f positive → Spettro reale simmetrico

↓ da $-\infty$ a ∞ solo perché è + comodo matematic.

Trasformata di Fourier

L'operatore che consente di ottenere la risposta in frequenza *H(f)* a partire dalla risposta all'impulso del sistema *h(t)*, viene detto **trasformata di Fourier**.

La trasformata di Fourier puo' essere calcolata per un generico segnale *x(t)*, non solo per la risposta all'impulso di un sistema LTI:

Seni e coseni riassunti in forma esp. complex.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\{-j2\pi\ ft\}\, dt$$

NON dobbiamo sapere né la formula né le proprietà

L'operatore che consente di riottenere il segnale *x(t)* a partire dalla sua trasformata di Fourier *X(f)* viene detto **trasformata inversa di Fourier:**

1° problema di misura: tempo di misura finito

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\{j2\pi\ ft\}\, df$$

Si noti che la trasformata di Fourier e la sua inversa sono uguali, a parte il segno dell'esponente.

Proprieta' della TDF (1)

1 **LINEARITA'**: la TDF della combinazione lineare (somma pesata) di due segnali e' uguale alla combinazione lineare delle TDF dei due segnali.

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{\text{TDF}} a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$

2 **SIMMETRIA**:

$$x(-t) \xrightarrow{\text{TDF}} X(-f)$$

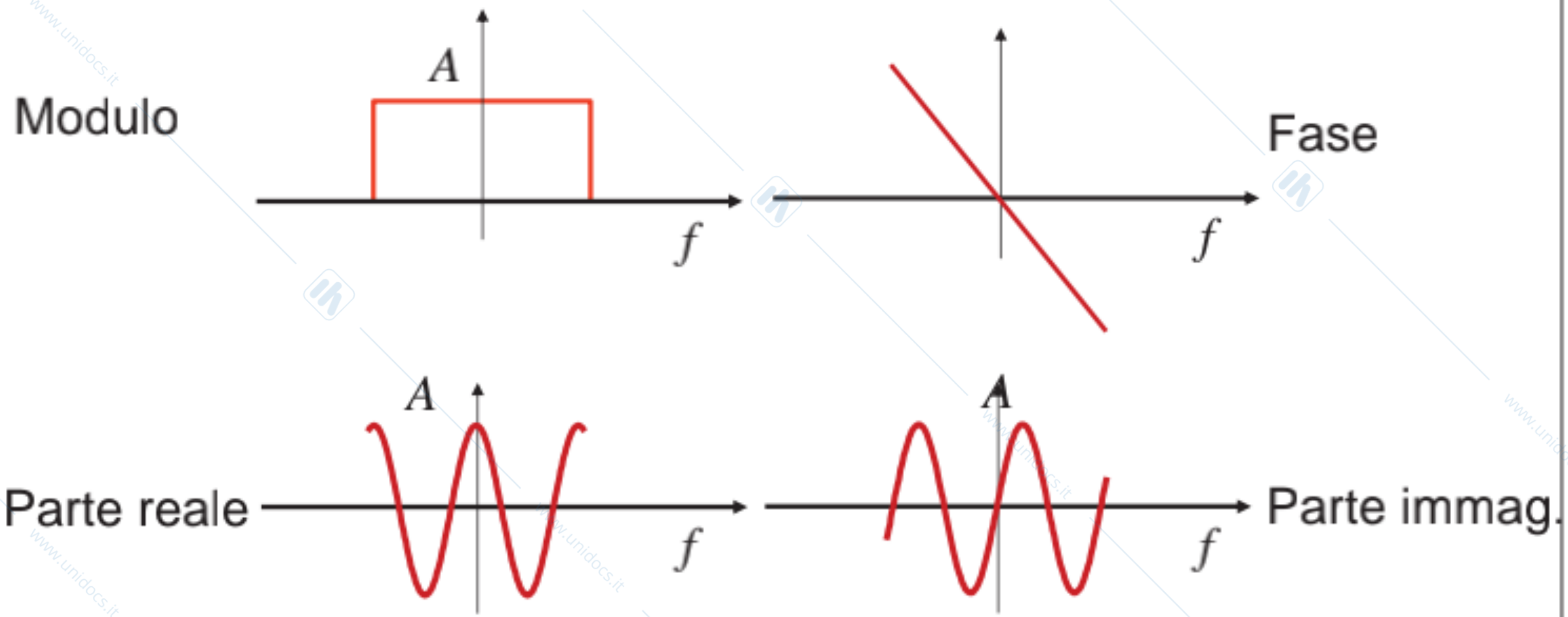
$$x^*(t) \xrightarrow{\text{TDF}} X^*(-f)$$

conseguenze: la TDF di una segnale reale gode di simmetria complessa coniugata. La parte reale e il modulo sono simmetrici rispetto all'origine (sono "pari"), la parte immaginaria e la fase sono antisimmetriche rispetto all'origine (sono "dispari").

$$x(t) \text{ reale} \xrightarrow{\text{TDF}} X(-f) = X^*(f)$$

Proprieta' della TDF (2)

TDF di una segnale reale



Casi particolari

$x(t)$ reale pari → TDF → $X(f)$ reale pari

$x(t)$ reale dispari → TDF → $X(f)$ immaginario dispari

Proprieta' della TDF (3)

3 **Valori nell'origine**: la TDF in *f=0* e' uguale all'integrale del segnale nei tempi.
Il segnale in *t=0* e' uguale all'integrale della TDF nelle frequenze.

