www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Lezione 4
mercoledì 28 ottobre 2020 14:08

STIMA BAYESIANA (BAYESIAN INFERENCE) 6

PROBABILITÀ CONGIUNTE, CONDIZIONATE E MARGINALI

2 variabili casuali a, b :
- discrete
- binarie (0/1)

DISTRIBUZIONE CONGIUNTA

b \ a	0	1
0	0,06	0,24
1	0,28	0,42

$P(a=1, b=0) = 0,24$

$\sum_{a,b} P(a,b) = 1$

DISTRIBUZIONE MARGINALE

2 variabili $a, b \Rightarrow$ 2 distribuzioni marginali
- $P(a)$
- $P(b)$

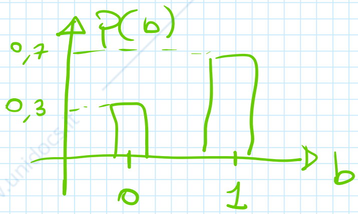
b \ a	0	1
0	0,06	0,24
1	0,28	0,42

$\Rightarrow P(b=0) = P(b=0, a=0) + P(b=0, a=1) = 0,3$

$\Rightarrow P(b=1) = 0,7$

$P(a=0) = 0,34$

$P(a=1) = 0,66$



DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA

Esempio

N: persone

N_A : # persone con capelli lunghi

N_B : # persone di sesso femminile

A : persona con capelli lunghi $\Rightarrow$ $P(A) = \frac{N_A}{N}$

B : persona di sesso femminile $\qquad P(B) = \frac{N_B}{N}$

Consideriamo le sole popolazione di sesso femminile

$\boxed{\frac{N_{AB}}{N_B}}$: probabilità che una persona scelta a caso da questa popolazione abbia i capelli lunghi

N_{AB} : # persone di sesso femminile con i capelli lunghi

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$\boxed{N_B}$ popolazione avere i capelli lunghi

N_{AB}: # persone di sesso femminile con i capelli lunghi

↳ PROBABILITÀ CONDIZIONATA $\quad P(A|B) = \dfrac{N_{AB}}{N_B}$

- La probabilità di selezionare, da tutta la popolazione N, una persona di sesso femminile con i capelli lunghi è:

$$P(A,B) = \frac{N_{AB}}{N}$$

$$P(A|B) = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{P(A,B)}{P(B)} \Rightarrow P(A,B) = P(A|B)\,P(B)$$

- $P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$ s.s.e A e B sono INDIPENDENTI

- Supponiamo che $\underbrace{P(A,B)}_{P(A|B)\,P(B)} = \underbrace{P(B,A)}_{P(B|A)\,P(A)}$

$$P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

PROBABILITÀ A POSTERIORI

PROBABILITÀ A PRIORI

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}}$$

TEOREMA DI BAYES

$$P(A) = \sum_B P(A|B)\,P(B)$$

INTRODUZIONE ALLA STIMA BAYESIANA

ϑ: Finora, l'abbiamo considerata una variabile DETERMINISTICA

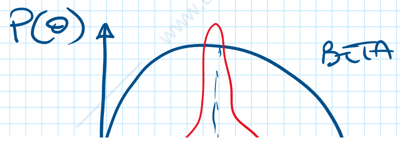
STIMA BAYESIANA ⇒ ϑ come una variabile CASUALE

⇓

avrà associata una distribuzione di probabilità

Esempio

ϑ: probabilità che il lancio di una moneta dia come risultato TESTA

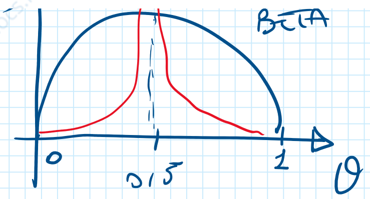


DISTRIBUZIONE A PRIORI

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

DISTRIBUZIONE A PRIORI $P(\theta)$



Con l'arrivo dei dati, mi aspetto che:

1) Il valore atteso cambi
2) L'incertezza diminuisca (ho più informazioni)

Abbiamo due elementi che portano informazione:

⇒ 1) La distribuzione a priori $P(\theta)$ ⇒ PRIOR

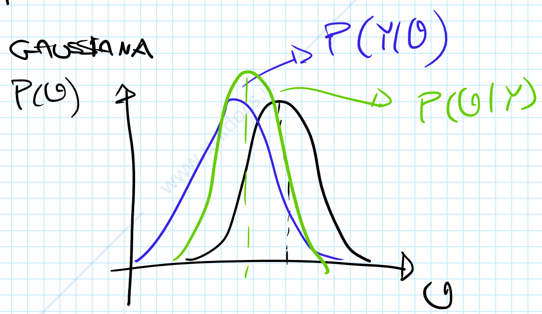
⇒ 2) l'informazione che portano i dati $P(Y|\theta)$ ⇒ LIKELIHOOD

$$\Rightarrow P(\theta|Y) = \frac{P(Y|\theta)\cdot P(\theta)}{P(Y)}$$

Cosa posso dire sulla "forma" di $P(\theta|Y)$?

└ 1) In generale, nulla. Solo in alcuni casi so che $P(\theta|Y)$ è una distribuzione nota

└ 2) Questo avviene se, ad esempio, $P(\theta)$ è GAUSSIANA e $P(Y|\theta)$ è GAUSSIANA ⇒ $P(\theta|Y)$ è GAUSSIANA



$$y = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + e$$

$$N(0, \lambda^2)$$

Supponiamo di avere $P(\theta|Y)$. Otteniamo una distribuzione di valori di θ. Spesso, ci serve però un valore solo, puntuale: quale prendo?

└ $\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} P(\theta|Y)$: stima MAP (Maximum a Posteriori)

└ $\hat{\theta} = \mathbb{E}[P(\theta|Y)] = \mathbb{E}[\theta|Y]$: la media della posterior

$x(t)$ $\quad$ $y(t)$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari