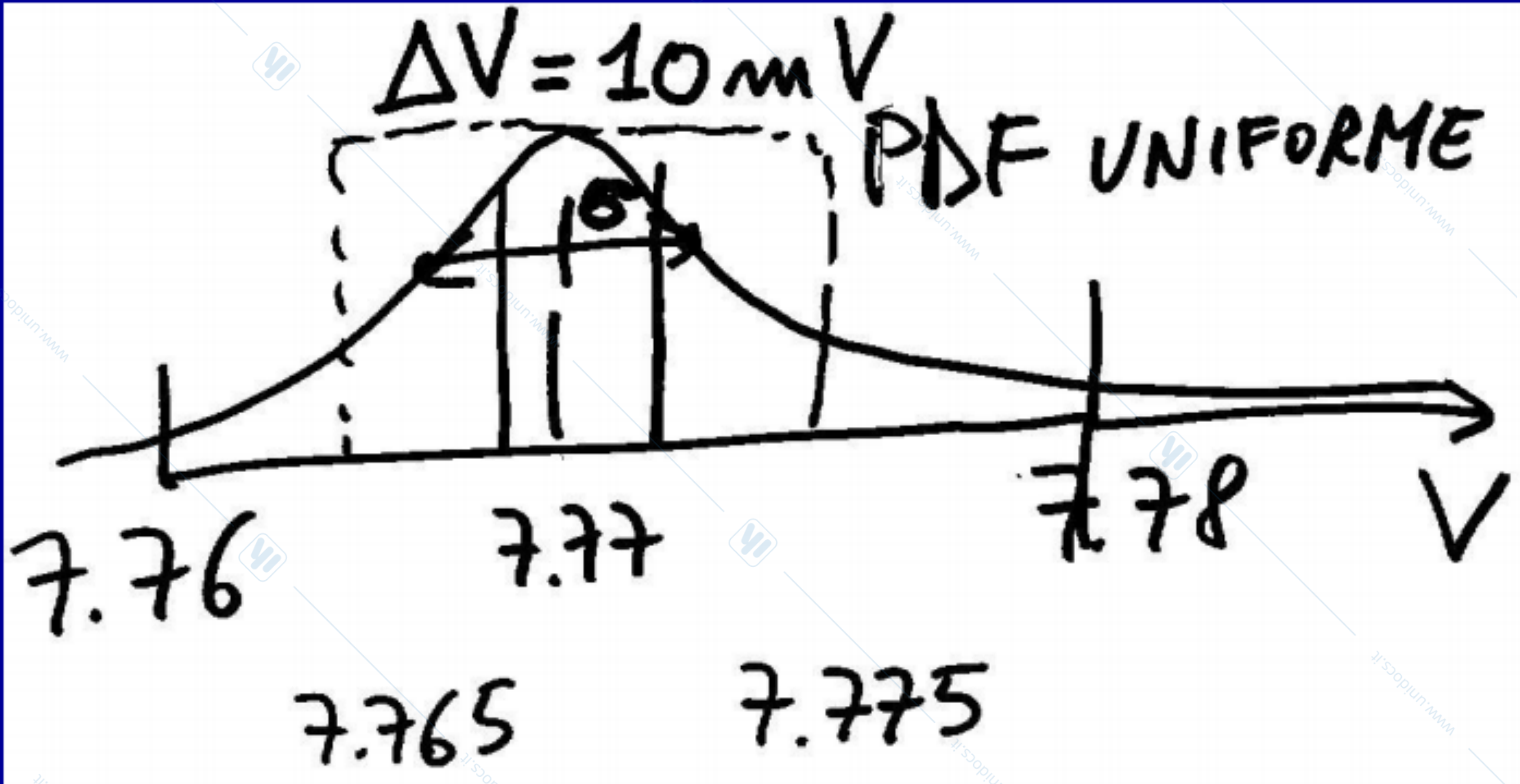
$$u_r(V_G) = \frac{u(V_G)}{V_G} = \frac{5\times10^{-3}\ \text{V}}{12\ \text{V}} = 4.2\times10^{-4}$$

$$u(V) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} = \frac{0.01}{\sqrt{12}} = 2.9\times10^{-3}\ \text{V}$$

$$u_r(V) = \frac{u(V)}{V} = \frac{2.9\times10^{-3}\ \text{V}}{7.77\ \text{V}} = 3.7\times10^{-4}$$

Sempre limitate a 2 cifre

Esercizio: circuito elettrico (7/13)



↳ vedere una PDF uniforme come una PDF gaussiana

Esercizio: circuito elettrico (8/13)

$$u(R_1) = 5\ \Omega$$

$$u_r(R_1) = \frac{u(R_1)}{R_1} = \frac{5\ \Omega}{1000\ \Omega} = 5 \times 10^{-3}$$

$$u(R_G) = u(\overline{R}_G) = \frac{s(R_{G,k})}{\sqrt{n}} = \frac{12.65\ \Omega}{\sqrt{10}} = 4\ \Omega$$

$$u_r(R_G) = \frac{u(R_G)}{R_G} = \frac{4\ \Omega}{50\ \Omega} = 8 \times 10^{-2}$$

Esercizio: circuito elettrico (9/13)

2)

$$R_2 = \overline{R}_2 = \frac{\overline{V}}{\left(\overline{V}_G - \overline{V}\right)}\left(\overline{R}_G + \overline{R}_1\right) = \frac{7.77\ \text{V}}{4.23\ \text{V}}\,1050\ \Omega = 1928.7\ \Omega$$

$$u^2(R_2) = \left[-\frac{V(R_G + R_1)}{(V_G - V)^2}\right]^2 u^2(V_G) +$$

dobbiamo vedere tutte le derivate

$$+\left[\frac{R_G + R_1}{V_G - V} + \frac{V(R_G + R_1)}{(V_G - V)^2}\right]^2 u^2(V) +$$

$$+\left[\frac{V}{V_G - V}\right]^2 \left\{u^2(R_G) + u^2(R_1)\right\} =$$

Esercizio: circuito elettrico (10/13)

$$= 2.08\times10^{5}\ \frac{\Omega^2}{V^2}\times2.50\times10^{-5}\ V^2 +$$

$$+4.96\times10^{5}\ \frac{\Omega^2}{V^2}\times8.41\times10^{-6}\ V^2 +$$

$$+3.37\times41\ \Omega^2 =$$

termine + importante dovuto all'inc. di R_1 e R_G

$$= \left(5.2+4.17+138.17\right)\Omega^2 = 147.54\ \Omega^2$$

$$u(R_2) = \sqrt{u^2(R_2)} = 12.15\ \Omega \simeq 12\ \Omega$$

$$u_r(R_2) = \frac{u(R_2)}{R_2} = 6.3\times10^{-3} \qquad \left(\approx \frac{12\ \Omega}{2\ k\Omega} = 6\times10^{-3}\right)$$

$$\boxed{R_2 = 1929\ \Omega \pm 12\ \Omega = 1929(12)\ \Omega}$$

Esercizio: circuito elettrico (11/13)

3) Le incertezze associate a R_G e R_1 danno il maggior contributo all'incertezza di R_2 (circa in parti uguali)

Invece l'incertezza $u(V)$ sulla tensione letta dal voltmetro e così pure l'incertezza $u(V_G)$ sulla tensione del generatore contribuiscono in modo quasi trascurabile (circa 1/35 e circa 1/30, rispettivamente, dell'incertezza totale)

In generale se le misure non sono compatibili significa che c'è certamente un errore (o di misura o di stima)

Compatibilità tra due misure x_1 e x_2

sono sempre compatibili a 2 a 2

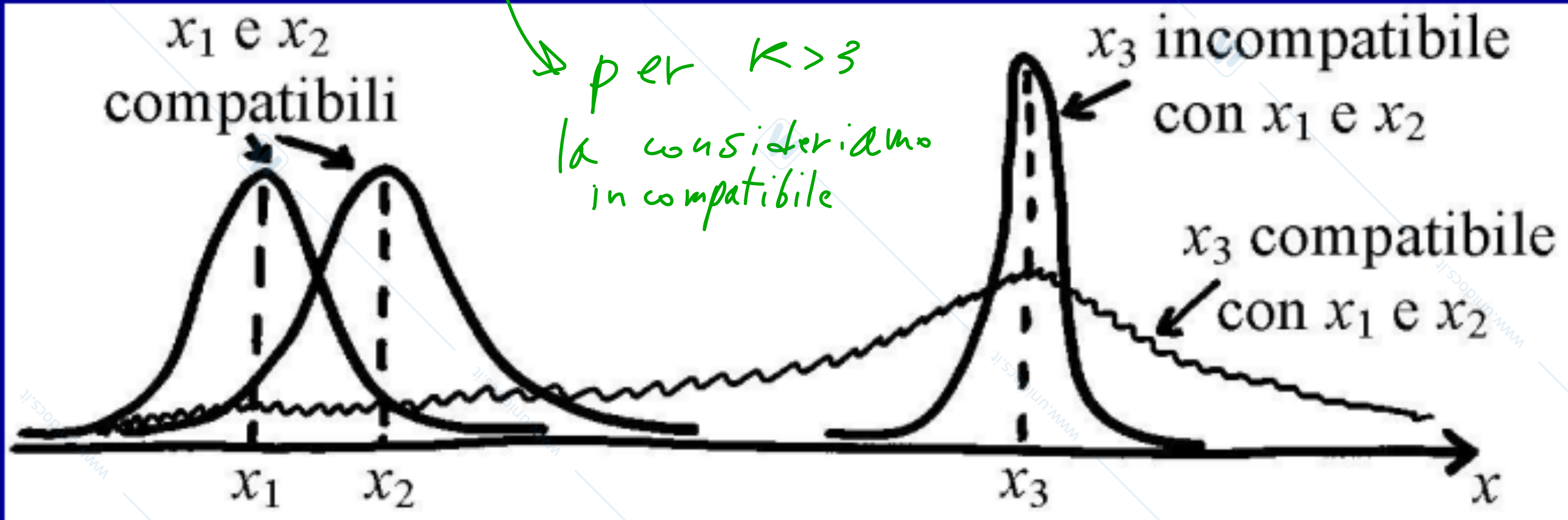
distanza tra i due risultati $\leq$ "combinazione" delle incertezze associate alle due misure

Variabile differenza

per $K=1,2,3$

$$d = |x_1 - x_2| \leq k\sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2r_{12}\,u(x_1)u(x_2)}$$

per $K>3$ la consideriamo incompatibile



Media pesata

Media pesata tra misure compatibili:
nel caso di N risultati di misura compatibili, indipendenti e normalmente distribuiti, la miglior stima della misura è

$$x = \bar{x}_{MP} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{u^2(x_i)}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u^2(x_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

miglior stima possibile della misura
⇓
quindi quella con la minore varianza

i **pesi** $w_i = \frac{1}{u^2(x_i)}$ sono i reciproci delle varianze stimate e dunque indicano il grado di confidenza che abbiamo sugli x_i: se $u(x_i)$ è basso la mis. è "credibile"