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt; \qquad x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)df;$$

4 **Dualita'**: dato il segnale *x(t)* e la sua TDF *X(f)*, vale la seguente relazione duale:

$$X(-t) \xrightarrow{\text{TDF}} x(f)$$

5 **Scalatura**:

Se allargo i tempi le freq. si stringono

$$x(at) \xrightarrow{\text{TDF}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

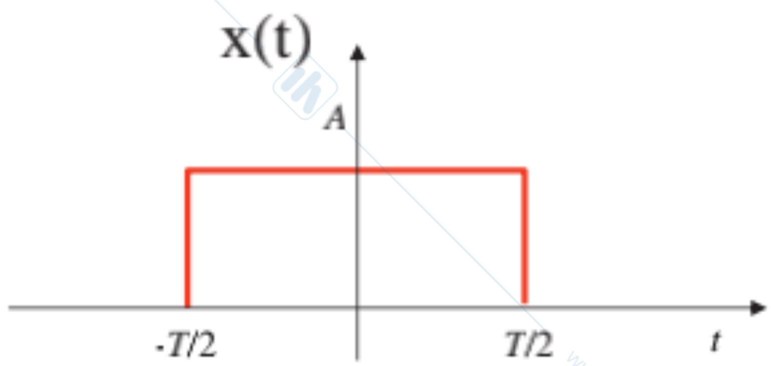
Caso particolare, a=-1: $x(-t) \xrightarrow{\text{TDF}} X(-f)$

Esempi di trasformata di Fourier (il rettangolo)

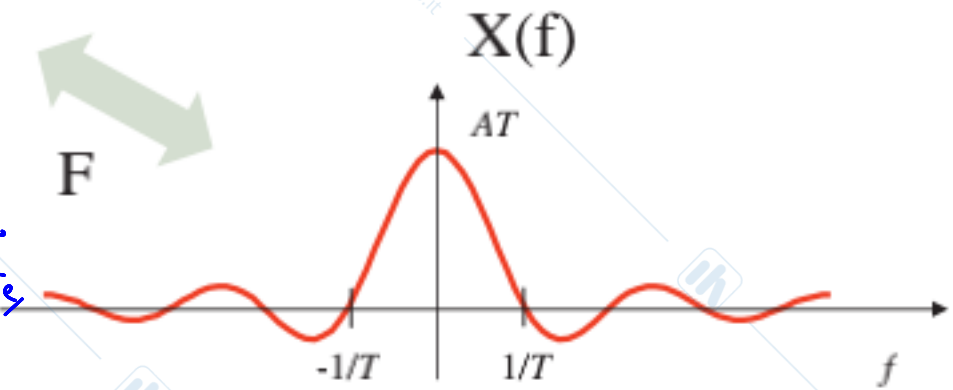
$$x(t) = \boxed{A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)} \Leftrightarrow \quad X(f) = A\int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j2\pi ft)\,dt = AT\,\frac{\sin \pi fT}{\pi fT} = \boxed{AT\,\mathrm{sinc}(Tf)}$$

$\frac{\sin x}{x}$

Seno cardinale



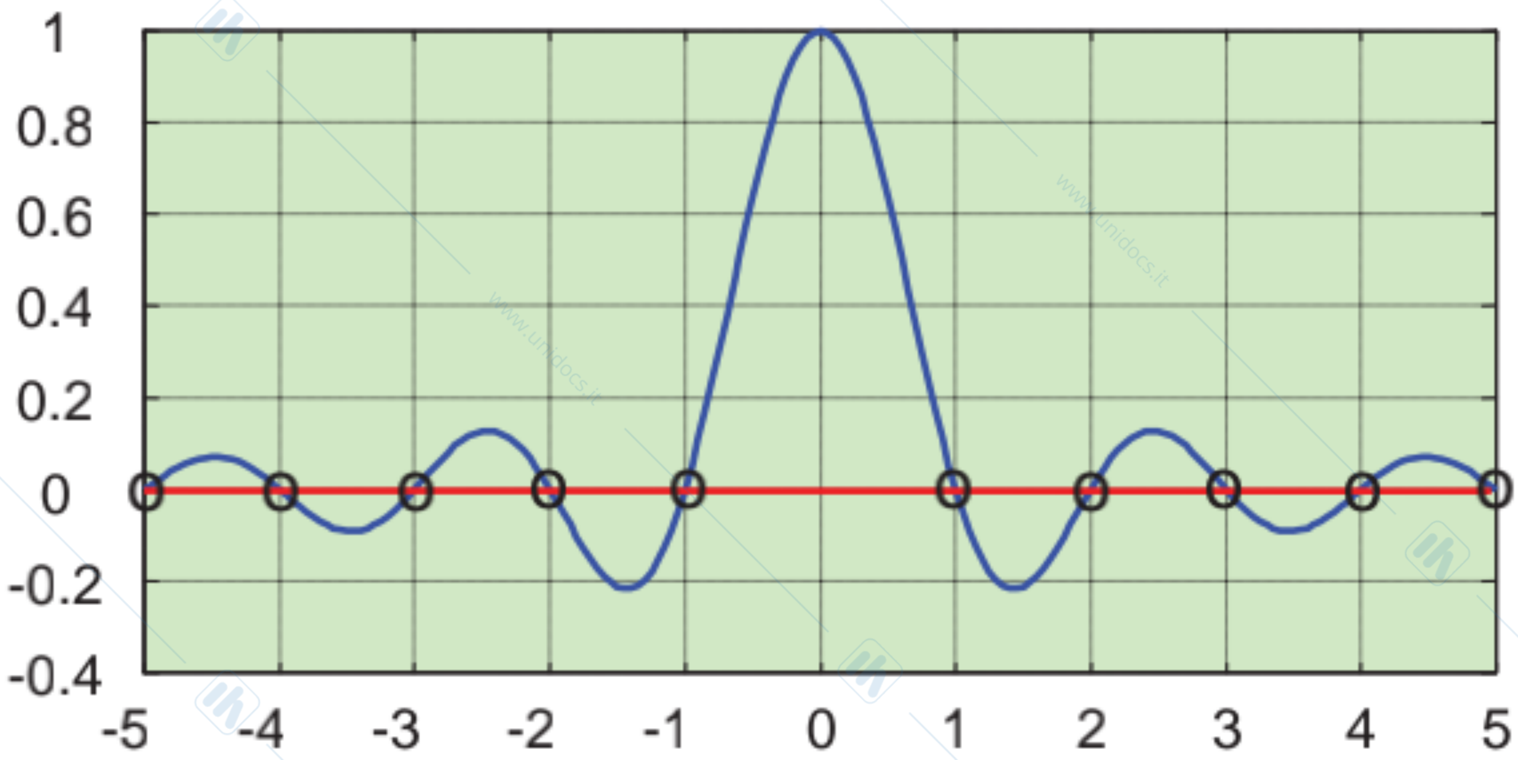
Nelle misure il fatto di misurare in un intervallo di tempo finito significherà, matematicamente, moltiplicare per un "rettangolo" del genere



Seno cardinale

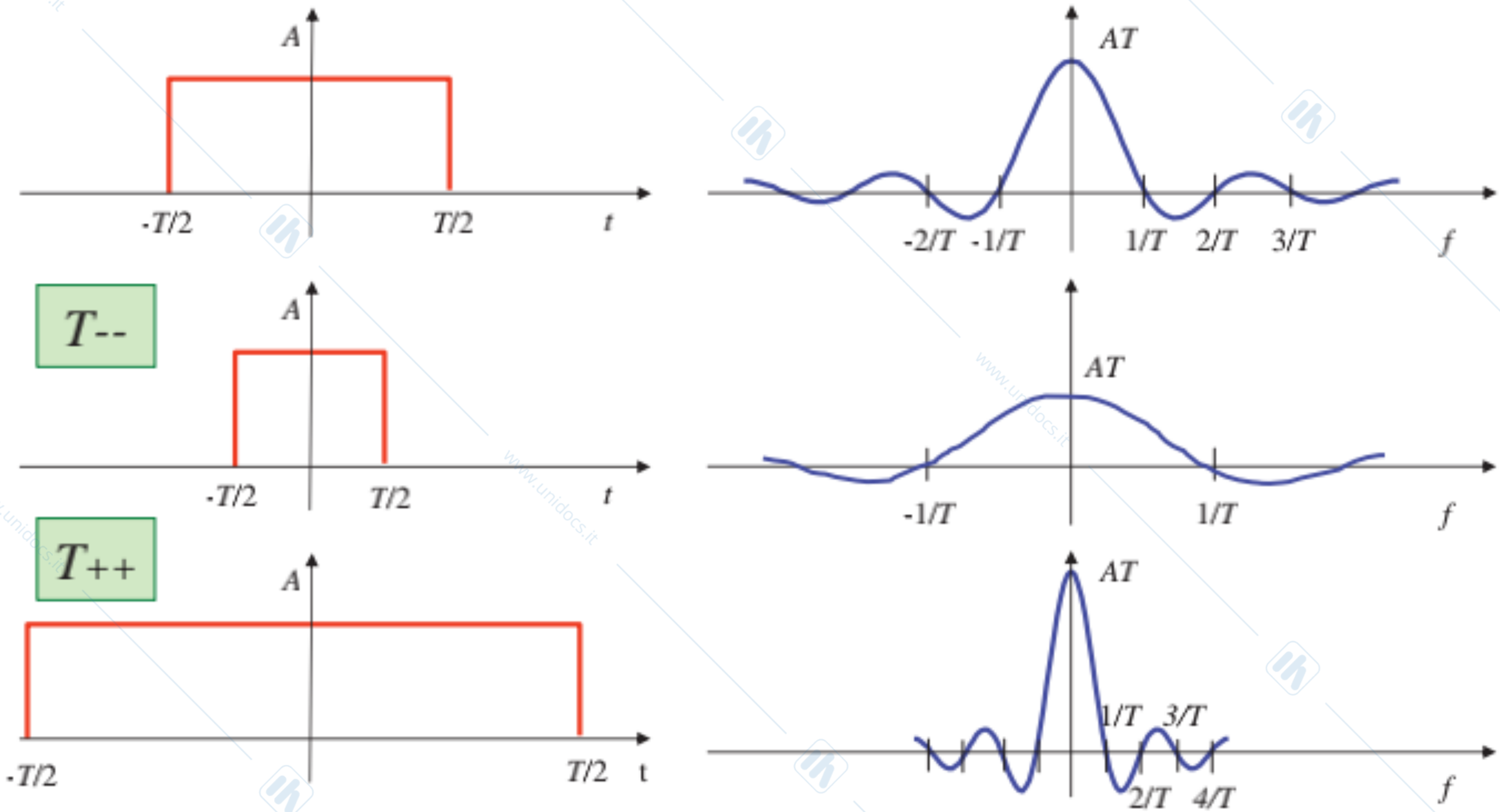
$$\mathrm{sinc}(f) = \frac{\sin \pi f}{\pi f}$$

Si annulla per tutti i valori interi di f tranne nell'origine, dove ha valore unitario



