

GLI ERRORI DI MISURA

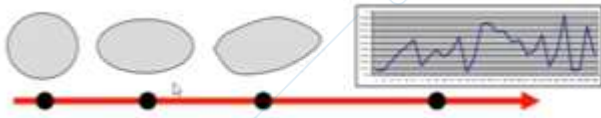
A cosa devo l'errore

Partiamo con una prima osservazione, perché ci sono gli errori di misura? In realtà questa domanda è più complessa di quanto si creda e ha diverse risposte. Si osserva che, andando ad eseguire più volte la stessa misura, questa non sempre renderà lo stesso valore e questo può essere dovuto principalmente a tre aspetti:

- la “non invarianza temporale”, per cui vorremmo andare a misurare un qualcosa che idealmente è costante, ma che in realtà ha delle piccole oscillazioni temporali. Ad esempio, se io volessi andare a misurare la temperatura, lo strumento in media per rilevarla ci impiega 30 secondi, per cui in quei 30 secondi la temperatura potrebbe essere leggermente variata.
- l'incompletezza del modello usato per descrivere il sistema oggetto di misura. Ad esempio, se volessi misurare la lunghezza di una molla, ed usassi come relazione tra allungamento e forza la classica legge di Hooke, questa darebbe sicuramente degli errori in quanto per quanto leggera posso fare la molla, anche quella ha una sua inerzia e un suo peso che nel complessivo del sistema viene trascurato.
- perturbazioni del fenomeno e della misura dovuta al rumore o a un errore dell'operatore. Un esempio banale, la misurazione di un diametro di un albero con un calibro che magari, inclino in modo errato e quindi dare misura diverse al variare dell'operatore.

Un altro errore comune nelle misurazioni è quello di assegnare una definizione sbagliata ad una misura.

Consideriamo ad esempio di voler valutare le dimensioni di una barra, appare chiaro che quindi io posso



decidere quanto approssimare la mia barra. Se io ad esempio la guardo da lontano, potrei dire che quella barra è circolare ed andare a misurare come unica misura importante il diametro. Avvicinandomi però,

potrei andare invece ad accorgermi che quella barra ha una forma leggermente ellittica, il diametro quindi sarebbe una misura affetta da errore adesso e pertanto dovrei andare a misurare i due semiassi per definire al meglio le dimensioni. Guardando ancora meglio però osservo che l'oggetto presenta anche delle irregolarità di produzione e che pertanto non è neanche un'ellisse perfetta. Vado quindi a descrivere le dimensioni impiegando una relazione $r(\theta)$. Potendo scendere poi ancora più sotto si arriva alle definizioni di rugosità e così via.

Abbiamo visto un chiaro esempio di come sia facile commettere errori di misura semplicemente sbagliando un modello o una definizione per cui è importante scegliere bene a ricordare che **“niente è più misurabile della sua definizione”**. In particolar modo questo vuol dire che io, nonostante gli errori assumo io cosa voglio misurare.

Metodi di approccio – Classico

Tale modello prevede che, per ogni misura esista per definizione di misura stessa, quello che viene chiamato **valore vero**. Il valore vero di una misura, noi non potremmo conoscerlo in quanto è una misura eseguita in condizioni ideali di un fenomeno ideale. Il valore vero a nostra disposizione e metrologicamente accessibile è invece sempre affetto da errore.

Per cui ogni misurazione la scriviamo come:

$$x_{\text{vero}} = x_{\text{misurato}} \pm \varepsilon$$

con ε corrispondente all'errore.

Nel metodo classico quindi, per ottenere una misura, non possiamo affidarci ad una sola rilevazione, ma piuttosto se ne fanno diverse, non un numero preciso, ma n misurazioni, le quali potranno tornare uguali o diverse tra loro. Ottenuto un insieme di misure tutte ovviamente della stessa grandezza, non esistendo il valore vero, per avvicinarci il più possibile a tale valore si va ad eseguire la media dei valori ottenuti.

A tale valore medio si va a sottrarre o sommare poi, non tanto l'errore quanto quello che su una gamma di misurazioni indica l'incertezza e si indica con Δ .

$$x_0 \pm \Delta$$

Questa relazione esprime quindi l'insieme che contiene il sicuramente il valore vero del misurando, mentre il Δ indica l'incertezza complessiva.

Avere un'incertezza di piccole dimensioni non significa avere però un valore accurato, ma ripetibile. Per valutare l'accuratezza avremo bisogno di definire altri tipi di errore.

L'intervallo Δ quindi non vuole esprimere l'errore quanto piuttosto un **range di ignoranza/equivalenza ed imperfezione dei risultati**. Data una misura quindi ad esempio 100 metri \pm 1m significa che io posso prendere senza distinzioni un valore qualsiasi tra 99m e 101m.

Detto questo però... come posso andare a calcolare il Δ ?

Per rispondere a questa domanda partiamo da un concetto base ovvero come si classificano gli errori.

Classificazione degli errori

Gli errori di misura si suddividano in tre principali tipologie:

- **Sistematici**: che agiscono su tutta la gamma di misurazioni eseguite in modo costante in valore e segno. questi sono dovuti ad errori di taratura solitamente e di grandezza della scala.
- **Parassiti**: che agiscono solo su di una misura, la quale registra un valore anomalo. Di questi è molto difficile individuarne la causa e dobbiamo quindi imparare a riconoscerli ed escludere la misura.
- **Casuali**: detti anche accidentali, sono presenti in ogni misura sia in valore positivo che negativo. Sono dovuti all'impossibilità di eseguire una misura esatta e vengono trattati secondo la teoria degli errori.

La classificazione degli errori può anche essere eseguita secondo la fonte:

- **connessi allo strumento**: per cui ad esempio lo strumento non era adeguato alla misurazione che volevo fare
- **connessi con la misurazione**: dove vado a commettere un errore sulla tipologia di misura che faccio o altero io stesso come operatore la misurazione.
- **connessi con l'ambiente**: dove l'ambiente interferisce con dei disturbi soprattutto di tipo elettromagnetico

Per cercare quindi di prevenire gli errori possiamo fare una **protezione passiva**, dove si cerca di isolare il più possibile la misura e rendere insensibile lo strumento all'ambiente esterno, ma questo non è mai sufficiente dobbiamo andare ad eseguire anche una **protezione attiva**, ovvero compensando e correggendo l'uscita. Tutto questo ovviamente non può prescindere da una taratura ad oc fatto per e condizioni di misura richieste.

Un errore ovviamente poi può essere **identificabile e quindi evitabile o non identificabile e quindi compensabile o correggibile**.

Un errore può essere poi riducibile oppure no. Per **riducibile** si intende che la misura può essere ripetuta n volte ed il contenuto informativo aumenta spalmando poi l'errore su n misure. Un errore invece che non è riducibile vuol dire che è insensibile al ripetersi delle misure.

Una misura riducibile, per la quale possiamo fare quindi n misure ripetute e una grandezza "tempo invariante" per la quale non abbiamo avuto modifiche delle condizioni nominali di misura.

Errori casuali e distribuzione gaussiana delle misurazioni

Data quindi una gamma di misurazioni fatte da 1 a n, possiamo definire il valore medio della misurazione con x_0 . La misurazione esatta invece viene definita in funzione come abbiamo detto dell'incertezza della misura per cui come:

$$x_i = x_0 \pm \varepsilon_i$$

dove la x_i è detta **variabile casuale**. Una variabile casuale non è altro che un valore possibile esatto di misurazione che ha una **distribuzione gaussiana di range ampio ε intorno al valore medio** che resta quello più frequente ed attendibile x_0 .

Nella teoria gaussiana il **valore medio** viene generalmente indicato con μ mentre l'**incertezza** con σ .

Si ricorda quindi che data una gamma di misurazioni, la distribuzione gaussiana si ottiene con i calcoli della **deviazione standard (deviazione quadratica media) e delle media**. Per una distribuzione discreta o continua di misure abbiamo quindi:

Altri due parametri che il misurista usa molto poco sono la **moda e la**

mediana che danno indicazioni soprattutto per quanto riguarda la diagnosi. Si ricorda poi che la **moda** per una distribuzione continua coincide con il valore più alto della distribuzione mentre per una gamma discreta con il valore più ripetuto sulla gamma. La mediana invece per una distribuzione continua coincide con il valore che divide l'area sottesa al grafico di distribuzione in due parti uguali mentre per una distribuzione discreta con il valore centrale della retta di ordinamento delle misure.

Si ricorda che per una distribuzione simmetrica come quella gaussiana che descrive l'errore, **moda, mediana e media coincidano**.

La misurazione che io faccio quindi ha una probabilità gaussiana di essere accurata. **Una qualsiasi misurazione che io faccio quindi avrà una probabilità del 68,3% di cascare in un intorno di raggio σ , il 95% in un intorno di raggio 2σ** e così via fino ad avere una probabilità praticamente certa di avere la misura entro un certo range di errore.

Abbiamo quindi in parte risposto alla nostra domanda e possiamo **quindi concludere in parte che:**

Per una distribuzione continua:

Media: $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx$

Deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx}$$

Per una distribuzione discreta:

Per la popolazione:

Media: $\mu = \frac{\sum_i x_i}{n}$

Deviazione standard:

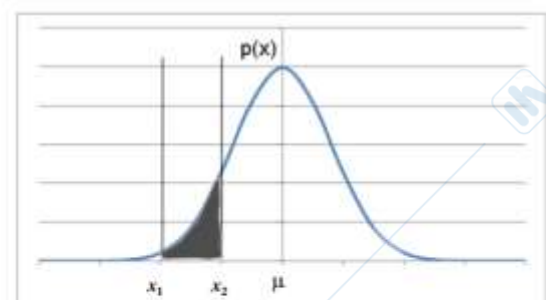
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n}}$$

Per il campione:

Media: $m = \frac{\sum_i x_i}{n}$

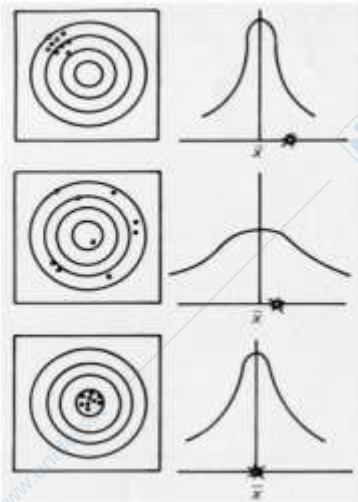
Deviazione standard:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n-1}}$$



$$\begin{aligned} 68,3\% &= P\{\mu - 1,00 \sigma < X < \mu + 1,00 \sigma\} \\ 95,0\% &= P\{\mu - 1,96 \sigma < X < \mu + 1,96 \sigma\} \\ 95,5\% &= P\{\mu - 2,00 \sigma < X < \mu + 2,00 \sigma\} \\ 99,0\% &= P\{\mu - 2,58 \sigma < X < \mu + 2,58 \sigma\} \\ 99,7\% &= P\{\mu - 3,00 \sigma < X < \mu + 3,00 \sigma\} \end{aligned}$$

$$\underline{x_0 \pm \Delta \rightarrow \mu \pm 3\sigma}$$



Ripetibilità

Accuratezza

Precisione

Se andiamo a riflettere invece fisicamente sulle dimensioni della gaussiana possiamo dedurre facilmente che, **tanto più una misura è ripetibile tanto più la gaussiana sarà stretta, mentre tanto più la misura sarà accurata tanto sarà più bassa e larga. Una misura ad oc ha una distribuzione gaussiana che è una via di mezzo delle due.** Come sappiamo poi, la combinazione di un grande numero di variabili aleatorie x_i indipendenti, indipendentemente dalle forme distributive, è distribuita approssimativamente come una variabile casuale normale per cui da tanti più parametri dipende la misurazione tanto più accurata sarà lo studio di probabilità gaussiano.

Nelle gaussiane si ricorda poi che abbiamo anche altre due grandezze utili, la **probabilità e la frequenza.**

Si definisce poi **probabilità p** il rapporto che persiste tra gli h modi possibili di presentarsi si un evento e il totale di N ugualmente probabili modi possibili.

Si definisce invece **frequenza** come un evento E che si è presentato "a" volte su di un numero totale di "n" eventi.

$$\underline{p_E = \frac{h}{N} \quad f_E = \frac{a}{n}}$$

In una serie di prove, ripetute un grande numero di volte nelle stesse condizioni, ciascuno dei risultati possibili si manifesta con una frequenza relativa che approssima il valore della probabilità, l'approssimazione ordinariamente cresce con il numero delle prove per cui

$$f_E \rightarrow n = \infty \rightarrow p_E$$

Ma come fare quindi a capire quando il numero di misurazione è sufficiente?

Dobbiamo ovviamente partire dalle definizioni appena citate e osservare che, la probabilità è un concetto teorico a posteriori, mentre la frequenza è un concetto pratico a posteriori. Sappiamo però che per n misure ripetute con n che tende ad infinito, frequenza mi tende alla probabilità.

Si può dimostrare poi che dati due eventi A e B , la probabilità che accadano entrambi è data dalla somma delle probabilità mentre che accadano uno o l'altro è dato dal prodotto di queste.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Abbiamo poi detto che all'aumentare del numero di misurazioni tende a decrescere quindi l'incertezza fino al suo limite "intrinseco" dove il limite intrinseco è una barriera tecnologica causata da una procedura errata o una scarsa precisione dello strumento.

L'incertezza è quindi ineliminabile e se ne definisce una **ottimale** che contiene un livello ottimale di contenuto informativo. Un valore n minimo di misurazioni necessarie quindi può essere trovato andando a

ribaltare una delle formule di incertezza viste e fissando noi stessi un valore di incertezza massimo che vogliamo avere ricordando che comunque questo non può essere inferiore all'incertezza ottimale.

L'incertezza

L'incertezza, che a questo punto prende il posto dell'errore, di suddivide secondo normative in due tipi, **riducibile (tipo A) e non riducibile (tipo B)**.

La **tipo A** è riducibile eseguendo più misure per cui questa trasporta un effettivo contenuto informativo (distribuzione della frequenza osservata) **che cresce all'aumentare del numero di misure**. Una di tipo B invece è insensibile al ripetersi delle misure e non seguano la distribuzione gaussiana.

L'incertezza come abbiamo detto la possiamo andare a valutare tramite la deviazione standard su di una gamma di misura, ma in alternativa esiste anche una **incertezza di categoria A in cui la dispersione del valor medio è calcolabile come:**

$$u_A(x) = s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

per cui la misurazione viene espressa come:

$$x = \bar{x} \pm s(x)/\sqrt{n}$$

dove $s(x)$ è l'incertezza sul campione in questione.

Misure indirette - Propagazione degli errori - Incertezza composta

Se la grandezza da valutare non è misurata direttamente, ma misurando altre grandezze ad essa legata da una relazione analitica la sua incertezza si può derivare dall'incertezza delle singole variabili.

Data quindi una grandezza $y = f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, se \bar{x}_i è il risultato della misura i -esima e $u_i(x)$ l'incertezza su ognuna di esse, allora:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

rappresenta il risultato della misura indiretta con incertezza $u_c(y)$ ricavabile dalla singole incertezze sulle misure da cui dipende y .

Dato infatti:

$$x_i = \bar{x}_i \pm \Delta x_i \quad \text{MISURA i-ESIMA!}$$

ho che la misurazione y valutata con incertezza sarà:

$$\bar{y} \pm \Delta y = f(\bar{x}_1 \pm \Delta x_1, \bar{x}_2 \pm \Delta x_2, \bar{x}_3 \pm \Delta x_3, \dots, \bar{x}_n \pm \Delta x_n)$$

che sviluppata in serie di Taylor da:

$$\bar{y} \pm \Delta y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1} \Delta x_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \Delta x_n$$

da cui:

$$\Delta y = \frac{\delta f}{\delta x_1} \Delta x_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \Delta x_n$$

Quanto appena detto era dimostrabile per una generica funzione anche tramite il differenziale logaritmico per cui, se avevo G come misura derivata, data dalle seguente funzione generica:

$$G = a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

$$\ln G = \alpha \ln a + \beta \ln b + \gamma \ln c$$

avevo che allora:

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\alpha \Delta a}{a} + \frac{\beta \Delta b}{b} + \frac{\gamma \Delta c}{c}$$

da cui si arriva a:

$$\Delta G = \left(\frac{\alpha \Delta a}{a} + \frac{\beta \Delta b}{b} + \frac{\gamma \Delta c}{c} \right) G$$

Dalle seguenti osservazioni Gauss quindi determino delle formule che potessero definire la propagazione degli errori, tenendo conto però non di tutti gli errori come appena fatto, o degli errori massimi nel caso in cui decidessimo di arrestare lo sviluppo in serie ad un ordine prossimo al primo, ma **solo degli errori più probabili**. Il procedimento a dire il vero è molto simile e apporta solo una modifica, ovvero quella di elevare alla seconda il differenziale della funzione in modo tale che gli errori meno probabili o più piccoli diventino trascurabili e che pesino di più quelli che sono più grossi o frequenti.

$$z = f(x, y)$$

$$z_i = f(\bar{x} + \Delta x_i, \bar{y} + \Delta y_i)$$

$$\Delta z_i = z_i - \bar{z} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y_i \right)$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum_1^n \Delta z_i^2}{n-1} \quad \sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=\bar{x}}^2 \frac{\sum_1^n \Delta x_i^2}{n-1} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y=\bar{y}}^2 \frac{\sum_1^n \Delta y_i^2}{n-1}$$

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=\bar{x}}^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y=\bar{y}}^2 \sigma_y^2$$

In generale quindi possiamo scrivere la formula come:

$$(\Delta y)^2 = \sigma_y^2 = \sum \left(\frac{\delta y}{\delta x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

e chiamiamo questa funzione **deviazione standard**, la quale è più verosimile e consigliata da usare.

Questa formula quindi per operazioni generiche ci dice che:

$$y = a + b \rightarrow \sigma_y^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$$

$$y = a \cdot b \rightarrow \sigma_y^2 = b \cdot \sigma_a^2 + a \cdot \sigma_b^2$$

$$y = a \cdot b \cdot c \rightarrow \sigma_y^2 = bc \cdot \sigma_a^2 + ac \cdot \sigma_b^2 + ab \cdot \sigma_c^2$$

$$y = a^\alpha = (\alpha \cdot a^{\alpha-1}) \cdot \sigma_a^2$$

Esempio

Si consideri un tubo di Pitot immerso in una vena di aria; nei limiti dell'ipotesi di fluido non viscoso (Re elevato) od incomprimibile (Mach basso), si ha

$$C = \sqrt{2 \frac{\Delta P}{\rho}} = \sqrt{2 \Delta P \frac{T_a R}{P_a}} = (2 \Delta P R \frac{T_a}{P_a})^{1/2}$$

essendo $\Delta P = P_T - P_a$

Le variabili indipendenti sono ΔP , T_a , P_a . I disturbi possibili sono:

- disallineamento della sonda con il flusso
- perdite di fluido nelle giunzioni dei tubi
- variazioni nel diametro o nelle condizioni superficiali del manometro
- fluttuazioni di pressione P_a , temperatura T_a , pressione totale P_T

Per applicare quindi la formula della deviazione standard andiamo a calcolare a valutare le derivate per tutte le variabili.

Valutiamo le derivate:

$$\frac{\partial C}{\partial \Delta P} = \frac{1}{2} (2R \frac{T_a}{P_a})^{1/2} \Delta P^{-1/2} \quad \frac{\partial C}{\partial P_a} = - \frac{1}{2} (2R T_a \Delta P)^{1/2} P_a^{-3/2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial T_a} = \frac{1}{2} (2R \frac{\Delta P}{P_a})^{1/2} T_a^{-1/2}$$

Si ha perciò

$$W_C = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{2RT_a}{P_a \Delta P} W_{\Delta P}^2 + \frac{1}{4} \frac{2RT_a \Delta P}{P_a^3} W_{P_a}^2 + \frac{1}{4} \frac{2R \Delta P}{P_a T_a} W_{T_a}^2}$$

dove W indica l'incertezza della misura indicata a pedice.

Si suppone di misurare quindi T_a con un termometro a mercurio, ΔP con un nanometro a v differenziale e P_a con un manometro a tubo di Bourdon.

Supponendo che le incertezze per ognuno di questi strumenti siano definite possiamo quindi ad dire che:

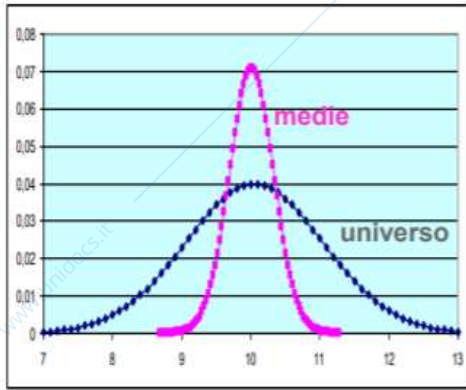
$$\begin{aligned} \Delta P &= 203 \pm 2.5 \text{ mm H}_2\text{O} && 20:1 \\ T_a &= 292.8 \pm 0.1 \text{ }^\circ\text{K} \\ P_a &= 101000 \pm 2000 \text{ Pa assoluti} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha

$$\frac{W_C}{C} = \pm 0.1166 = \sqrt{\underbrace{0.00616^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{termine} \\ \text{da} \\ W_{\Delta P}}} + \underbrace{0.0099^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{da} \\ W_{P_a}}} + \underbrace{0.00001^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{da} \\ W_{T_a}}}}$$

La distribuzione delle medie

Sia dato un "universo" di misure, dove per universo si intende una distribuzione Gaussiana di misure. Presi poi n elementi dell'universo, ovvero scelte casualmente n misure posso calcolare una media e una deviazione standard (μ e σ). Chiamo dunque ogni gruppo di n misure, **gruppo campione** e vado a raccogliere più gruppi, per ognuno di essi valuto poi la media. Posso quindi andare a graficare anche la distribuzione delle medie e osserverò che:



Ogni gruppo campione presenterà in realtà un valor medio e una σ che sono valutabili anche essi come una distribuzione gaussiana. Per cui è possibile definire sia una deviazione standard per ogni gruppo, che una deviazione standard sulle incertezze di ogni gruppo per ricavare l'incertezza della distribuzione. In poche parole, l'universo ammette dei valori esatti di μ e σ che discostano dai valori m e s (media e scarto) di ogni gruppo campione. Per valutare quindi σ possiamo ricorrere alla media dei vari s ottenuti da ogni gruppo campione.

Detto quindi che:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum \left(\frac{\delta y}{\delta x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2}$$

valutando il valore medio per n σ_i possiamo scrivere che:

$$\sigma_m = \sqrt{\sum \frac{1}{n} \sigma_{x_i}^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma$$

che rappresenta sia l'incertezza sulla media che la media delle incertezze precedenti.

Possiamo quindi scrivere che, in ogni caso, il valore medio dell'universo cada nel range:

$$\mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m_i \leq \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Generalmente il problema che dobbiamo affrontare però è opposto per cui dobbiamo ricavare a partire dalla media m di un gruppo e dallo scarto di un campione s , l'intera media dell'universo μ e il range in cui questa cade. Per fare ciò si usa la così detta **formula di Student** che dice:

$$m - t \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m + t \frac{s}{\sqrt{n}}$$

con la **t** detta **t di Student** ed m ed s che sono i valori di media e scarto relativi a un campione dell'universo, ovvero stime su di un numero di finito di misure si μ e σ .

La t di Student indica quanto vogliamo rendere la nostra curva corretta a livello probabilistico. Osservando infatti che anche se presi n gruppi di campione, la distribuzione delle medie è gaussiana, si ha che:

- per $t=3$ otterrò un range di affidabilità più grande in cui sicuramente cascano almeno il 99,7% delle misure delle medie
- per $t=1.96$ avrò un range di incertezza quindi più piccolo, ma anche un fattore di affidabilità inferiore che mi dice che solo il 95% delle misure cascano realmente in quell'intervallo
- per $t=1$ invece solo il 66,6% delle misure cade nel range che otterrò

Ovviamente maggiore è il numero di misurazioni del campione di riferimento e più che la curva di Student che ottengo tenderà a somigliare alla distribuzione gaussiana delle medie.

Ricapitolando quindi:

- **dato un numero n di misure che compongano un gruppo campione**
- **m come valore della media del campione**
- **s_{n-1} incertezze sulle misure del gruppo campione**
- **s_{n-1}/\sqrt{n} incertezza sulla media m del gruppo campione**

Possiamo usare le seguenti formule:

$$m = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (m - x_i)^2}{n - 1}}$$

per cui ogni misura del gruppo campione cade al 99.7% (perché abbiamo usato 3 come parametro gaussiano) nel range:

$$m - 3s_{n-1} \leq x_i \leq m + 3s_{n-1}$$

mentre la media dell'universo cade nel range:

$$m - t \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m + t \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Facendo quindi un esempio numerico:

53,0	□ Media	$m = 56,5$	
57,3	□ Numerosità	$n = 10$	
52,6	□ Dev. st.	$s_{n-1} = 2,62$	$3 \cdot s_{n-1} = 7,9$
54,5	□ Dev. st. media	$s_{n-1}/\sqrt{n} = 0,83$	$3 \cdot s^* = 2,5$
60,9			
56,4	□ Media	$54 - 56,5 - 59$	
58,1	□ Diametri	$48,6 \div 64,4$	
57,5			
55,4			
58,9			

Φ 56,5 ± 7,9

Criterio di scarto dei valori anomali si Chauvenet

Se riguardiamo la distribuzione delle misure precedenti abbiamo chiaramente un valore che non torna molto a colpo d'occhio. A chiunque verrebbe da pensare quindi che sia una misurazione sbagliata e il che potrebbe starci. **Esiste quindi un metodo che permette di eliminare tutti quei valori che sono anomali e che sono causati dai così detti errori parassiti.** Tale metodo è un metodo probabilistico detto di Chauvenet e dice che:

“Un valore può essere considerato anomalo se la sua deviazione rispetto alla media è tale da avere una probabilità inferiore ad un predeterminato livello. Data una serie di N valori, se uno di essi ha una probabilità maggiore o pari a 0,5 di avere uno scostamento s_i rispetto alla media, maggiore di un certo valore calcolato s_p , allora tutte le misurazioni che presentano uno scostamento maggiore si dovrebbero scartare”

Detto questo quindi, se P è la probabilità che $s_i < s_p$ allora $1 - P$ è la probabilità che $s_i > s_p$. Se abbiamo quindi N valori la probabilità complessiva è di $N(1 - P)$ e quando questa è pari a 0,5 si ha il limite:

$$N(1 - P) = \frac{1}{2} \rightarrow P = 1 - \frac{1}{2N}$$

Sostanzialmente quindi $N \cdot (1 - P)$ indica il numero di valori che ci attendiamo fuori dall'intervallo che andiamo a considerare.

Se abbiamo ad esempio un insieme di 10 misure ($N=10$) e decidiamo di prendere come buone solo quelle che cascano all'interno dell'intervallo di σ abbiamo che la probabilità P che un valore caschi all'interno è del 68% ($P=0.68$). Per cui ci aspettiamo:

$$N(1 - P) = 10 \cdot (1 - 0.68) = 3.2$$

misure che non cadano nell'intervallo richiesto

Se prendiamo invece come intervallo 3σ allora la P passa a $P = 0,997$ per cui:

$$N(1 - P) = 0,03$$

Il criterio di Chauvenet stabilisce come limite di misurazione 0,5.

A livello pratico quindi:

- dato un numero $x_{min} \dots x_i \dots x_{max}$
- con una numerosità n , una media m e uno scarto s_{n-1}
- calcoliamo $P = 1 - \frac{1}{2N}$
- e otteniamo z da una funzione di P con z da considerare come parametro di depurazione per cui adesso se un valore non rispetta la seguente condizione:

$$m - zs_{n-1} \leq x_i \leq m + zs_{n-1}$$

deve essere scartato.

Si ricorda che se $P=0,997$ allora $z=3$, se $P=0,995$ allora $z=1,96$ e così via...

Una volta eliminata la misura, il campione si riduce a $N=9$ per cui abbiamo variato la nostra P che si è alzata ulteriormente. Il controllo di Chauvenet però è da ripetere in iterazione fintanto che tutte le misure non sono state verificate ed accettate.

Il criterio di Chauvenet è molto semplice quindi, ma non sempre è adatto per cui delle volte possiamo ricorrere ad altri metodi come:

- l'eliminazione delle code di Gauss, per cui se un valore cade al difuori dell'intervallo di 3σ è eliminabile
- l'esclusione del valore massimo e del valore minimo del campione.

Il criterio di Chauvenet, può essere applicata solo infatti quando abbiamo una distribuzione gaussiana dei dati cosa non da dare per scontata.

Altre possibili cause di anormalità sono il numero di osservazioni insufficienti, la non omogeneità della popolazione, presenza di errori sistematici, cause di ordine matematico e il così detto effetto deriva.

Confronto tra medie

Supponiamo di avere due macchine che producano sfere. Mi chiedo dunque se le macchine lavorano alla stessa maniera e quindi hanno la stessa produzione. Devo andare per cercare di capire ovviamente come lavorano a fare delle misurazioni su entrambe le serie di produzione per cui otterrò due gruppi campione.

Misurati quindi due gruppi campione:

□ ①	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 20px;">x_1</td> <td style="width: 20px;"></td> <td style="width: 20px;"></td> <td style="width: 20px;">x_i</td> <td style="width: 20px;"></td> <td style="width: 20px;"></td> <td style="width: 20px;">x_n</td> </tr> </table>	x_1			x_i			x_n	$m_1, s_{m1} = s_{n-1} / \sqrt{n}$
x_1			x_i			x_n			
□ ②	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 20px;">x_1</td> <td style="width: 20px;"></td> <td style="width: 20px;"></td> <td style="width: 20px;">x_i</td> <td style="width: 20px;"></td> <td style="width: 20px;"></td> <td style="width: 20px;">x_m</td> </tr> </table>	x_1			x_i			x_m	$m_2, s_{m2} = s_{m-1} / \sqrt{m}$
x_1			x_i			x_m			

definisco differenza dei gruppi campione come la misura:

$$z_{12} = m_i - m_j$$

che presenta valore medio pari a 0 (in quanto singolo valore) e scarto valutato tramite propagazione dell'errore per cui:

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{\frac{s_{n-1}^2}{n} + \frac{s_{m-1}^2}{m}}$$

Se si ottiene che:

$$\frac{z_{12}}{\sigma_z} \leq 1,96$$

si ha che le due misure sono comparabili e uguali al 95%.

I due campioni si possono quindi dire "equivalenti".

Analisi di regressione e correlazione

Una correlazione tra dei dati è una qualsiasi forma di relazione tra due variabili. **Studiare quindi una correlazione significa studiare come e quanto le due variabili variano insieme. Analizzare invece la forma delle relazioni tra le variabili si dice studiare la regressione.** In poche parole, con la correlazione vedo gli effetti di una forma, con la regressione come questa è cambiata.

Prendiamo per esempio una misura:

$$y = f(x, \beta_y)$$

dove x sono delle misure e β dei parametri.

Ipotizzo quindi per j valori di x, una gamma j di valori y per i quali quindi voglio riuscire a definire una funzione $f(x, \beta)$ che esprima la correlazione tra le misure.

