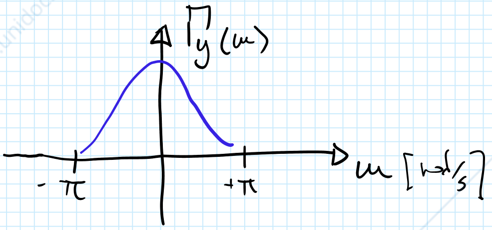
Lezione 6

giovedì 5 novembre 2020 16:18

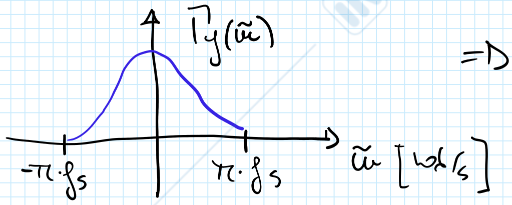


$\tilde{\omega} = 2\pi \cdot \tilde{f}$

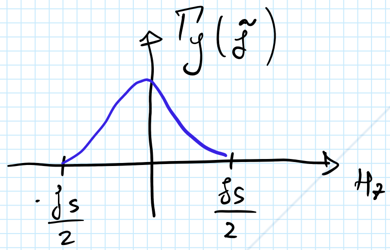
$\tilde{f} = \frac{f_s}{2} \Rightarrow \tilde{\omega} = 2\pi \frac{f_s}{2} = \pi \cdot f_s$

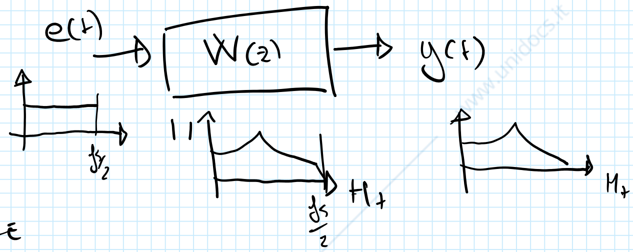
$\omega = \frac{\tilde{\omega}}{f_s} = \pi$

$\Downarrow$



$\Rightarrow$



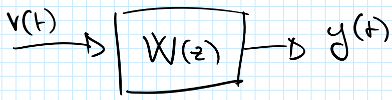


V.C. $\Rightarrow$ VETTORE

$y(t) = w_0 e(t) + w_1 e(t-1) + \_\_\_\_$

Teorema

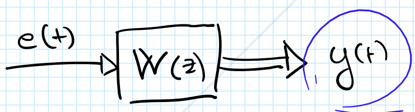
Dato un processo stocastico $y(t)$, uscita di regime di un filtro $W(z)$, alimentato da un processo stocastico $v(t)$



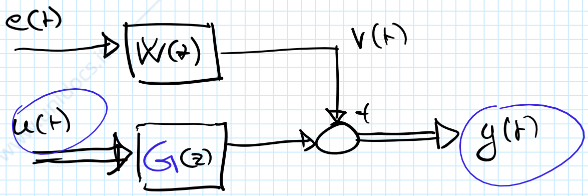
Condizione necessaria e sufficiente affinché, $\forall$ condizione iniziale, a regime $y(t)$ sia un pss è che:

1) $v(t)$ sia pss
2) $W(z)$ sia ASINTOTICAMENTE STABILE

↳ $W(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$, radici di $A(z)$ $| \; | < 1$



SERIE STORICHE



SISTEMI I/O

Nota

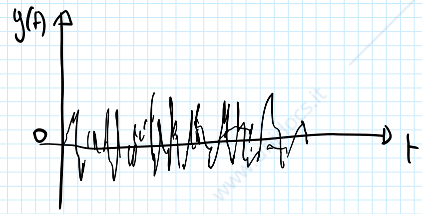
Nota

$G(z)$ è un sistema fisico (reale). $W(z)$ ed $e(t)$ non esistono nella realtà, ma ci consentono di modellare ciò che $G(z)$ non riesce e la stocasticità della serie di dati

Nota

Trend / Stagionalità

$$\Downarrow$$



* DEPOLARIZZAZIONE * $\boxed{8.5}$

La depolarizzazione permette di semplificare il calcolo di $\gamma(\tau)$ nel caso in cui il pss $v(t)$ abbia media $m_v \neq 0$

$$\gamma(\tau) = \mathbb{E}\left[\left(v(t) - m_v\right)\left(v(t+\tau) - m_v\right)\right]$$

Se $m_v = 0$

$$\gamma(\tau) = \mathbb{E}\left[v(t) \cdot v(t+\tau)\right]$$

Definiamo $\tilde{v}(t) = v(t) - m_v$

- $\mathbb{E}[\tilde{v}(t)] = \mathbb{E}[v(t) - m_v] = \mathbb{E}[v(t)] - m_v = 0$
- $\tilde{\gamma}(\tau) = \mathbb{E}[\tilde{v}(t) \cdot \tilde{v}(t+\tau)] = \mathbb{E}\left[\left(v(t) - m_v\right)\left(v(t+\tau) - m_v\right)\right] = \gamma(\tau)$

$v(t)$ e $\tilde{v}(t)$ hanno la stessa funzione di covarianza

FAMIGLIE DI MODELLI A SPETTRO RAZIONALE $\boxed{9}$

* MODELLI PER SERIE TEMPORALI * $\boxed{9.1}$

PROCESSI MA (Moving Average)

Un processo $y(t)$, generato a partire dal rumore bianco $e(t)$, $e(t) \sim WN(\mu, \lambda^2)$, è detto di tipo $MA(m)$ se:

$$y(t) = c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + \text{—} + c_m e(t-m)$$
$$\stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot e(t-i)$$

- c_0 — c_m : COEFF. DEL MODELLO
- m : ORDINE DEL MODELLO

$$\left(\begin{aligned} z^{-1} \cdot x(t) &= x(t-1) \\ z^{-2} \cdot x(t) &= x(t-2) \end{aligned} \right)$$

$$y(t) = c_0 e(t) + c_1 \cdot e(t) \cdot z^{-1} + c_2 e(t) z^{-2} + \text{—} + c_m e(t) z^{-m}$$
$$\stackrel{!}{=} e(t) \underbrace{\left[c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \text{—} + c_m z^{-m} \right]}_{C(z)} = C(z) \cdot e(t)$$

$$\Rightarrow \frac{y(t)}{e(t)} = \frac{z^m c_0 + z^{m-1} c_1 + \text{—} + c_m}{z^m}$$

m Poli in $z = 0$

$\Downarrow$

Il processi MA sono sempre stazionari

$$e(t) \longrightarrow \boxed{C(z)} \longrightarrow y(t)$$

* Calcolo di parametri caratteristici *

- Valore atteso

$$m = \mathbb{E}[y(t)] = \mathbb{E}\left[c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + \text{—} + c_m e(t-m)\right]$$
$$= c_0 \mathbb{E}[e(t)] + c_1 \mathbb{E}[e(t-1)] + \text{—} + c_m \mathbb{E}[e(t-m)]$$
$$= c_0 \cdot \mu + c_1 \cdot \mu + \text{—} + c_m \cdot \mu$$
$$= \boxed{\mu \cdot \sum_{i=0}^{m} c_i} \Rightarrow \text{se } e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}[y(t)] = 0$$

- Funzione di covarianza (Supponiamo $\mathbb{E}[y(t)] = 0$)

$\gamma(\tau)$

- $\gamma(0) = \mathbb{E}\left[(y(t) - m)^2\right] = \mathbb{E}\left[y(t)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + \text{—} + c_m e(t-m)\right)^2\right]$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

- $\gamma(0) = \mathbb{E}\left[(y(t)-m)^2\right] = \mathbb{E}\left[y(t)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + \ldots + c_m e(t-m)\right)^2\right]$

$$= \mathbb{E}\Big[\underbrace{c_0^2 e(t)^2 + c_1^2 e(t-1)^2 + \ldots + c_m^2 e(t-m)^2}_{\text{quadrati}} + \underbrace{2c_0c_1\, e(t)\cdot e(t-1) + \ldots + 2c_{m-1}c_m\, e(t-m+1)\, e(t-m)}_{\text{doppi prodotti}}\Big] \to 0$$

$$2c_0c_1 \cdot \mathbb{E}\left[e(t)\cdot e(t-1)\right] = 0$$

$$= c_0^2\, \mathbb{E}\left[e(t)^2\right] + c_1^2\, \mathbb{E}\left[e(t-1)^2\right] + \ldots + c_m^2\, \mathbb{E}\left[e(t-m)^2\right]$$

$$= c_0^2 \cdot \lambda^2 + c_1^2 \cdot \lambda^2 + \ldots + c_m^2 \cdot \lambda^2 = \boxed{\lambda^2 \cdot \sum_{i=0}^{m} c_i^2}$$