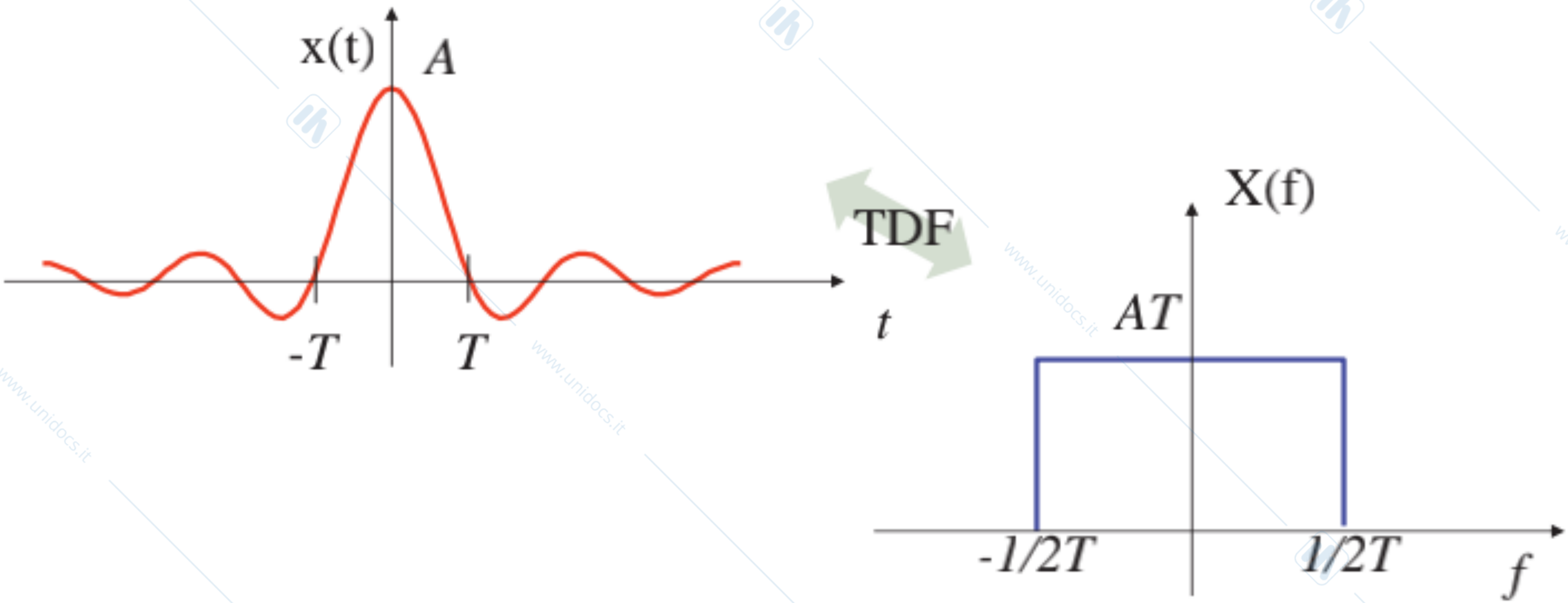
Scalatura del rettangolo

$$x(t) = A\ rect\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(Tf)$$



Esempi di trasformata di Fourier (il sinc)

$$x(t) = A\ sinc\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = AT\ rect(fT)$$



Proprieta' della TDF (4)

6 **Traslazione nei tempi**: la TDF del segnale ritardato e' uguale a quella del segnale originale moltiplicata per un esponenziale complesso

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\text{TDF}} e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

7 **Traslazione nelle frequenze**: traslare in frequenza la TDF del segnale equivale a moltiplicare il segnale nei tempi per un esponenziale complesso

$$x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TDF}} X(f-f_0)$$

8 **Derivazione nei tempi**: la TDF del segnale derivato nel tempo e' uguale a quella del segnale originale moltiplicata per $j2\pi f$:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt}} \xrightarrow{\text{TDF}} \boxed{j2\pi f\, X(f)}$$

SE IN UN DOMINIO FACCIAMO IL PRODOTTO NELL'ALTRO DOMINIO DOBBIAMO FARE LA CONVOLUZ.

Proprieta' della TDF (5)

Moltiplicazione nelle frequenze: la TDF inversa del prodotto delle TDF di due segnali e' uguale all'integrale di convoluzione dei segnali nei tempi. L'integrale di convoluzione e' un operatore utilizzato, per esempio, per descrivere come vengono modificati i segnali quando passano attraverso sistemi lineari tempo-invarianti.

convolut. nel tempo $\xrightarrow{\text{in freq.}}$ molt. segn. in freq.

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \xrightarrow{\text{TDF}} \quad X(f)H(f)$$

Moltiplicazione nei tempi: la TDF del prodotto di due segnali e' uguale all'integrale di convoluzione delle due TDF (nelle frequenze).

molt. segnali nel tempo → in freq. → convoluzione in freq.

$$x(t)y(t) \quad \xrightarrow{\text{TDF}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi) Y(f-\xi) d\xi$$

Proprieta' della TDF (6)

Relazione di Parseval: l'energia di un segnale e' uguale all'integrale del modulo quadrato della sua TDF

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$|X(f)|^2$ integrata su tutto l'asse delle frequenze fornisce l'energia del segnale.

$|X(f)|^2$ *df* rappresenta l'energia del segnale in ogni intervallo di frequenze infinitesimo *df*.