Una cosa simile la abbiamo vista a calcolo numerico e abbiamo già osservato che uno dei metodi migliori per la valutazione della funzione che approssima i dati sperimentali è **l'approssimazione ai minimi quadrati**. Tale approssimazione prevede di poter usare come funzione approssimante quella che minimizza la distanza tra il valore esatto della misura y e quello ottenuto dalla relazione che vado a cercare. A livello matematico posso scrivere:

$$\sum [y^i - f(x_j^j, \beta_j)]^2 = \min$$

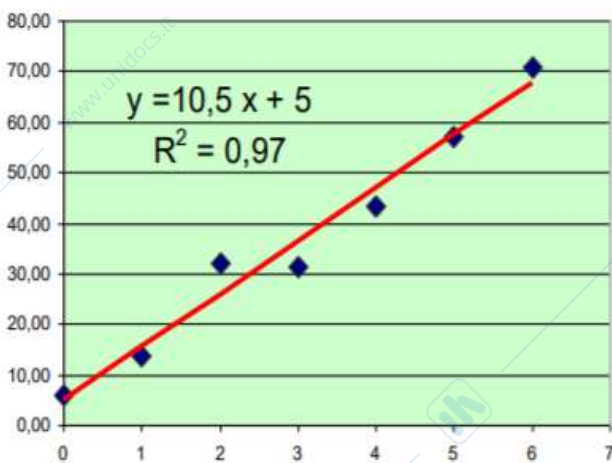
Per cui per trovare il minimo della funzione:

$$\frac{\delta \sum_j [y^i - f(x_j^j, \beta_j)]^2}{\delta \beta_j} = 0$$

andiamo a valutare la derivata in funzione di ogni parametro e poniamo il tutto a 0.

Esempio

Data una distribuzione di dati sperimentali come in figura suppongo di poter approssimare tale andamento con una retta. Scrivo quindi la generica funzione di una retta:



$$f(x, \beta) = mx_i + b$$

Valuto adesso la differenza a minimi quadrati:

$$\sum [(mx_i + b) - y_i]^2 = \min$$

e vado a derivare entrambe le funzioni nei due parametri noti m e b .

$$\frac{d \sum [(mx_i + b) - y_i]}{d m} = \sum x_i (mx_i + b - y_i) = 0$$

$$\frac{d \sum [(mx_i + b) - y_i]}{d b} = \sum (mx_i + b - y_i) = 0$$

Dove sostituendo vari x e y ottengo un sistema

lineare facilmente risolvibile che mi permette di ricavare m e b e trovare la funzione approssimante.

Si può dimostrare poi che l'errore commesso con questa approssimazione è pari a:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (Y - Y_{stim})^2}{N - 2}}$$

dove Y è la misura esatta della grandezza e Y_{stim} invece la stima che ottengo dalla relazione scritta.

S quindi misura la dispersione dei dati rispetto alla funzione che meglio approssima il loro andamento.

A denominatore in questo caso abbiamo poi scritto $N - 2$, ma in realtà **la formula generale è:**

$$S = \sqrt{\frac{\sum (Y - Y_{stim})^2}{N - n}}$$

DISPERSIONE
MAX ALTERN A f

dove N indica il numero di punti sperimentali e n il numero di parametri che devo trovare per identificare la curva interpolante. In questo caso avendo supposto che tale curva sia una retta avevo solo due parametri.

S però varia di significato in funzione di cosa rappresenta effettivamente f . Se infatti f ricerca un legame fisico tra i dati allora S è dovuto agli errori sperimentali, ma se f cerca (come in tutti applicazioni ingegneristiche) una correlazione empirica allora i dati sono intrinsecamente dispersi alla funzione di regressione e non possiamo quindi parlare di errore vero a proprio.

Queste sono due situazioni apposte quindi in cui andiamo a lavorare anche in ordine cronologico differente.

Il primo caso per fare un esempio può essere interpretato come, se non conoscessi la legge fisica corrispondente a un determinato fenomeno, ad esempio la legge della forza elastica e decidessi di ricavarla da dati sperimentali. Nel secondo caso invece è come se data una molla, conoscendo la legge elastica, ci fossimo posti l'obiettivo di determinare il k.

In un caso quindi la legge fisica è definita a monte della sperimentazione mentre nell'altro caso è definita post sperimentazione. Se ovviamente stiamo cercando la legge fisica possiamo decidere anche di andare a fare approssimazioni maggiori, in quanto non sappiamo effettivamente quale sia la funzione che descrive il fenomeno, per cui quando abbiamo un R compreso tra 0,8 e 0,99 posso ritenermi soddisfatto. Nel caso in cui debba andare a fare una misura sperimentale per il quale conosco la legge fisica invece ho bisogno di più dati e maggior precisione per cui è affettabile solo se R compreso tra 0,7 e 0,85. **In ogni caso dobbiamo andare a ricerca la funzione che ragionevolmente più semplice, mai quella più complessa in quanto, aumentando troppo il grado della funzione interpolante si rischia di cadere nell'over fitting per cui il polinomio ha troppe oscillazioni e diventa quindi un'ottima approssimazione per i punti sperimentali ma non descrive più la relazione generica che cercavo.**

Ma di preciso cosa è R?