Incertezza della media pesata

Dim. sul quad. (non lo chiede)

$$u^2(\bar{x}_{MP}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{u^2(x_i)}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

I rapporti tra media e incertezza (al quadrato) sono legati dalla relazione:

$$\frac{\bar{x}_{MP}}{u^2(\bar{x}_{MP})} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{u^2(x_i)} = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i$$

$z^* = z / u^2(z) = w_z z = \mu / \sigma^2$ è la misura "pesata" con la sua incertezza al quadrato (valor medio / varianza)

$$z^*_{MP} = \sum_{i=1}^{N} z^*_i$$

Esercizio su compatibilità e media pesata (1/5)

Due differenti misure della stessa potenza a radiofrequenza, emessa da un telefono cellulare, vengono effettuate con strumenti diversi e in maniera del tutto indipendente.

- La prima misura è analogica ("senza limiti di risoluzione") ed è ricavata da letture ripetute (n=5) del misurando, che hanno fornito i valori:

$P_{1,1}$=3.4 W $P_{1,2}$=3.2 W $P_{1,3}$=3 W $P_{1,4}$=2.8 W $P_{1,5}$=2.6 W

- La seconda misura è digitale, con un wattmetro ideale a 100 livelli e portata 20 W, e ha fornito una lettura $P_2 = 3.2$ W.

a) Calcolare i due valori di misura, P_1 e P_2, e le corrispondenti incertezze tipo (standard).

b) Valutare la compatibilità tre i due risultati di misura, in particolar modo per fattori di copertura k pari a 1, 2, e 3.

c) Ricavare la miglior stima per il valore della potenza P misurata e la sua incertezza tipo $u(P)$. ↳ ricavabile solo se sono compatibili

Esercizio su compatibilità e media pesata (2/5)

a) $P_1=\overline{P_1} = \overline{P_{1,i}}$=3 W ricavata come media campionaria: $\overline{P_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{1,i}$

$$u(P_1) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(P_{1,i}-\overline{P_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5\times 4}\left[(0.4)^2+(0.2)^2+(0)^2+(0.2)^2+(0.4)^2\right]\mathrm{W}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\times(0.16+0.04)}{20}\mathrm{W}^2} = \sqrt{\frac{2\times 0.20}{20}}\ \mathrm{W} = \sqrt{2\times 10^{-2}}\ \mathrm{W} = 0.1\sqrt{2}\ \mathrm{W} \cong 0.14\ \mathrm{W}$$

$\rightarrow P_1 = 3,00(14)$ W

$P_2 = 3.2$ W da una misura digitale con risoluzione $\Delta P_2 = \frac{20\ \mathrm{W}}{100\ (\text{livelli})} = 0.2$ W (passo di quantizzazione)

$$u(P_2) = \frac{\Delta P_2}{\sqrt{12}} \cong 0.058\ \mathrm{W} \sim 0.06\ \mathrm{W}\ \text{(incertezza di quantizzazione)}$$

$\rightarrow P_2 = 3,200(60)$ W

Esercizio su compatibilità e media pesata (3/5)

b) Per verificare la compatibilità tra le due misure, si deve valutare la disuguaglianza

$$|P_1 - P_2| \le k\sqrt{u^2(P_1) + u^2(P_2)}$$

con k fattore di copertura (il termine di covarianza non compare essendo per ipotesi le due misure statisticamente indipendenti).

Sostituendo i valori numerici si ha

$$0.2\ \mathrm{W} \le k\sqrt{0.0232\ \mathrm{W}^2} \cong k \times 0.15\ \mathrm{W} \quad \Rightarrow \quad k \ge (0.2/0.15) = 1.33$$

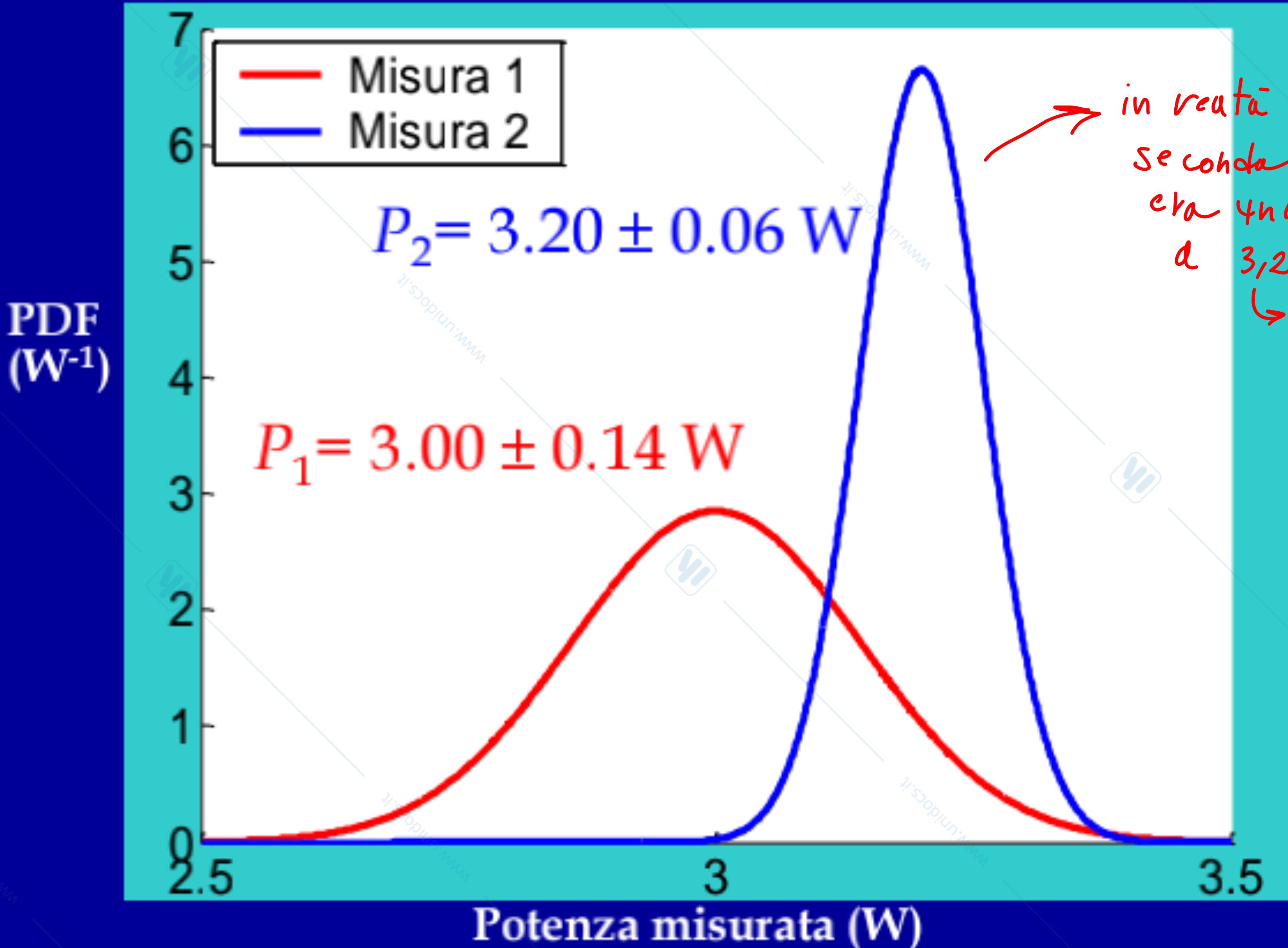
va bene

Pertanto, le due misure sono compatibili con $k = 2$ e ovviamente anche con $k = 3$ ma non sono compatibili con $k = 1$.

inizia a non essere così ottimale

Esercizio su compatibilità e media pesata (4/5)

Interpretazione grafica della compatibilità tra le due misure



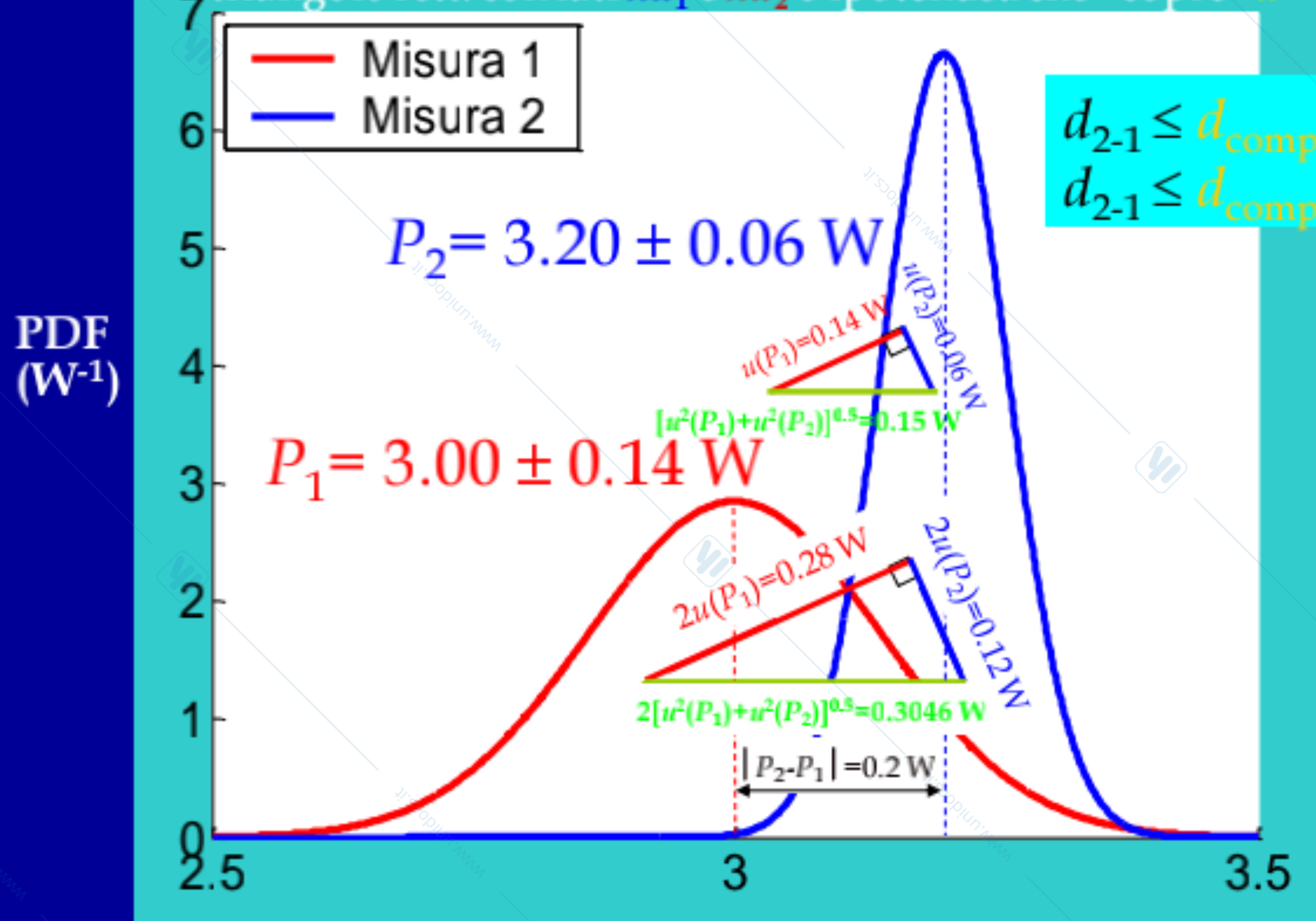
in realtà la PDF della seconda misura era una PDF uniforme a 3,2

↳ ma si può convertire in una gaussiana

Esercizio su compatibilità e media pesata (4/5)

Interpretazione grafica della compatibilità tra le due misure

triangolo rett. con lati ku_1 e ku_2 e ipotenusa che "copre" d



$d_{2\text{-}1} \leq d_{comp,k=1}$ ...NO!

$d_{2\text{-}1} \leq d_{comp,k=2}$ ...SI!

Esercizio su compatibilità e media pesata (5/5)

c) Ritenendo accettabile la condizione di compatibilità con $k = 2$, possiamo calcolare la miglior stima della potenza P misurata, ricorrendo al criterio della media pesata tra misure compatibili:

$$P_{MP} = \frac{\dfrac{P_1}{u^2(P_1)} + \dfrac{P_2}{u^2(P_2)}}{\dfrac{1}{u^2(P_1)} + \dfrac{1}{u^2(P_2)}} = \frac{153\ \mathrm{W}^{-1} + 888\ \mathrm{W}^{-1}}{51\ \mathrm{W}^{-2} + 278\ \mathrm{W}^{-2}} = \frac{1041\ \mathrm{W}^{-1}}{329\ \mathrm{W}^{-2}} \cong 3.169\ \mathrm{W}$$

<u>**Naturalmente P_{MP} è più vicino a P_2 che a P_1 essendo $u(P_2)<u(P_1)$**</u>

L' incertezza della media pesata è:

$$u(P_{MP}) = \sqrt{\frac{1}{\dfrac{1}{u^2(P_1)} + \dfrac{1}{u^2(P_2)}}} = \sqrt{\frac{1}{329\ \mathrm{W}^{-2}}} \cong 0.055\ \mathrm{W}$$

<u>**Naturalmente $u(P_{MP})$ è inferiore sia a $u(P_1)$=140mW che a $u(P_2)$=60mW**</u>

Per cui, P = **3.169(55) W** [redacted])

Considerazioni sull'incertezza dell'incertezza e gradi di libertà

Ricordiamo che ogni stima di incertezza è a sua volta incerta e la bontà di questa stima è esprimibile attraverso il numero di gradi di libertà ($\nu_A = n - 1$ per l'INC di Cat. A)

vedi formula di varianza campionaria

Anche nel caso di INC di Cat. B si può stimare, non calcolare secondo una formula predeterminata, il numero ν_B di gradi di libertà della stima dell'INC (ricordando che è meglio sottostimare ν_B piuttosto che sovrastimarlo)

Stima dei gradi di libertà per l'incertezza di categoria B

Per l'INC di Cat. B si può avere nel caso migliore (*e.g.* INC di quantizzazione) $\nu_B = \infty$ e nel caso più conservativo (*worst case*) $\nu_B = 1$

Il numero di gradi di libertà ν_B deve essere stimato sulla base di quanto "si crede" alla stima di u_B e alla luce dell'analogo significato di $\nu_A = n-1$ nel caso di u_A per misure ripetute

Significato del numero di gradi di libertà

→ dovremo accompagnare l'incertezza con il numero di gradi di libertà

Consideriamo un campione di n dati. Di questo campione si può stimare la varianza e dev. st. del valor medio (e quindi l'incertezza della misura). Però, operando su un campione casuale, <u>anche la stima della varianza</u> è un numero casuale che <u>presenta una potenziale dispersione</u>.
Il numero di gradi di libertà è un indicatore della **possibile variabilità della nostra stima dell'incertezza**:

si può dimostrare che $\sigma^2[s(\bar{x})] \cong \dfrac{\sigma^2(\bar{x})}{2\nu}$ — nu

e allora

$$\mathrm{INC}[\mathrm{INC}(x)] = \sigma[u(x)] \cong \frac{u(x)}{\sqrt{2\nu}} \qquad u_r(u(x)) = \frac{\sigma[u(x)]}{u(x)} \cong \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$$

per stimare l'affidabilità dell'incert. trovata

Incertezza dell'incertezza e cifre significative per l'INC

$$\mathrm{INC}[\mathrm{INC}(x)] = \sigma[u(x)] \cong \frac{u(x)}{\sqrt{2\nu}} \qquad u_r(u(x)) = \frac{\sigma[u(x)]}{u(x)} \cong \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$$

$$\nu^{-1} \cong 2\sigma^2[u(x)]/u^2(x) = 2u_r^2[u(x)]$$

ν^{-1} è una indice/misura dell'**incertezza dell'incertezza**

ν alto $\Rightarrow$ INC(INC) bassa — ν basso $\Rightarrow$ INC(INC) alta

$\nearrow u(x)$

$u_r[u(x)] \cong 0.7\,\nu^{-1/2} \approx \nu^{1/2} \Rightarrow$ cifre per l'incertezza

$u_r[u(x)] \approx 10^{-1}$ ($\nu = 100$) $\Rightarrow$ 1 cifra $\leftarrow$ va giustificat.

$u_r[u(x)] \approx 10^{-2}$ ($\nu = 10000$) $\Rightarrow$ 2 cifre

$u_r[u(x)] \approx 10^{-3}$ (ν=1000000) $\Rightarrow$ 3 cifre (???)

Gradi di libertà per $u_C(y)$

→ formule che NON useremo e che NON dobbiamo sapere

E' possibile dimostrare che il numero di gradi di libertà ν_C della stima $u_C(y)$ e l'incertezza alla quarta potenza $[u_C(y)]^4$ sono legati dalla relazione

$$\frac{u_C^4(y)}{\nu_C} = \sum_{i=1}^{N} c_i^4 \frac{u^4(x_i)}{\nu_i} \qquad \frac{\sigma^4}{\nu} = \hat{z} = \sum_{i=1}^{N} c_i^4 \hat{z}_i$$

che esprime $[u_C(y)]^4 / \nu_C$ come somma pesata, sempre con i "soliti" coefficienti di sensibilità, degli analoghi rapporti (u^4 / ν) per le variabili d'ingresso

Formula di Welch-Satterthwaite per i gradi effettivi di libertà $\nu_C = \nu_{eff}$ di $u_c(y)$

non c'è da sapere

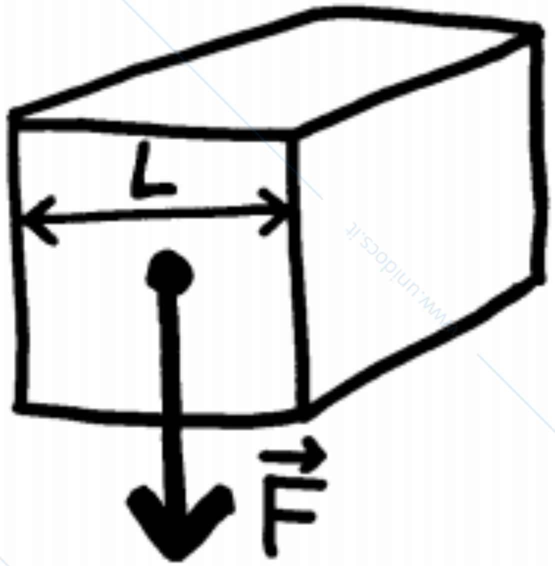
Per un'incertezza composta $u_C(y)$ si avrà un **numero di gradi effettivi di libertà**

$$\nu_C = \nu_{eff} = \frac{\left[u_C^2(y)\right]^2}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\left[c_i^2 u^2(x_i)\right]^2}{\nu_i}} = \frac{u_C^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \leq \sum_{i=1}^{N} \nu_i$$

e inoltre $\nu_C > \nu_{i,min}$: **combinando più misure si migliora qualcosa nel livello di conoscenza del risultato** (diminuisce u_C, "rispetto a $u(x_i)_{max}$" e aumenta ν_C, rispetto a $\nu_{i,min}$)

Esercizio su INC e media pesata (1/14)

ESERCIZIO media pesata e incertezza



Cubo di Al di lato ~1 m
Calcolare il suo PESO

$g = 9.806\ 65(33)\ m/s^2$

L misurato mediante conteggio di frange a $\lambda = 500$ nm ottenendo un numero di conteggi N sempre compreso tra $N_1 = 2 \times 10^6$ e $N_2 = 2 \times 10^6 + 40$

Esercizio su INC e media pesata (2/14)

Per la densità ρ del materiale disponiamo di 3 possibili valori:

"C" secondo il costruttore:

$\rho_C = 2.71\ Kg/dm^3$ con incertezza di 2×10^{-5}

"T" da diversi testi di meccanica e materiali si ricavano $n=9$ valori ρ_K con $\rho_T = \bar{\rho}_K = 2.73\ Kg/dm^3$ e dev. $s(\rho_K) = 9\ g/dm^3$

"L" da una misura di laboratorio si ha

$\rho_L = 2.69\ Kg/dm^3$ con $u(\rho_L) = 0.02\ Kg/dm^3$

Esercizio su INC e media pesata (3/14)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$F = mg = (\rho V)g = \rho L^3 g$$

relazione funzionale

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Esercizio su INC e media pesata (4/14)

$$\bar{F} = \bar{\rho}\,\bar{L}^3\,\bar{g}$$

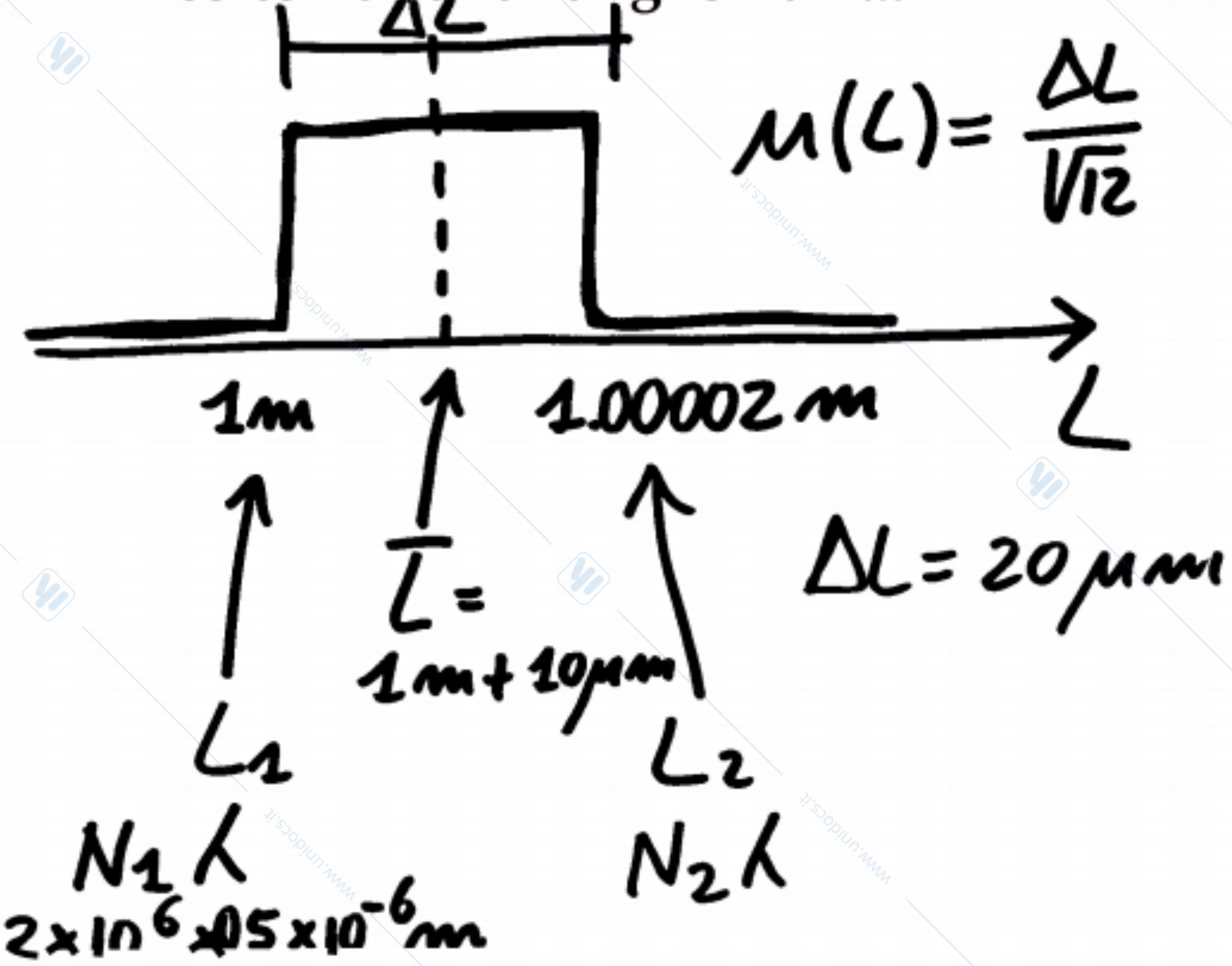
$$u(F) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i)}$$

o anche

$$u_R(F) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} n_i^2\, u_R^2(x_i)}$$

Esercizio su INC e media pesata (5/14)

Incertezza sulla lunghezza L...



Esercizio su INC e media pesata (6/14)

$$u(\bar{L}) = u(L) = \frac{20\,\mu m}{\sqrt{12}} \cong 5.8\,\mu m$$

$$u_r(L) = \frac{u(L)}{L} \cong 6 \times 10^{-6}$$

$$u(g) = 33 \times 10^{-5}\ m/s^2$$

$$u_r(g) = \frac{u(g)}{g} = \frac{33}{980\,665} \cong 3.4 \times 10^{-5}$$

Esercizio su INC e media pesata (7/14)