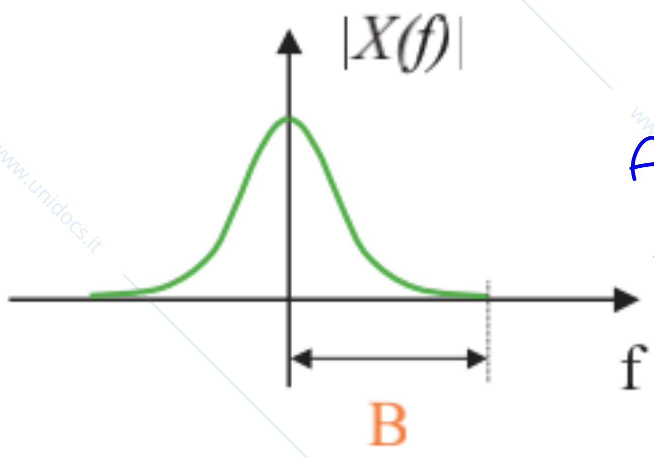
$|X(f)|^2$ viene detta DENSITA' SPETTRALE DI ENERGIA

Banda di un segnale

Viene definita **banda (B) del segnale x(t)** l'intervallo di frequenze (misurato sul semiasse positivo) all'interno del quale *X(f)* assume valori diversi da 0. Molto spesso *X(f)* è a rigore diversa da 0 da $-\infty$ a ∞. In questo caso la banda corrisponde all'intervallo di frequenza in cui *X(f)* è "significativamente" diversa da 0.

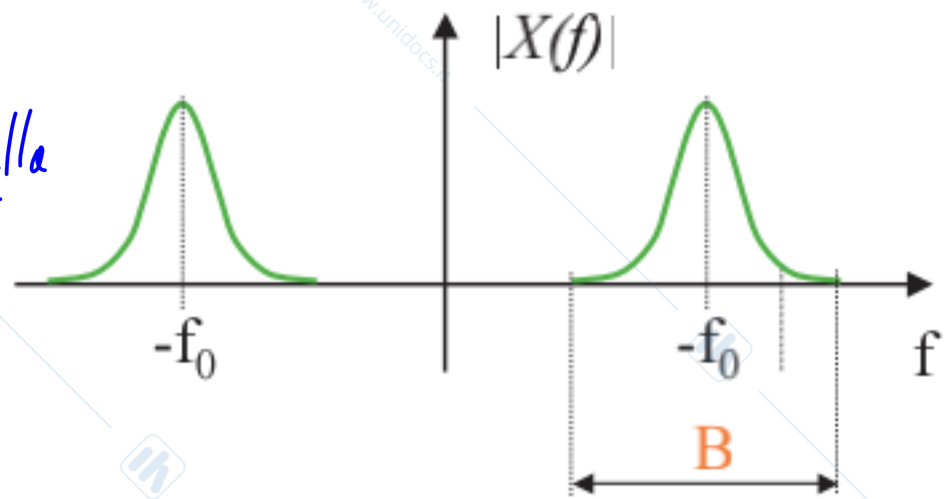
Operativamente, nella definizione di banda, si considerano due classi di segnali:

Segnali di tipo passa-basso
X(f) concentrata intorno a $f=0$



Fuori dalla banda è $\emptyset$

Segnali di tipo passa-banda
X(f) concentrata intorno a $f=\pm f_0$

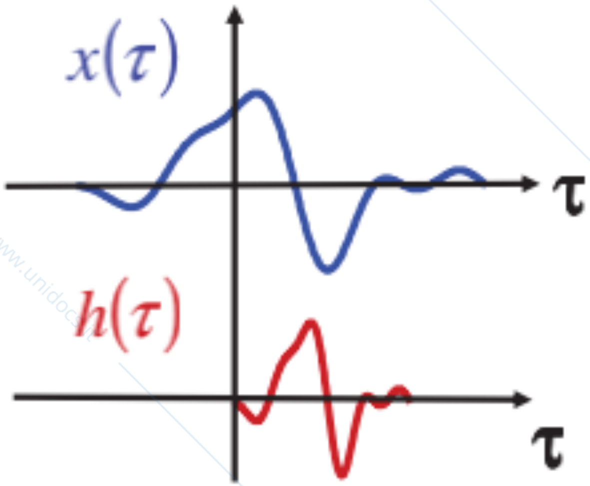


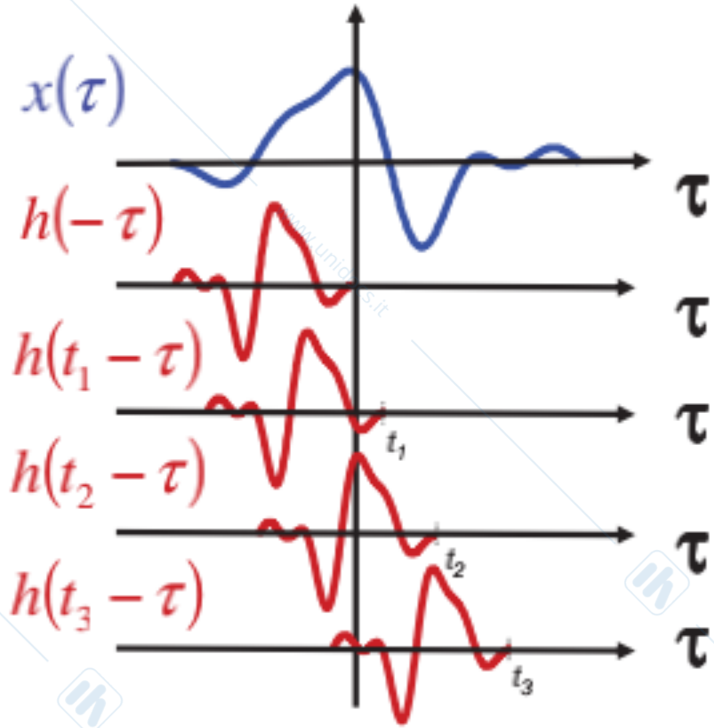
Calcolo dell'integrale di convoluzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

L' integrando $x(\tau)\, h(t-\tau)$

e' il prodotto tra il segnale $x(\tau)$ e la risposta all'impulso $h(\tau)$ ribaltata in τ traslata di t (verso destra se $t>0$, verso sinistra se $t<0$)

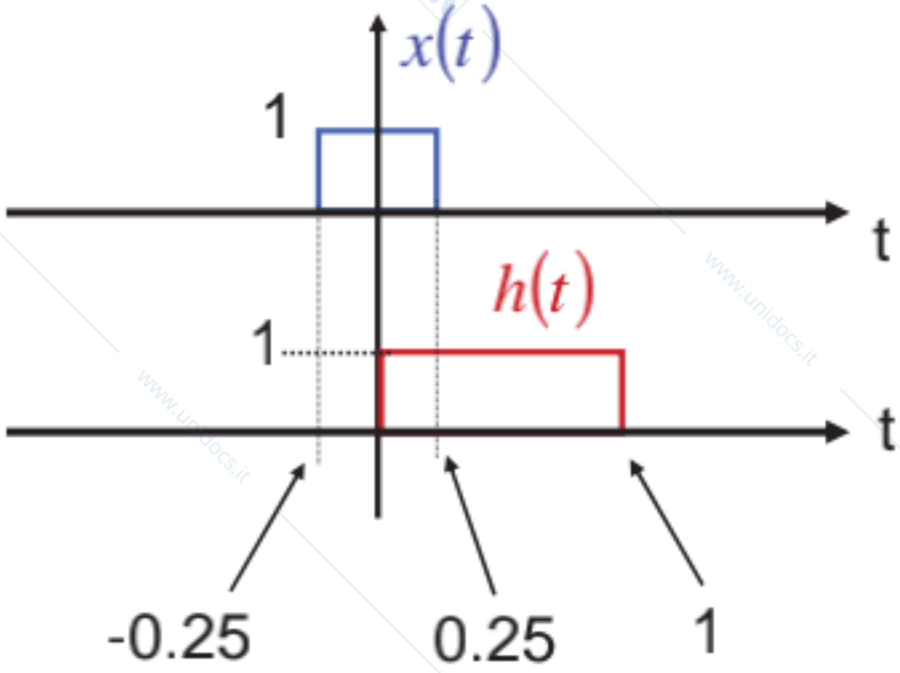




Esempi di calcolo della convoluzione (1)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = \mathrm{rect}(2t)$$
$$h(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2)$$



Esempi di calcolo della convoluzione (2)