- $\gamma(1) = \mathbb{E}\left[(y(t)-m)(y(t+1)-m)\right] = \mathbb{E}\left[y(t)\cdot y(t-1)\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\left(c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + \ldots + c_m e(t-m)\right)\left(c_0 e(t-1) + c_1 e(t-2) + \ldots + c_m e(t-m-1)\right)\right]$$

$$= c_0c_1\, \mathbb{E}\left[e(t-1)^2\right] + c_1c_2\, \mathbb{E}\left[e(t-2)^2\right] + \ldots + c_{m-1}c_m\, \mathbb{E}\left[e(t-m)^2\right]$$

$$= \boxed{\lambda^2 \cdot \left(c_0c_1 + c_1c_2 + \ldots + c_{m-1}c_m\right)}$$

- $\gamma(2)$: $\lambda^2 \cdot \left(c_0c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{m-2}c_m\right)$
- $\gamma(m)$: $\lambda^2 \cdot \left(c_0 c_m\right)$
- $\gamma(\tau)$ t.c. $\underline{\tau > m} \Rightarrow \gamma(\tau) = 0$

Nota

Il processo $\tilde{y}(t) = \tilde{c}_0\, \eta(t) + \tilde{c}_1\, \eta(t-1) + \ldots + \tilde{c}_m\, \eta(t-m)$, $\eta(t) \sim WN(0, \tilde{\lambda}^2)$ • $\tilde{c}_i = \alpha \cdot c_i$ • $\tilde{\lambda}^2 = \frac{\lambda^2}{\alpha}$

ha lo stesso valore atteso e funzione di covarianza del processo

$y(t) = c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + \ldots + c_m e(t-m)$ $e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$

$$y(t) = c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_m e(t-m) \qquad e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

$\boxed{c_0 = 1}$ Per evitare questa sovra-parametrizzazione

PROCESSI AR (Auto-Regressivo)

Un processo $y(t)$, generato a partire da $e(t) \sim WN(\mu, \lambda^2)$, è detto di tipo $AR(m)$ se:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_m y(t-m) + e(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i\, y(t-i) + e(t)$$

- $a_1 \dots a_m$: COEFFICIENTI
- m: ORDINE

Forma operatoriale

$$y(t) = a_1 y(t) z^{-1} + a_2 y(t) z^{-2} + \dots + a_m y(t) z^{-m} + e(t)$$

$$y(t)\left[1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_m z^{-m}\right] = e(t)$$

$$\frac{y(t)}{e(t)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_m z^{-m}} = \frac{1}{A(z)}$$

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{A(z)}} \longrightarrow y(t)$$

$$= \frac{z^m}{z^m - a_1 z^{m-1} - \dots - a_m}$$

- m ZERI nell'origine
- m POLI: $y(t)$ è PSS se $|\ | < 1$

Calcolo di parametri caratteristici (supponiamo $AR(m)$ sia stazionario)

- Valore atteso

$$m = \mathbb{E}[y(t)] = \mathbb{E}\left[a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_m y(t-m) + e(t)\right]$$

$$= a_1 \mathbb{E}[y(t-1)] + a_2 \mathbb{E}[y(t-2)] + \dots + a_m \mathbb{E}[y(t-m)] + \mathbb{E}[e(t)]$$

$$\mathbb{E}[y(t)] = (a_1 + a_2 + \dots + a_m)\, \mathbb{E}[y(t)] + \mu$$

$$\left(1 - a_1 - a_2 - \_\_ - a_m\right) \mathbb{E}\left[y(t)\right] = \mu$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[y(t)\right] = \frac{\mu}{1 - a_1 - a_2 - \_\_ - a_m}} \Rightarrow \text{se } \mathbb{E}[e(t)] = 0 \Downarrow \mathbb{E}[y(t)] = 0$$

- Funzione di covarianza

$\gamma(\tau) \to$ calcolo per processi AR(1)

$$y(t) = a\, y(t-1) + e(t) \qquad e(t) \sim WN(\mu, \lambda^2)$$

$$y(t)\left[1 - a z^{-1}\right] = e(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{1 - az^{-1}}\, e(t)$$