densità ρ

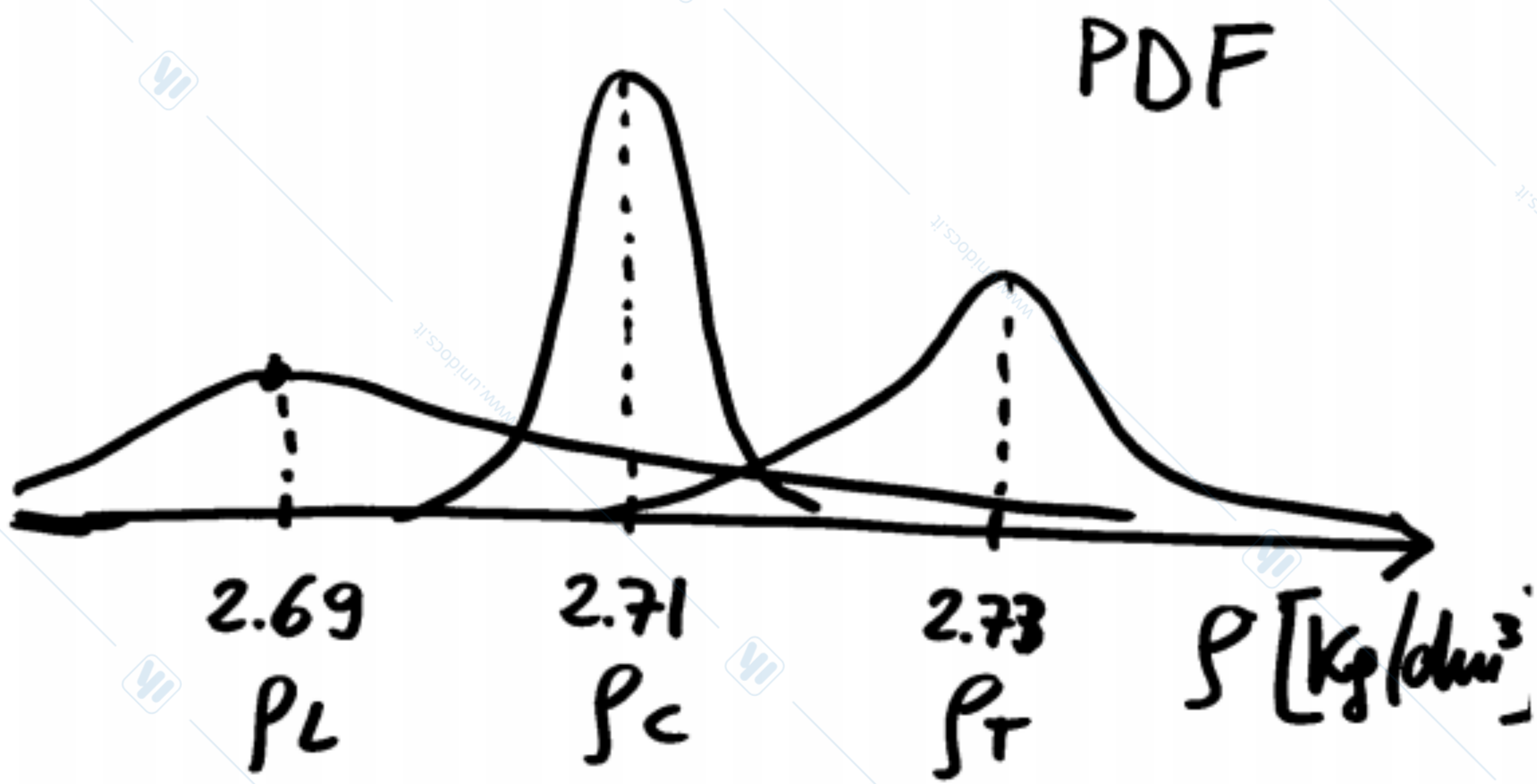
$\rho_C = 2.71\ Kg/dm^3 \quad u(\rho_C) \cong 5.4 \times 10^{-5}\ Kg/dm^3$

$\rho_T = 2.73\ Kg/dm^3 \quad u(\rho_T) = \frac{s(\rho_K)}{\sqrt{n}} =$

$= \frac{9 \times 10^{-3}\ Kg/dm^3}{3} = 3 \times 10^{-3}\ Kg/dm^3$

$\rho_L = 2.69\ Kg/dm^3 \quad u(\rho_L) = 2 \times 10^{-2}\ Kg/dm^3$

Esercizio su INC e media pesata (8/14)



COMPATIBILITÀ fra ρ_α e ρ_β

$$|\rho_\alpha - \rho_\beta| \leq K \sqrt{u^2(\rho_\alpha) + u^2(\rho_\beta)}$$

Esercizio su INC e media pesata (9/14)

con $K = 1$ risultano comp.
le misure ρ_L e ρ_C mentre
è incompatibile ρ_T

Per la stima di ρ e $u(\rho)$
ricorro al criterio della
MEDIA PESATA tra mis
comp.

Esercizio su INC e media pesata (10/14)

$$\rho = \frac{\frac{\rho_L}{u^2(\rho_L)} + \frac{\rho_C}{u^2(\rho_C)}}{\frac{1}{u^2(\rho_L)} + \frac{1}{u^2(\rho_C)}} \cong \rho_C = 2.71 \ \mathrm{Kg/dm^3}$$

$$u^2(\rho) = \frac{1}{\frac{1}{u^2(\rho_L)} + \frac{1}{u^2(\rho_C)}} = u^2(\rho_C)$$

$$u(\rho) \cong u(\rho_C) \cong 5.4 \times 10^{-5} \ \mathrm{Kg/dm^3}$$

$$u_r(\rho) = u(\rho)/\rho \approx 2 \times 10^{-5}$$

Esercizio su INC e media pesata (10/14)

Si provi a ripetere il calcolo per tutte e 3 le misure di ρ compatibili tra loro (ad es. con k=2):

rispetto al caso di prima (per k=1), il valore della densità da media pesata (ρ_{MP}) non si sposta di molto e neppure diminuisce di molto l'incertezza $u(\rho_{MP})$ della media pesata

Esercizio su INC e media pesata (11/14)

$$F = 2.71 \times 10^3 \frac{Kg}{\cancel{m^3}} \times (1.00001)^3 \cancel{m^3} \times$$

$$\times\, 9.80665\ m/s^2$$

$$F = 26\,576.3\ \underbrace{Kg\frac{m}{s^2}}_{N} \approx 26.6\ KN$$

Esercizio su INC e media pesata (12/14)

$$u^2(F) = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho}\right]^2 u^2(\rho) + \left[\frac{\partial F}{\partial L}\right]^2 u^2(L) + \left[\frac{\partial F}{\partial g}\right]^2 u^2(g) =$$

$$= \left[L^3 g\right]^2 u^2(\rho) + \left[3\rho L^2 g\right]^2 u^2(L) + \left[\rho L^3\right]^2 u^2(g)$$

Esercizio su INC e media pesata (13/14)

$$\frac{u^2(F)}{F^2} = \frac{u^2(\rho)}{\rho^2} + \frac{9u^2(l)}{l^2} + \frac{u^2(g)}{g^2}$$

$$u_r(F) = \sqrt{u_r^2(\rho) + 9u_r^2(l) + u_r^2(g)} \cong$$

$$\cong \sqrt{(2\times10^{-5})^2 + 9(6\times10^{-6})^2 + (3.4\times10^{-5})^2}$$