$x(t) = \mathrm{rect}(2t)$

$h(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2)$

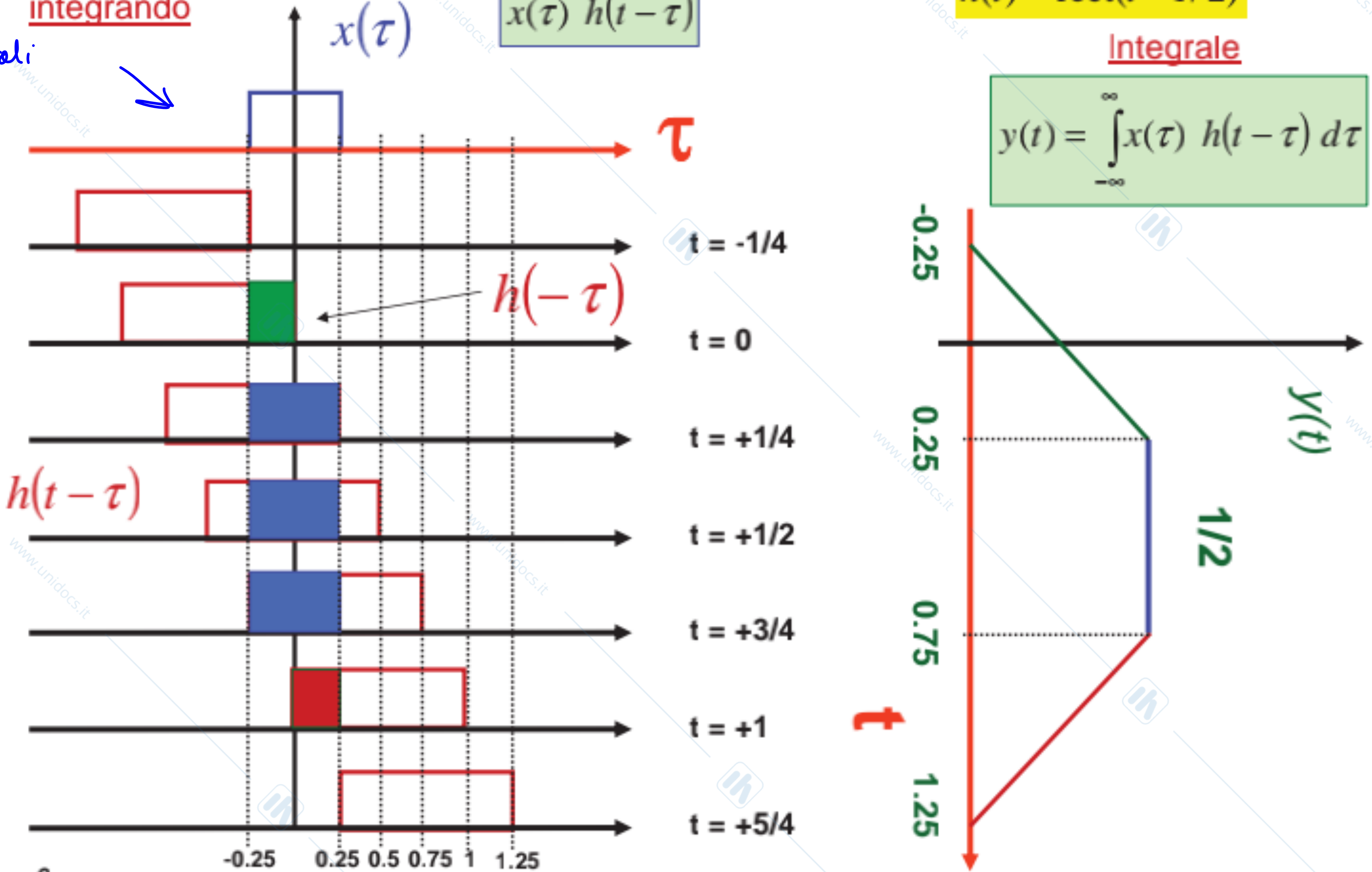
integrando

integrali = aree

$x(\tau)\ h(t-\tau)$

Integrale

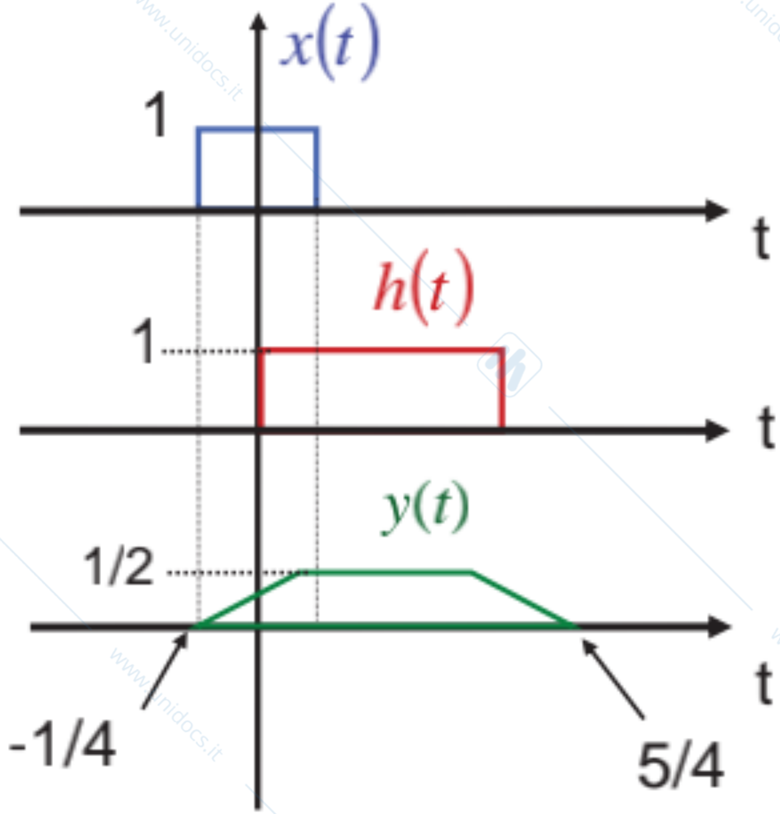
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau$$



Osservazioni su $y(t) = rect(2t) * rect(t - 1/2)$

$x(t)$ "inizia" nell'istante $t_x = -1/4$
$h(t)$ "inizia" nell'istante $t_h = 0$

→ $y(t)$ "inizia" nell'istante $t_x + t_h = -\frac{1}{4}$



$x(t)$ "dura" 1/2
$h(t)$ "dura" 1

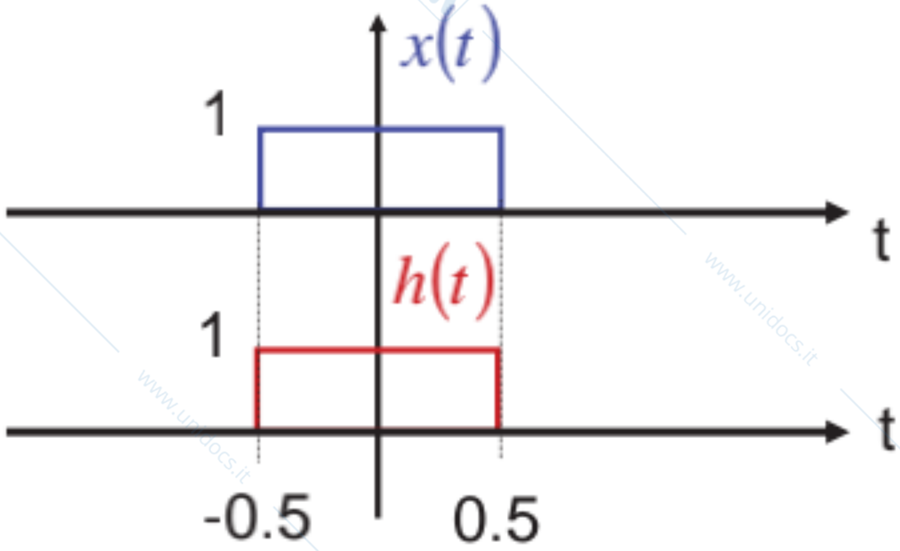
→ $y(t)$ "dura" $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$y(t)$ é lineare a tratti e continua, perché convoluzione di funzioni costanti a tratti

Esempi di calcolo della convoluzione (3)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = h(t) = \mathrm{rect}(t)$$

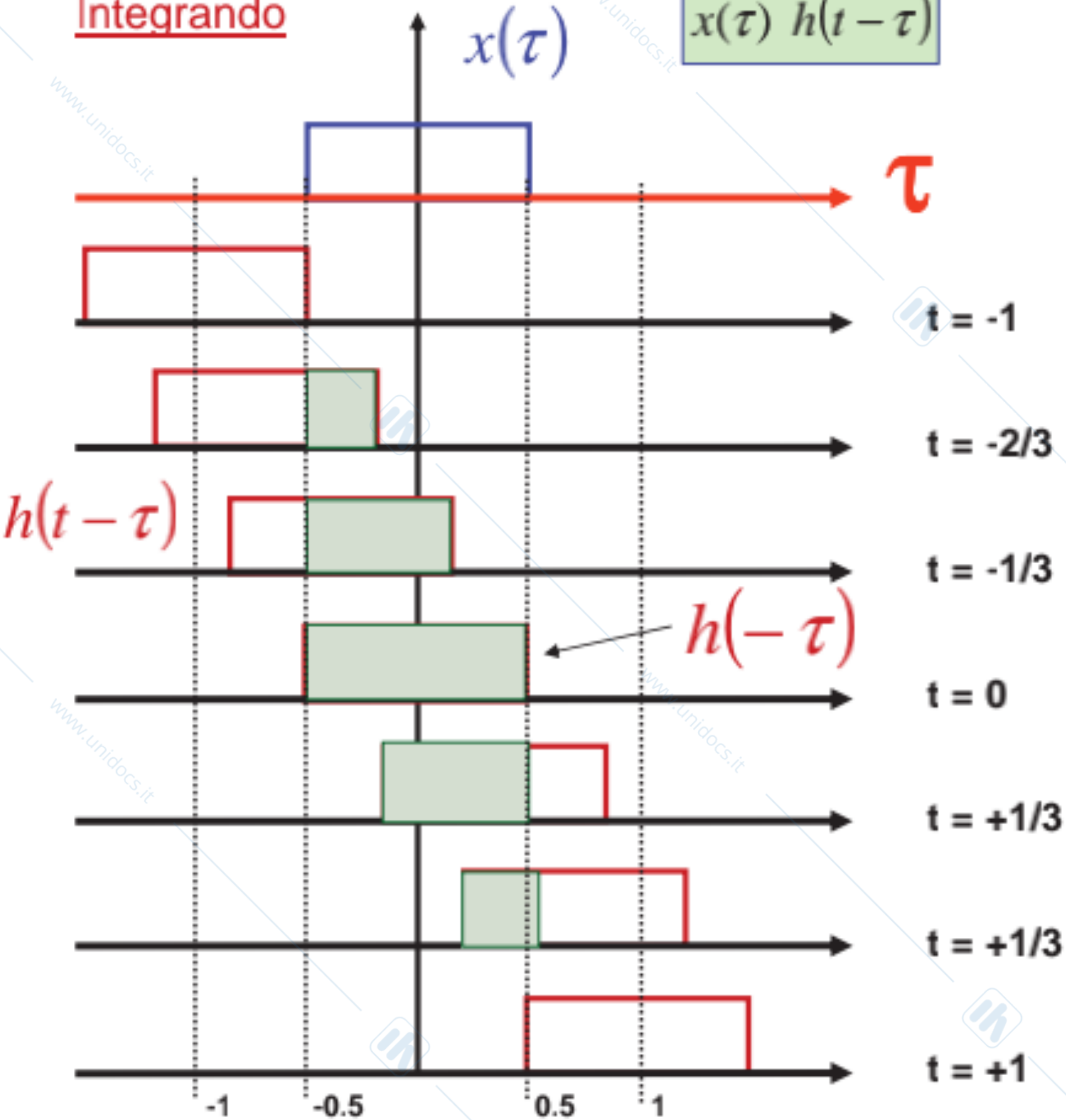


Esempi di calcolo della convoluzione (4)

$$x(t) = h(t) = \mathrm{rect}(t)$$

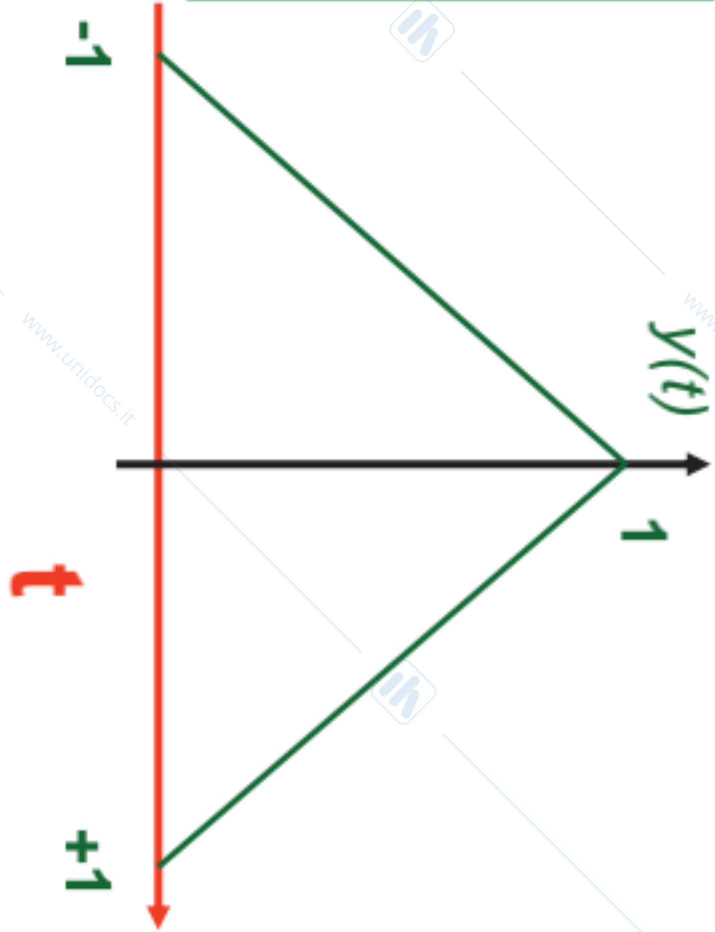
Integrando

$$x(\tau)\ h(t-\tau)$$



Integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau$$



Ultima proprietà:

Se un segnale è periodico, la sua trasf. di Fourier è un impulso (delta di Dirac)

↳ e viceversa