Polo in $z = a$

$A(z)$ è AS. STAB. se $|a| < 1$

Supponiamo $A(z)$ AS. STAB e $y(t)$ DEPOLARIZZATO, $\mathbb{E}[y(t)] = 0$

- $\gamma(0) = \mathbb{E}\left[y(t)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(a y(t-1) + e(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(a^2 y(t-1)^2 + e(t)^2 + 2a\, y(t-1) e(t)\right)\right]$

$$= a^2 \mathbb{E}\left[y(t-1)^2\right] + \mathbb{E}\left[e(t)^2\right] + \cancel{2a\, \mathbb{E}\left[y(t-1)\, e(t)\right]}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} w_i \cdot e(t-i)$$

$$y(t-1) = \sum_{i=0}^{+\infty} w_i\, e(t-i-1)$$

$$= w_0 e(t-1) + w_1 e(t-2) + \_\_$$

$$\mathbb{E}\left[\left(a\, y(t-2) + e(t-1)\right) \cdot e(t)\right]$$

$$a\left(a\, y(t-3) + e(t-2)\right) \cdot e(t)$$

$$\gamma(0) = a^2 \cdot \gamma(0) + \lambda^2 \Rightarrow \boxed{\gamma(0) = \frac{\lambda^2}{1 - a^2}}$$

- $\gamma(1) = \mathbb{E}\left[y(t) \cdot y(t-1)\right] = \mathbb{E}\left[\left(a\, y(t-1) + e(t)\right) \cdot y(t-1)\right]$

$$= \mathbb{E}\left[a\, y(t-1)^2 + y(t-1)e(t)\right] = a\,\mathbb{E}\left[y(t-1)^2\right] + \cancel{\mathbb{E}\left[y(t-1)e(t)\right]}$$

$$\boxed{\gamma(1) = a \cdot \gamma(0)}$$

- $\gamma(2) = a \cdot \gamma(1)$

<u>Generalizzando</u>

$$\begin{cases} \gamma(0) = \dfrac{\lambda^2}{1-a^2} & \tau = 0 \\[2ex] \gamma(\tau) = a \cdot \gamma(\tau-1) & \tau > 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI DI YULE - WALKER per un AR(1)

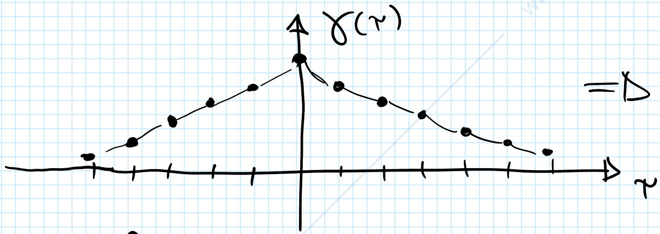
<u>Osservazione</u>

Dato che $|a| < 1$, si ha che

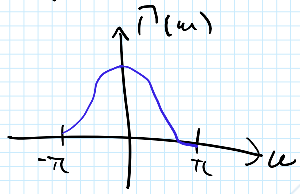
$$|\gamma(\tau+1)| < |\gamma(\tau)|$$

e dato che $a \neq \pm 1$, $\gamma(0)$ esiste <u>finito</u>. Inoltre:

- Il processo $\bar{y}(t) = a\bar{y}(t-1) + e(t)$ con $\boxed{0 < a < 1}$ ha $\gamma(\tau) > 0\ \forall \tau$, e sarà una funzione <u>decrescente</u> che non raggiunge mai zero

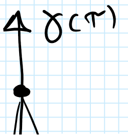


$\Rightarrow$

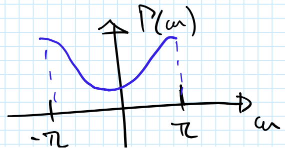


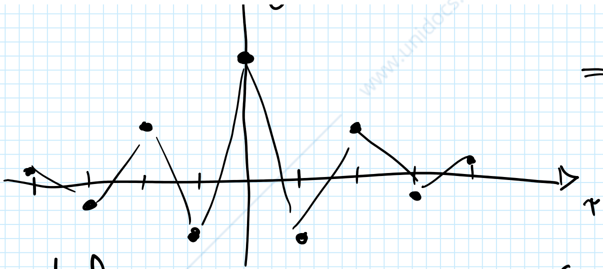
Le realizzazioni del pss $y(t)$ <u>variano</u> <u>lentamente</u> perché i dati sono molto correlati tra loro e non cambiano di segno (in media). Ci si aspetta una realizzazione con componenti a <u>bassa</u> <u>frequenza</u>

- Il processo $y(t) = a\,y(t-1) + e(t)$ con $\boxed{-1 < a < 0}$ ha una funzione $\gamma(\tau)$ che <u>cambia segno</u> ad ogni τ, e decresce in valore assoluto

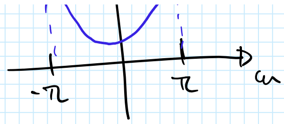


$\Rightarrow$





$\Rightarrow$



Le realizzazioni del pss $y(t)$ danno (in media) cambi di segno repentini con componenti in alta frequenza

Approfondimento

FUNZIONE DI COVARIANZA (AUTOCORRELAZIONE)

$MA(n) \Rightarrow \gamma(\tau) = 0$ per $\tau > n$

$AR(m) \Rightarrow \gamma_{PAR}(\tau) = 0$ per $\tau > m$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PARZIALE (PACF)

1) Controllo se i dati sono modellabili come $MA(n) \Rightarrow \gamma(\tau)$

2) " " " " " " $AR(m) \Rightarrow \gamma_{PAR}(\tau)$

3) Se nessuna delle due funzioni $\gamma(\tau)$ e $\gamma_{PAR}(\tau)$ si annulla mi servono altri modelli

MODELLI ARMA (AutoRegressive Moving Average)

Un processo $y(t)$, generato a partire da un rumore bianco $e(t) \sim WN(\mu, \lambda^2)$, è detto di tipo $ARMA(m, n)$ se:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_m y(t-m) \quad \text{PARTE } AR(m)$$

$$+ e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \dots + c_n e(t-n) \quad \text{PARTE } MA(n)$$

Notiamo che $ARMA(0, n) = MA(n)$ e che $ARMA(m, 0) = AR(m)$

$$y(t)\left[1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_m z^{-m}\right] = \left[1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}\right] e(t)$$

$$\frac{y(t)}{e(t)} = \frac{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}}{1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_m z^{-m}} = \frac{C(z)}{A(z)}$$

$$e(t) \rightarrow \boxed{\frac{C(z)}{A(z)}} \rightarrow y(t)$$

$\frac{C(z)}{A(z)}$ è AS. STABILE se radici di $A(z)$ sono

$| \; | < 1$

MODELLI PER SISTEMI INPUT / OUTPUT [8.2]

PROCESSI ARMAX (AutoRegressive Moving Average with eXogenous input)

Un processo $y(t)$, generato a partire dal rumore bianco $e(t) \sim WN(\mu, \lambda^2)$ e da un ingresso esogeno $u(t)$ (indipendente dal processo) è detto ARMAX$(m, n, k+p)$ se:

$$
\begin{aligned}
y(t) = {} & a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_m y(t-m) && \text{PARTE AR}(m) \\
& + e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \dots + c_n e(t-n) && \text{PARTE MA}(n) \\
& + b_0 u(t-k) + b_1 u(t-k-1) + \dots + b_p u(t-k-p) && \text{PARTE X}(k+p)
\end{aligned}
$$

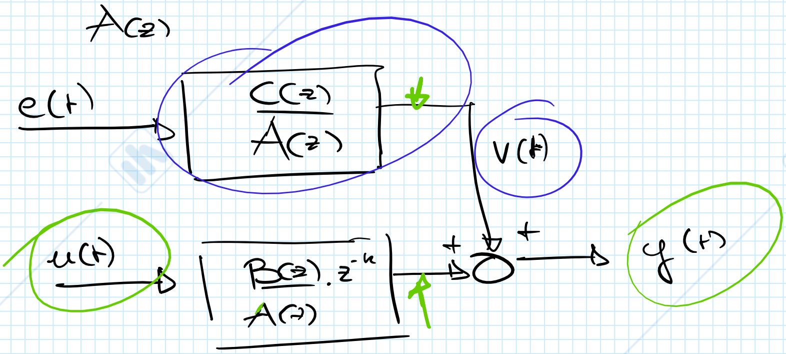
- m : ORDINE AR
- n : ORDINE MA
- k : RITARDO PURO TRA INGRESSO E USCITA
- p : ORDINE PARTE ESOGENA

$$
y(t)\underbrace{\left[1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_m z^{-m}\right]}_{A(z)} = e(t)\underbrace{\left[1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}\right]}_{C(z)} + u(t-k)\underbrace{\left[b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_p z^{-p}\right]}_{B(z)}
$$

$$
y(t) A(z) = e(t) C(z) + u(t-k) B(z)
$$

$$
\boxed{y(t) = \frac{C(z)}{A(z)} e(t) + \frac{B(z)}{A(z)} u(t-k)}
$$

$$
y(t) = \frac{C(z)}{A(z)} e(t) + \frac{B(z)}{A(z)} \cdot z^{-k} \cdot u(t)
$$



Teorema

Dato un processo stocastico stazionario ARMA(m, n), esso può essere espresso come un MA(∞)

Es AR(1)

essere espresso come un MA(∞)

Es AR(1)

$$y(t) = a\,y(t-1) + e(t) \qquad e(t) \sim WN(\mu, \lambda^2)$$

$$y(t) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}\, e(t)$$

limite serie geometrica di ragione $a z^{-1}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (a z^{-1})^k \cdot e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot e(t-k) \equiv MA(\infty)$$

> CALCOLO DELLO SPETTRO DI UN PSS A PARTIRE DAL SUO MODELLO* $\boxed{3.3}$

$$y(t) = F(z) \cdot v(t)$$

$$\underset{PSS}{v(t)} \rightarrow \boxed{F(z)} \rightarrow \underset{PSS}{y(t)}$$

AS. STAB

$$\boxed{\Gamma_y(\omega) = \left| F(e^{j\omega}) \right|^2 \cdot \Gamma_v(\omega)}$$

- $\Gamma_y(\omega)$: SPETTRO USCITA
- $\left| F(e^{j\omega}) \right|^2$: MODULO AL QUADRATO DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA DEL FILTRO
- $\Gamma_v(\omega)$: SPETTRO DELL'INGRESSO

Se l'ingresso è un $e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$:

$$\Gamma_y(\omega) = \left| F(e^{j\omega}) \right|^2 \cdot \lambda^2$$

Esempio

Consideriamo un processo MA(1). Calcolare $\Gamma_y(\omega)$

$$y(t) = \underbrace{1}_{c_0} \cdot e(t) + \underbrace{c}_{c_1} \cdot e(t-1) \qquad e(t) \sim WN(0, 1)$$

1) Usando la definizione

$$\Gamma_y(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau)\, e^{-j\omega\tau}$$

$$= \underbrace{\gamma(-1)\, e^{+j\omega}}_{\tau=-1} + \underbrace{\gamma(0)\, e^{-j\omega \cdot 0}}_{\tau=1} + \underbrace{\gamma(1)\, e^{-j\omega}}_{\tau=1}$$

$\gamma(-1) = \lambda^2 (c_0 c_1)$ $\qquad \gamma(0) = \lambda^2 \cdot \sum_{i=0}^{m} c_i^2$ $\qquad \gamma(1) = \lambda^2 (c_0 c_1)$

$$1^2 \cdot \sum_{i=0}^{2} c_i^2$$

$$= 1\,(1\cdot c)\,e^{j\omega} + 1\,(1^2 + c^2)\cdot 1 + 1\cdot(1\cdot c)\,e^{-j\omega}$$

$$= c e^{j\omega} + c^2 + 1 + c e^{-j\omega} = c\,[\underbrace{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}_{2\cos\omega}] + c^2 + 1$$

$$= \boxed{2c \cdot \cos\omega + c^2 + 1}$$

2) Usando il teorema

$$g(t) = (1 + c z^{-1})\, e(t) = C(z)\cdot e(t) \qquad z = e^{j\omega}$$

$$\Gamma_y(\omega) = \left|C(e^{j\omega})\right|^2 \cdot \Gamma_e(\omega) = \left|1 + c e^{-j\omega}\right|^2 \cdot 1$$

$$= (1 + c e^{j\omega})\cdot(1 + c e^{-j\omega})$$

$$= 1 + c e^{-j\omega} + c e^{j\omega} + c^2 \cancel{e^{j\omega - j\omega}}$$

$$= c\,(e^{-j\omega} + e^{j\omega}) + c^2 + 1$$

$$= \boxed{2c \cdot \cos\omega + c^2 + 1}$$

Tracciamento dello spettro

- $\Gamma_y(0) = 2c \cdot \cos 0 + c^2 + 1 = 1 + 2c + c^2 = (1+c)^2$ $\quad$ ($\cos 0 \to 1$)
- $\Gamma_y(\pi/2) = 2c \cdot \cos\frac{\pi}{2} + c^2 + 1 = 1 + c^2$ $\quad$ ($\cos\frac{\pi}{2} \to 0$)
- $\Gamma_y(\pi) = 2c \cdot \cos\pi + c^2 + 1 = 1 - 2c + c^2 = (1-c)^2$ $\quad$ ($\cos\pi \to -1$)

$c > 0$

$c < 0$