Lezione 8
venerdì 13 novembre 2020 09:03

PREDIZIONE

10

Problema: data una sequenza di dati $\{y(1), y(2), \dots, y(N)\}$ vogliamo IDENTIFICARE un modello ARMA (m, n)

$$y(t) = \frac{C(z)}{A(z)} e(t) \qquad e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

Per stimare le incognite (coefficienti di $C(z)$ e $A(z)$, ed eventualmente anche λ^2)

adottiamo un approccio predittivo:

- Calcoliamo il PREDITTORE del modello dai dati $\hat{y}(t|t-1; \theta)$
- Minimizziamo $J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \left(y(t) - \hat{y}(t|t-1, \theta) \right)^2$

VARIANZA CAMPIONARIA DELL'ERRORE DI PREDIZIONE

Approccio predittivo: un modello è buono se è capace di predire bene il processo

---

FILTRO PASSA-TUTTO

10.1

È un filtro di ordine 1 con la seguente forma:

$$T(z) = \frac{1}{a} \cdot \frac{z+a}{z+\frac{1}{a}} \qquad a \neq 0, \; a \in \mathbb{R}$$

$$e(t) \longrightarrow \boxed{T(z)} \longrightarrow y(t) \qquad e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

$$\Gamma_y(\omega) = \left| T(e^{j\omega}) \right|^2 \cdot \Gamma_e(\omega)$$

- $$\left| T(e^{j\omega}) \right|^2 = \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{e^{j\omega} + a}{e^{j\omega} + \frac{1}{a}} \right) \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{e^{-j\omega} + a}{e^{-j\omega} + \frac{1}{a}} \right)$$

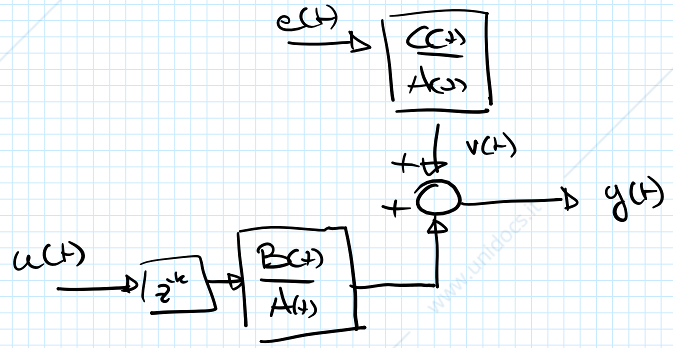
$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{(e^{j\omega} + a)(e^{-j\omega} + a)}{\left(e^{j\omega} + \frac{1}{a}\right)\left(e^{-j\omega} + \frac{1}{a}\right)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1 + a^2 + a\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)}{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{a^2}} \cdot \frac{\cancel{1 + a^2 + a\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)}}{\dots} = \boxed{1}$$

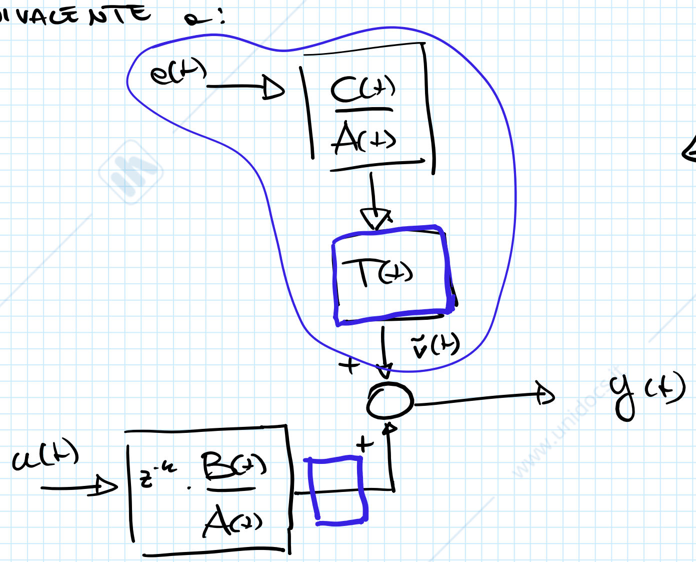
$$= \frac{1}{\cancel{a^2}} \cdot \frac{1 + a^2 + \cancel{a(e^{-j\omega} + e^{j\omega})}}{\frac{a^2 + 1 + \cancel{a(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}}{\cancel{a^2}}} = \boxed{1}$$

$$\Gamma_y(\omega) = |\underbrace{\cancel{T(e^{j\omega})}}_{1}|^2 \cdot \Gamma_e(\omega) = \Gamma_e(\omega)$$

Consideriamo un ARMAX:



risulterà EQUIVALENTE a:



* FORMA CANONICA * $\boxed{10.2}$

Consideriamo questi 3 processi ARMA:

1) $y_1(t) = \dfrac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}}\, e(t) \qquad e(t) \sim WN(0,1)$

2) $y_2(t) = \dfrac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}}\, e(t-2) \qquad e(t) \sim WN(0,1)$

3) $y_3(t) = \dfrac{z^2 - \frac{1}{4}}{z^2 + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} z}\, e(t) \qquad e(t) \sim WN(0,1)$

3) $y_3(t) = \dfrac{z^2 - \frac{1}{4}}{z^2 + \frac{1}{6} - \frac{5}{6} z} e(t) \qquad e(t) \sim WN(0,1)$

4) $y_4(t) = \dfrac{2z+1}{z - \frac{1}{3}} e(t) \qquad e(t) \sim WN\left(0, \frac{1}{4}\right)$

5) $y_5(t) = \dfrac{z+2}{z - \frac{1}{3}} e(t) \qquad e(t) \sim WN\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Calcoliamo gli spettri:

1) $\Gamma_{y_1}(\omega) = \left| \dfrac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}} \right|^2_{z = e^{j\omega}} \cdot \Gamma_e(\omega) = \left| \dfrac{e^{j\omega} + \frac{1}{2}}{e^{j\omega} - \frac{1}{3}} \right|^2 \cdot 1$

2) $\Gamma_{y_2}(\omega) = \left| \dfrac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}} \cdot z^{-2} \right|^2_{z = e^{j\omega}} \cdot \Gamma_e(\omega) = \underbrace{\left| \dfrac{e^{j\omega} + \frac{1}{2}}{e^{j\omega} - \frac{1}{3}} \right|^2}_{\Gamma_{y_1}(\omega)} \cdot \left| e^{-2j\omega} \right|^2 \cdot 1$

$= \Gamma_{y_1}(\omega) \cdot \left(e^{-2j\omega}\right)\left(e^{2j\omega}\right)$

$= \Gamma_{y_1}(\omega)$

3) $\Gamma_{y_3}(\omega) = \left| \dfrac{z^2 - \frac{1}{4}}{z^2 + \frac{1}{6} - \frac{5}{6} z} \right|^2_{z = e^{j\omega}} \cdot \Gamma_e(\omega) = \left| \dfrac{\cancel{\left(z - \frac{1}{2}\right)}\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\cancel{\left(z - \frac{1}{2}\right)}\left(z - \frac{1}{3}\right)} \right|^2_{z = e^{j\omega}} = \Gamma_{y_1}(\omega)$

4) $\Gamma_{y_4}(\omega) = \left| \dfrac{2z+1}{z - \frac{1}{3}} \right|^2_{z = e^{j\omega}} \cdot \Gamma_e(\omega) = \left| 2 \cdot \dfrac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}} \right|^2_{z = e^{j\omega}} \cdot \dfrac{1}{4}$

$= \cancel{4} \cdot \left| \dfrac{e^{j\omega} + \frac{1}{2}}{e^{j\omega} - \frac{1}{3}} \right|^2 \cdot \dfrac{1}{\cancel{4}} = \Gamma_{y_1}(\omega)$

5) $\Gamma_{y_5}(\omega) = \left| \dfrac{z+2}{z - \frac{1}{3}} \right|^2_{z = e^{j\omega}} \cdot \Gamma_e(\omega) = \left| \dfrac{\cancel{z+2}}{z - \frac{1}{3}} \cdot 2 \cdot \dfrac{z + \frac{1}{2}}{\cancel{z+2}} \right|^2_{z = e^{j\omega}} \cdot \dfrac{1}{4}$

$= \Gamma_{y_1}(\omega)$

Tutti e 5 i processi sono tra loro EQUIVALENTI. Le cause di non univocità sono:

- ritardi puri (processo 2)
- fattori moltiplicativi che si cancellano (processo 3)

- ritardi puri (processo 2)
- fattori moltiplicativi che si cancellano (processo 3)
- coefficienti moltiplicativi che si compensano (processo 4)
- poli / zeri reciproci (processo 5)

Vogliamo una rappresentazione UNIVOCA. Tale rappresentazione si chiama FORMA CANONICA, ed è data dal seguente teorema

TEOREMA DELLA FATTORIZZAZIONE SPETTRALE $\boxed{6.3}$

Dato un processo a spettro razionale, esiste una ed una sola rappresentazione del processo, visto come uscita di un sistema dinamico alimentato da rumore bianco, tale che:

1) $C(z)$ e $A(z)$ hanno lo <u>stesso grado</u>
2) $C(z)$ e $A(z)$ sono <u>coprimi</u> (non hanno fattori in comune)
3) $C(z)$ e $A(z)$ sono <u>monici</u> (il coefficiente del termine di grado più alto è 1)
4) $C(z)$ e $A(z)$ hanno radici interne al cerchio unitario (poli e zeri $|\;|<1$)

Esempio

$$y(t) = \frac{z+2}{z-\frac{1}{3}} \cdot e(t-2) \qquad e(t) \sim WN(0,1)$$

$$y(t) = \frac{\cancel{z+2}}{z-\frac{1}{3}} \cdot 2\,\frac{z+\frac{1}{2}}{\cancel{z+2}} \cdot e(t-2)$$

$T(z)$ PASSA-TUTTO

$$= \frac{z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{3}} \cdot 2 \cdot e(t-2) \qquad \eta(t) \sim WN(0,4)$$

$$= \frac{z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{3}}\,\eta(t) = \boxed{\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\,\eta(t)}$$

---

* IL PROBLEMA DELLA PREDIZIONE * $\boxed{6.4}$

Stimare il dato al tempo $t+k$ conoscendo i dati fino al tempo t. Indichiamo il predittore come $\hat{y}(t+k|t)$, oppure $\hat{y}(t|t-k)$

Stimare il dato di tempo t+k conoscendo i dati fino al tempo t.
Indichiamo il predittore come $\hat{y}(t+k|t)$, oppure $\hat{y}(t|t-k)$

<u>Informazioni disponibili</u>

- Dati $y(1), y(2), \ldots, y(N)$
- Vecchie predizioni $\hat{y}(t+k-1|t-1), \hat{y}(t+k-2|t-2), \ldots$
- Modello $\frac{C(z)}{A(z)}$

Vogliamo ottenere un predittore <u>ottimo</u> dei dati. Esistono molti modi di calcolare un predittore dei dati

<u>Es 1</u>

$$\hat{y}(t+k|t) = \frac{y(t)+y(t-1)+y(t-2)}{3}$$

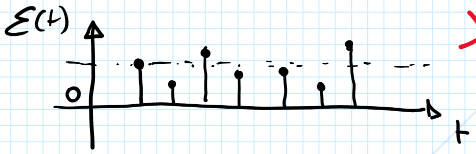
<u>Es 2</u>

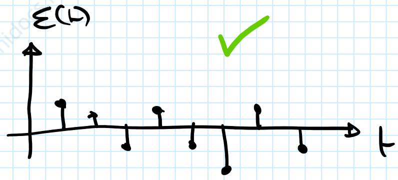
$$\hat{y}(t+k|t) = \frac{2y(t)+\frac{1}{2}y(t-1)+\frac{1}{2}y(t-2)}{3}$$

Posso fare meglio?

↳ Una prima proprietà che voglio è che il predittore sia <u>CORRETTO</u>

$$E[\varepsilon(t)] = E[\underbrace{y(t) - \hat{y}(t|t-\overset{k}{1})}_{\varepsilon(t)}] = 0$$



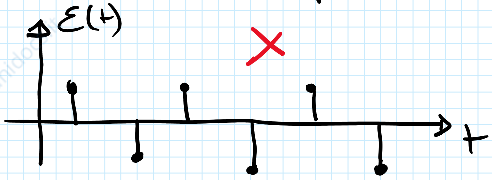


PREDITTORE OTTIMO

Supponiamo che $E[\varepsilon(t)] = 0$, cioè predittore corretto.
Un predittore corretto è <u>ottimo</u> se:

1) $E[\hat{y}(t|t-k)\cdot\varepsilon(t)] = 0$, dove $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-k)$

Predittore ed errore di predizione devono essere <u>scorrelati</u>



2) $Var[\varepsilon(t)]$ sia MINIMA

Possiamo scomporre $y(t)$ come: $\boxed{y(t) = \hat{y}(t|t-k) + \varepsilon(t)}$

- $\varepsilon(t)$: parte impredicibile al tempo $t-k$
- $\hat{y}(t|t-k)$: parte del processo predicibile al tempo $t-k$

* PREDITTORE OTTIMO AD UN PASSO DI PROCESSI MA *

Supponiamo di avere un processo $MA(m)$ in forma canonica

$$y(t) = e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \dots + c_m e(t-m)$$
$$e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

$\boxed{\hat{y}(t|t-1)}$

ci mettiamo al tempo $t-1$

previsione al tempo t

$$y(t) = \underbrace{e(t)}_{\text{PARTE IMPREDICIBILE AL TEMPO } t-1} + \underbrace{c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \dots + c_m e(t-m)}_{\text{PARTE PREDICIBILE AL TEMPO } t-1}$$

Un possibile predittore potrebbe essere:

$$\hat{y}(t|t-1) = c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \dots + c_m e(t-m)$$

Osserviamo che:

- $\hat{y}(t|t-1)$ dipende dal WN fino al tempo $t-1$
- $\mathbb{E}[\hat{y}(t|t-1) \cdot \varepsilon(t)] = 0$ infatti $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) = e(t)$
- Non è possibile ottenere un predittore con $Var[\varepsilon(t)]$ minore, infatti non posso avere errore di predizione con varianza minore di $Var[e(t)]$

$\Downarrow$

$$\boxed{\hat{y}(t|t-1) = c_1 e(t-1) + \dots + c_m e(t-m)}$$ è OTTIMO

Questo, tuttavia, è un predittore "dal rumore". Vogliamo un predittore "dai dati"

$$y(t) = (1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m})\, e(t) \Rightarrow e(t) = \frac{1}{\quad\quad} y(t)$$

dai dati:

$$y(t) = \left(1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}\right) e(t) \Rightarrow e(t) = \frac{1}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}} y(t)$$

$$\hat{y}(t|t-1) = \left(c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}\right) e(t)$$

$$= \frac{c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}} y(t) \Rightarrow$$

$$\hat{y}(t|t-1)\left[1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}\right] = \left[c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}\right] y(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{y}(t|t-1) = &-c_1 \hat{y}(t-1|t-2) - c_2 \hat{y}(t-2|t-3) - \dots - c_m \hat{y}(t-m|t-m-1) \\ &+ c_1 y(t-1) + \dots + c_m y(t-m)\end{aligned}}$$

Osservazione

Il predittore è ricorsivo. È quindi necessario inizializzarlo e dire quanto vale $\hat{y}(1|0)$

$\downarrow$

Solitamente si utilizza la media dei campioni per $\hat{y}(1|0)$

* PREDITTORE A k PASSI DI MA(m) *

Generico processo MA(m) in forma canonica $e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$

$$y(t) = \underbrace{e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{k-1} e(t-k+1)}_{\text{PARTE IMPREDICIBILE}} + \underbrace{c_k e(t-k) + \dots + c_m e(t-m)}_{\text{PARTE PREDICIBILE}}$$

PARTE IMPREDICIBILE $\downarrow$ $\varepsilon(t)$ $\perp$ PARTE PREDICIBILE $\downarrow$ $\hat{y}(t|t-k)$

Il predittore è ottimo, in quanto soddisfa la proprietà di ottimalità

Osservazione

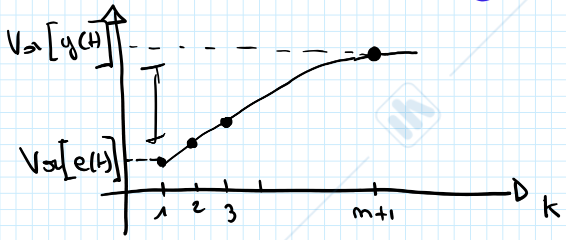
- $\varepsilon_1(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) \Rightarrow Var[\varepsilon_1(t)] = Var[e(t)] = \lambda^2$
- $\varepsilon_2(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-2) \Rightarrow Var[\varepsilon_2(t)] = Var[e(t) + c_1 e(t-1)]$
$= (1 + c_1^2)\lambda^2 > \lambda^2$

- $\varepsilon_{m+1}(t) = y(t) - \underbrace{\hat{y}(t \mid t-m-1)}_{\text{PREDITTORE BANALE}} \Rightarrow Var\left[\varepsilon_{m+1}(t)\right]$

$= \mathbb{E}\left[y(t)\right]$

$= Var\left[e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_m e(t-m)\right]$

$= Var\left[y(t)\right]$



* PREDITTORE DI PROCESSI ARMA *

Sia dato un processo ARMA (m, n) in forma canonica

$$y(t) = \frac{C(z)}{A(z)} e(t) \qquad e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}$

$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_m z^{-m}$

$$y(t) = a_1 \underbrace{y(t-1)} + \dots + a_m \underbrace{y(t-m)} + e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_m e(t-m)$$

$\hookrightarrow y(t-1) = a_1 \underbrace{y(t-2)} + \dots + a_m \underbrace{y(t-m-1)} + e(t-1) + c_1 e(t-2) + \dots$

Non è chiaro come scomporre le parti nota e impredicibile. Ci ricordiamo che possiamo esprimere un ARMA (m, n) come un MA(∞)

$\Downarrow$

non è fattibile

Si esprime $\frac{C(z)}{A(z)}$ come un quoziente $E(z)$ più un resto $\underline{R(z) = z^{-k} \tilde{R}(z)}$ tramite lunga divisione. Otteniamo quindi

$$C(z) = E(z) \cdot A(z) + R(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{C(z)}{A(z)} = E(z) + \frac{R(z)}{A(z)} = E(z) + z^{-k} \frac{\tilde{R}(z)}{A(z)}$$

- k PASSI DI LUNGA DIVISIONE $\Rightarrow$ PREDIZIONE A k PASSI

Esempio

$$y(t) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\,e(t) \qquad e(t) \sim WN(0,1^2)$$

- $C(z) = 1+\frac{1}{2}z^{-1}$
- $A(z) = 1+\frac{1}{3}z^{-1}$

$\boxed{k=2}$ lunga divisione di $k=2$ passi

$$\begin{array}{l|l} C(z):\ 1+\frac{1}{2}z^{-1} & 1+\frac{1}{3}z^{-1} \ :A(z) \\ -1-\frac{1}{3}z^{-1} & \overline{1+\frac{1}{6}z^{-1}} \to E(z) \\ \hline /\ +\frac{1}{6}z^{-1} & \\ \quad -\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{18}z^{-2} & \\ \hline \quad /\ -\frac{1}{18}z^{-2} & \end{array}$$

$\to E(z)e(t) = e(t) + \frac{1}{6}e(t-1)$

$-\frac{1}{18}z^{-2} \to R(z) = \underbrace{z^{-k}\cdot\tilde{R}(z)} = z^{-2}\left(-\frac{1}{18}\right)$

$$y(t) = \frac{C(z)}{A(z)}e(t) = \left(E(z)+\frac{R(z)}{A(z)}\right)e(t) = \boxed{E(z)e(t) + \frac{\tilde{R}(z)}{A(z)}e(t-k)}$$

1) $E(z)e(t)$ è IMPREDICIBILE al tempo $t-k$, dipende solo da $e(t), e(t-1), \_\_, e(t-k+1)$

2) $\frac{\tilde{R}(z)}{A(z)}e(t-k)$ è COMPLETAMENTE NOTO al tempo $t-k$, dipende da $e(t-k), e(t-k-1), \_\_\_$

$\Downarrow$

Quindi, il predittore del rumore è:

$$\boxed{\hat{y}(t|t-k) = \frac{\tilde{R}(z)}{A(z)}e(t-k)}$$

L'errore di predizione è:

$$\boxed{\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-k) = E(z)e(t)}$$

Osservazione che

- $\hat{y}(t|t-k)$ dipende dal rumore fino al tempo $t-k$

- $\mathbb{E}\left[\hat{y}(t|t-k)\cdot \varepsilon(t)\right] = 0$ infatti:

$$\mathbb{E}\left[\hat{y}(t|t-k)\cdot \varepsilon(t)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\tilde{R}(z)}{A(z)}\, e(t-k)\right)\cdot\left(E(z)e(t)\right)\right] = 0$$

- Non è possibile trovare un predittore con varianza $Var[\varepsilon(t)]$ inferiore

$$\Downarrow$$

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{\tilde{R}(z)}{A(z)}\, e(t-k) \quad \text{è } \underline{\text{OTTIMO}}$$

Predittore dai dati

$$y(t) = \frac{C(z)}{A(z)}\, e(t) \Rightarrow e(t) = \frac{A(z)}{C(z)}\, y(t)$$

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{\tilde{R}(z)}{A(z)}\, e(t-k) = \frac{\tilde{R}(z)\cdot z^{-k}}{A(z)}\, e(t) = \frac{\tilde{R}(z)\, z^{-k}}{\cancel{A(z)}}\cdot\frac{\cancel{A(z)}}{C(z)}\, y(t)$$

$$= \boxed{\frac{\tilde{R}(z)}{C(z)}\cdot y(t-k)}$$

CASO k=1

$$\begin{array}{r|l} C(z) & A(z) \\ \cline{2-2} -A(z) & 1 \to E(z) \\ \hline \underbrace{C(z)-A(z)}_{R(z)} & \end{array}$$

- $E(z) = 1 \Rightarrow \varepsilon(t) = E(z)\, e(t) = e(t)$
- $R(z) = C(z) - A(z)$

$$\boxed{\hat{y}(t|t-1) = \frac{C(z)-A(z)}{C(z)}\cdot y(t)}$$

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{C(z)-A(z)}{A(z)}\, e(t)$$

$$\boxed{\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) = e(t)}$$

Osservazione

Gli stimatori sono corretti in quanto $\mathbb{E}[\varepsilon(t)] = 0$

QUALITÀ DEL PREDITTORE

QUALITÀ DEL PREDITTORE

Possiamo valutare la bontà di un predittore confrontando la varianza dell'errore di predizione con la varianza del processo (ovvero, la varianza dell'errore di predizione dato dal predittore banale)

$$ESR = \frac{Var\left[y(t) - \hat{y}(t|t-k)\right]}{Var\left[y(t)\right]} = \frac{Var\left[\varepsilon_k(t)\right]}{Var\left[y(t)\right]}$$

PREDITTORE OTTIMO DI PROCESSI ARMAX

Sia $y(t)$ un processo ARMAX(m, n, p), $\frac{C(z)}{A(z)}$ è in forma canonica

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-k) + \frac{C(z)}{A(z)} e(t) \qquad e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

Si vuol fare una predizione a k PASSI, in modo che l'ingresso influenzi l'uscita

$\Downarrow$

Utilizziamo una lunga divisione per scomporre $\frac{C(z)}{A(z)}$

$$y(t) = \underbrace{\frac{B(z)}{A(z)} u(t-k) + \frac{\tilde{R}(z)}{A(z)} e(t-k)}_{\text{PARTE PREDICIBILE al tempo } t-k} + \underbrace{E(z)\, e(t)}_{\text{PARTE IMPREDICIBILE}}$$

Predittore del rumore

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-k) + \frac{\tilde{R}(z)}{A(z)} e(t-k)$$

$$\varepsilon(t) = E(z)\, e(t)$$

Osservazioni

- $\hat{y}(t|t-k)$ dipende dal WN e dall'ingresso fino a $t-k$
- $E[\varepsilon(t)] = 0$ CORRETTO

- $\hat{y}(t|t-k)$ dipende dai WN e dagli ingressi fino a $t-k$
- $\mathbb{E}[\varepsilon(t)] = 0$ CORRETTO
- $\mathbb{E}[\hat{y}(t|t-k) \cdot \varepsilon(t)] = 0$ (considerando $u(t)$ e $e(t)$ $\perp$)
- Si dimostra che $\hat{y}(t|t-k)$ OTTIMO
- $\varepsilon(t)$ è come nel caso ARMA: infatti $u(t)$ è NOTO e non porta incertezza

Predittore di dati

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-k) + \frac{C(z)}{A(z)} e(t) \Rightarrow e(t) = \frac{A(z)}{C(z)} y(t) - \frac{B(z)}{C(z)} u(t-k)$$

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t-k) + \frac{R(z)}{A(z)} e(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\hat{y}(t|t-k) = \frac{\tilde{R}(z)}{C(z)} y(t-k) + \frac{B(z)E(z)}{C(z)} u(t-k)}$$

CASO $k=1$

$E(z) = 1$

$R(z) = C(z) - A(z)$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{y}(t|t-1) = \frac{C(z)-A(z)}{C(z)} y(t) + \frac{B(z)}{C(z)} u(t-1)}$$

$$\boxed{\varepsilon(t) = E(z)\, e(t)}$$

Osservazione

Il predittore ARMAX è tale che la varianza di $\varepsilon(t)$ è data solo dalla parte ARMA. La bontà del predittore si calcola come:

$$ESR = \frac{Var[\varepsilon_k(t)]}{Var\left[\frac{C(z)}{A(z)} e(t)\right]}$$

Esercizio

Sia dato il processo $y(t) = (2 + 6z^{-1})\, u(t-2) + \frac{2}{3 + \frac{3}{2} z^{-1}} \eta(t-1)$

dove $\eta(t) \sim WN(0, 1)$.

Sia dato il processo $y(t) = (2+6z^{-1})\,u(t-2) + \frac{\;}{3+\frac{3}{2}z^{-1}}\,\eta(t-1)$

dove $\eta(t) \sim WN(0, 1)$.

- Calcolare il predittore di dati
- " la varianza dell'errore di predizione

Il ritardo puro è $k=2$, quindi la serve calcolare un predittore a 2 passi:

- <u>Il processo è in forma canonica?</u>

$$y(t) = (2+6z^{-1})\,u(t-2) + \frac{\overset{C(z)}{z^{-1}}}{\underset{A(z)}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}} \cdot \frac{2}{3}\eta(t)$$

$$= (2+6z^{-1})\,u(t-2) + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{2}{3}\eta(t-1) \rightarrow e(t) \sim WN\left(0, \frac{4}{9}\right)$$

$$= (2+6z^{-1})\,u(t-2) + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\,e(t)$$

Per calcolare il predittore, la parte esogena e quella stocastica devono avere $A(z)$ al denominatore

$$y(t) = \frac{\overset{B(z)}{(2+6z^{-1})\cdot(1+\frac{1}{2}z^{-1})}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\,u(t-2) + \frac{\overset{C(z)}{1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot e(t)$$

$\rightarrow A(z)$

$e(t) \sim WN\left(0, \frac{4}{9}\right)$

- $A(z) = 1+\frac{1}{2}z^{-1}$
- $B(z) = 2\,(1+3z^{-1})\,(1+\frac{1}{2}z^{-1})$
- $C(z) = 1$

- <u>Predittore a $k=2$ passi:</u> $\Rightarrow$ 2 passi di lunga divisione

$C(z)$: 1 | $1+\frac{1}{2}z^{-1}$ $\rightarrow A(z)$

$-1-\frac{1}{2}z^{-1}$ | $1-\frac{1}{2}z^{-1}$ $\rightarrow E(z)$

$/\;\; -\frac{1}{2}z^{-1}$

$+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}$

$//\;\; \frac{1}{4}z^{-2}$ $\rightarrow D(z) = z^{-2}\cdot\tilde{R}(z) = z^{-2}\cdot\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} z^{-2} \longrightarrow R(z) = z^{-2} \cdot \tilde{R}(z) = z^{-2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{\tilde{R}(z)}{C(z)} y(t-k) + \frac{B(z)E(z)}{C(z)} u(t-k)$$

$$\hat{y}(t|t-2) = \frac{\frac{1}{4}}{1} y(t-2) + \frac{2(1+3z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{1} u(t-2)$$

$$= \frac{1}{4} y(t-2) + (2+6z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-2})\, u(t-2)$$

$$= \frac{1}{4} \underbrace{y(t-2)} + 2u(t-2) + 6u(t-3) - \frac{1}{2}u(t-4) - \frac{3}{2}u(t-5)$$

$$- Var[\varepsilon(t)] = E[\varepsilon(t)^2] = E[(E(z)e(t))^2] = E[([1-\frac{1}{2}z^{-1}]e(t))^2]$$

$$= E[(e(t) - \frac{1}{2}e(t-1))^2] = (1+\frac{1}{4}) Var[e(t)]$$

$$= \frac{5}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}$$