FONDAMENTI DELLA MISURAZIONE **mercoledì 17 aprile 2019**

Prof. Michele Norgia **Prova in itinere AA 2018/2019**

Tempo a disposizione 50 minuti **Aule S.0.5 ore 11.30**

Cognome e nome: ________________________________ ____________________ *(stampatello)*

Matricola e firma __ __ __ __ __ __ ____________________ *(firma leggibile)*

N.B. Si richiede di **crocettare tutti i sottopunti**, ad es. 1c), 1d), degli esercizi ai quali si è dato risposta.

(50 min) **Esercizio 1**

(svolgere su questo foglio e sul retro)

1a) Intendiamo verificare la grammatura dei fogli di carta da stampante. Prendiamo 5 fogli A4 e li pesiamo con una bilancia con risoluzione **0.01 g**, ottenendo i seguenti valori:

M_i **= 4.92; 5.09; 5.02; 5.16; 5.01 g**.

Si valuti la massa media M di un foglio e la sua incertezza tipo, commentando il contributo della risoluzione della bilancia.

1b) Supponendo che i fogli A4 abbiano le stesse dimensioni, in quanto tagliati insieme nella stessa pressa, ne misuriamo i lati con un normale righello: h **= 29.65 cm** e l **= 21.00 cm**. La lettura del righello è stata arrotondata a **0.5 mm**. La densità della carta δ è compresa tra **700 kg/m^3** e **1150 kg/m^3**.

Si valutino lo spessore del foglio s e la sua incertezza.

1c) Considerando che la grammatura nominale G **= 80 g/m^2** ha una tolleranza pari a **±1%**, si stimi la massa M_G che dovrebbe avere un foglio A4 e la sua incertezza (usando le dimensioni misurate nel punto b).

NOTA: si consideri la tolleranza come un intervallo che racchiude circa il 95% dei campioni.

1d) Si valuti la compatibilità tra le misure M e M_G. Che cosa indica questo risultato?

1e) Consideriamo una risma di 500 fogli. Se ne stimi la massa complessiva M_R e la sua incertezza, utilizzando solo i dati e le ipotesi fatte al punto a).

SOLUZIONE

1a) La massa media M è ricavata da una misura ripetuta, il suo valor medio vale

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i \text{ -1 g} = \mathbf{5.040\ g}$$

L'incertezza della misura è la stima della deviazione standard del valor medio, che vale:

$$u(M) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(M_i - \overline{M}\right)^2} \cong \mathbf{0.040\ g}$$

Per cui M **= 5.040(40) g**.

La risoluzione della bilancia, che influenza le singole misure, è irrilevante in quanto molto inferiore alla variabilità della misura.

1b) La densità è racchiusa in un intervallo **700 kg/m^3** e **1150 kg/m^3**. Possiamo attribuire una distribuzione uniforme di probabilità in questo intervallo (non è l'unica ipotesi possibile), ottenendo:

$\delta = (700+1150)/2$ kg/m^3= **925 kg/m^3**

$u(\delta) = \Delta\delta/\sqrt{12}$ **= 130 kg/m^3** $\quad u_r(\delta) = u(\delta)/\delta$ **= 14 %**

Le incertezze associate alle misure dei lati sono dovute alla risoluzione limitata:

$u(h) = \Delta h/\sqrt{12}$ **= 0.14 mm** $\quad u_r(h) = u(h)/h$ **=4.7×10^{-4}**

$u(l) = \Delta l/\sqrt{12}$ **= 0.14 mm** $\quad u_r(l) = u(l)/l$ **=6.7×10^{-4}**

Lo spessore del foglio vale

$$s = M / (\delta \cdot h \cdot l) = (5.04\ \text{g}) / (925\ \text{kg/m}^3 \cdot 29.65\ \text{cm} \cdot 21\ \text{cm}) = \mathbf{87.51\ \mu m}$$

Essendo la relazione funzionale una produttoria, possiamo calcolare l'incertezza relativa di $\boldsymbol{s}$ come somma quadratica delle incertezze relative, con $\boldsymbol{u_r(M) = u(M)/M = 7.9\times10^{-3}}$:

$$u_r(s) = \sqrt{u_r^2(M) + u_r^2(\delta) + u_r^2(h) + u_r^2(l)} \cong u_r(\delta) = \mathbf{14\ \%}$$

$$\boldsymbol{u(s)} = u_r(s) \times s \cong \mathbf{12\ \mu m}$$

Da cui $\boldsymbol{s} = \mathbf{88(12)\ \mu m}$

1c) La massa del singolo foglio è pari alla grammatura moltiplicata per la sua area:

$$\boldsymbol{M_G} = G \cdot h \cdot l \cong \mathbf{4.9812\ g}$$

Essendo la relazione funzionale una produttoria, possiamo calcolare l'incertezza relativa di $\boldsymbol{M_S}$ come somma quadratica delle incertezze relative delle singole variabili.

Per quanto riguarda la grammatura, la tolleranza dell'1% racchiude il 95% dei campioni, per cui corrisponde a circa 2 deviazioni standard, nell'ipotesi di distribuzione di probabilità normale. Quindi $\boldsymbol{u_r(G) = 0.5\ \%}$.

Dato che le singole incertezze non sono correlate otteniamo:

$$u_r(M_G) = \sqrt{u_r^2(G) + u_r^2(h) + u_r^2(l)} \cong \mathbf{5.1\times10^{-3}}$$

L'incertezza tipo di M_G vale $\boldsymbol{u(M_G)} = u_r(M_G) \times M_G = \mathbf{0.025\ g}$

$$\boldsymbol{M_S} = \mathbf{4.981(25)\ g}$$

1d) Valutiamo la compatibilità tra le due misure con la relazione: $|x-y| < k\sqrt{u^2(x)+u^2(y)}$ dove k=1,2,3 è il fattore di copertura per la valutazione della compatibilità.

Si ottiene: $0.059 < k\times0.047$ che è **ben verificata per k = 2**.

Concludiamo quindi che le due misure sono compatibili con fattore di copertura 2. Questo risultato indica che la grammatura nominale dei fogli è coerente con le nostre misure.

1e) Applicando le tecniche di stima di categoria A, dalla prima misura abbiamo ricavato la media campionaria della massa la sua deviazione standard campionaria:

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i = \mathbf{5.040\ g} \qquad s(\boldsymbol{M}) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(M_i - \overline{M}\right)^2} \cong \mathbf{0.090\ g}$$

Che stimano il valor medio e la deviazione standard della "popolazione" di fogli.

Se consideriamo una risma di 500 fogli, la sua massa è data dalla somma di 500 fogli, variabili casuali per ipotesi non correlate, con lo stesso valor medio e varianza.

Il valor medio della massa della risma vale quindi $\boldsymbol{M_{R2}} = 500\times5.04\ \text{g} = \mathbf{2520\ g}$.

La sua varianza è data dalla somma delle 500 varianze in quanto le variabili non sono correlate, per cui:

$$\sigma(500\ \text{fogli}) = \sqrt{500 \cdot \sigma^2(M)} \overset{S}{=} \sqrt{500 \cdot s^2(M)} \cong 2.0\ \text{g}$$

Attenzione però che questa non è l'incertezza della massa della risma, è la variabilità che ci aspettiamo se facessimo misure ripetute su diverse risme. Dobbiamo considerare che il valor medio M ha un suo errore di stima, che purtroppo si ripercuote direttamente sulla misura di 500 fogli. Per cui

$$\boldsymbol{u(M_{R2})} = 500\ \boldsymbol{u(M)} = \mathbf{20\ g}$$