R è il così detto **coefficiente di correlazione** che mi permette di andare a valutare effettivamente quanto sia corretta la mia approssimazione. Per calcolare R:

$$R = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x) \cdot (y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2}} \quad \text{con } -1 \leq R \leq 1$$

Dove si ha che:

- $R^2 = 1$ le due grandezze sono perfettamente correlate
- $R^2 \rightarrow 1$ le due grandezze sono molto correlate
- $R^2 \rightarrow 0$ o $\sigma = 0$ le due grandezze non sono correlate

Si noti bene che il coefficiente di correlazione non è assolutamente una stima dell'errore.

Testi di ipotesi

Supponiamo di avere dei dati sperimentali ottenuti in seguito ad un test fatto sulla base di un modello fisico matematico da me creato. Come posso verificare quindi che il modello e i dati trovati siano effettivamente correlati? Si procede in questo caso al così detto **test delle ipotesi**.

A livello logico quindi, **partendo da un modello di comportamento e da un sistema sperimentale**, andiamo ad eseguire il nostro test. Ovviamente **registreremo dei dati** che andranno a comporre quelli che chiamo **"eventi osservati" i quali potranno essere più o meno simili a gli "eventi previsti"** che avevo appunto **predetto in base al modello**. Definisco quindi due diverse frequenze, una **frequenza osservata e una teorica** tra le quali ci può essere una differenza. Sulla base di questa differenza andiamo quindi a definire l'accettabilità del modello.

Per la valutazione della differenza però abbiamo bisogno di una grandezza che la esprima, **tale grandezza è il χ^2** .

Per calcolarla quindi la χ dobbiamo andare a dividere i dati sperimentali in K classi (ovvero K possibili eventi attesi) e per un numero di eventi o_i osservato andare a contarli in relazione ad ogni classe di evento. Per ogni classe quindi:

$$\chi_i^2 = \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

mentre per il complessivo delle misure:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \left[\frac{(o - e)^2}{e} \right]_i$$

Se $\chi^2 \rightarrow 0$ allora possiamo concludere che gli eventi osservati erano stati anche previsti e perciò il modello e la realtà coincidano mentre al contrario se $\chi^2 \rightarrow \infty$ allora abbiamo un modello che non rispecchia il fatto fisico.

Non abbiamo detto però come scegliere k , ovvero il numero delle classi.

K deve essere un numero tale in grado da coprire tutto il campo degli eventi e che per favorire la distribuzione teorica della frequenza simmetrica si cerca di prendere un K dispari. Queste vengano anche scelta affinché non si abbiano classi vuote e congruo ovviamente al numero degli eventi.

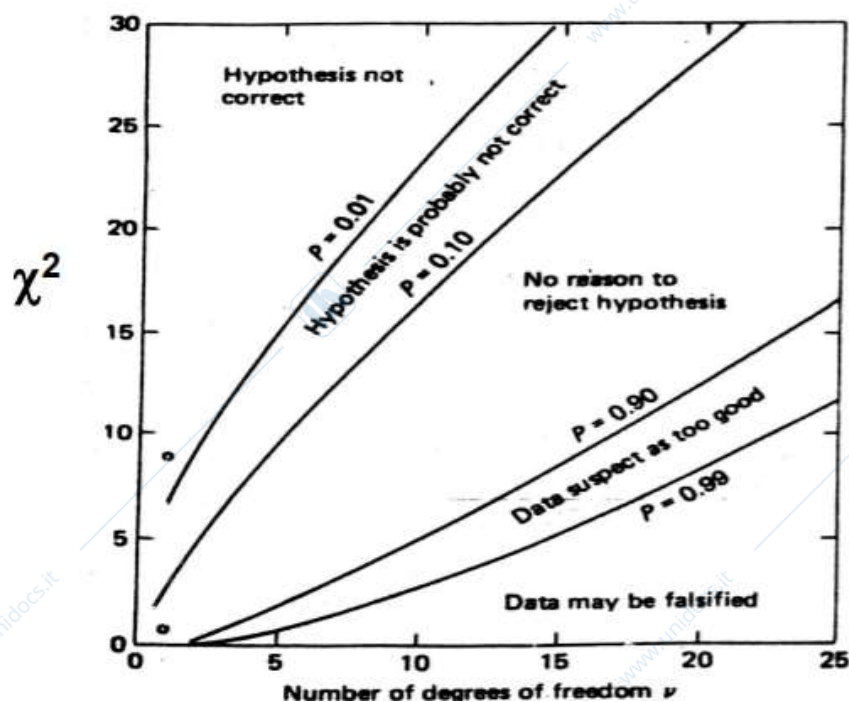
Solitamente il valore di k corretto è $k = \sqrt{n}$

Una volta individuato quindi χ^2 e k , posso calcolare il **numero di gradi di libertà come:**

$$v = k - N$$

dove N è il numero di condizioni imposte al modello.

Questo mi permette di entrare nel grafico seguente e di dire se il mio modello è più o meno accettabile. Attenzione però, il grafico non dice se il modello è esatto, ne potrebbe infatti esistere uno migliore per spiegare tale fenomeno, ma mi dice che in ogni caso non posso rigettare il modello da me scritto perché è comunque abbastanza vicino ai dati sperimentali.



I gradi di libertà possono essere anche calcolati, dati una griglia di una misurazione $n \times m$ possono essere valutati come:

$$v = (n - 1) \cdot (m - 1)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari