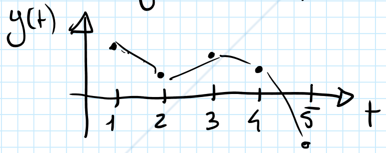
Lezione 5

mercoledì 4 novembre 2020 13:32

PARTE II : SISTEMI DINAMICI

✶ SERIE TEMPORALI ✶

Insieme di dati nel tempo $D = \{ y(1), y(2), \dots, y(N) \}$. Il generico dato è $y(t)$ $t = 1, \dots, N$



- PREDIZIONE : $\hat{y}(t+1 \mid t)$ → dati fino all'istante t ↳ ottenere una stima all'istante t+1

✶ SISTEMI INGRESSI / USCITA ✶

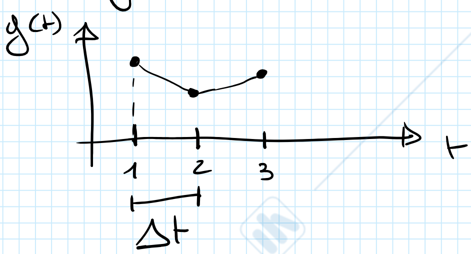
Abbiamo 2 insiemi di dati: ingresso e uscita

$\{ u(1), u(2), \dots, u(N) \}$ $\{ y(1), y(2), \dots, y(N) \}$

- PREDIZIONE :
- CONTROLLO : determinare la relazione $u(t) \rightarrow y(t)$

Osservazione

Lavoreremo con segnali e sistemi a tempo discreto



$y(1) = y(1 \cdot \Delta t)$

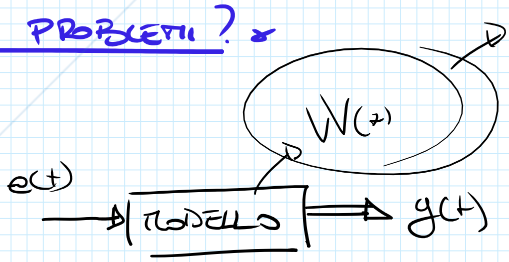
$y(2) = y(2 \cdot \Delta t)$

✶ COME IMPOSTIAMO I PROBLEMI? ✶

SERIE TEMPORALI

e(t): ingresso esogeno non misurabile

y(t): dati della serie temporale



$\frac{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}} \cdot e(t) = y(t)$

$y(t)\left[1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}\right] = \left[1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}\right] e(t)$

$y(t)+b_1 y(t-1)+b_2 y(t-2) = e(t)+a_1 e(t-1)+a_2 e(t-2)$

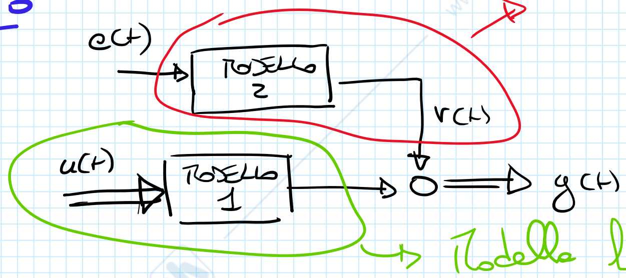
$\boxed{y(t) = -b_1 y(t-1) - b_2 y(t-2) + a_1 e(t-1) + a_2 e(t-2) + e(t)}$

→ Modellare : - trasformare seri dati

SISTEMI I/O

$+ a_1 e(t-1) + a_2 e(t-2) + e(t)$

SISTEMI I/O



Modellare:
- rumore sui dati
- errori di modello

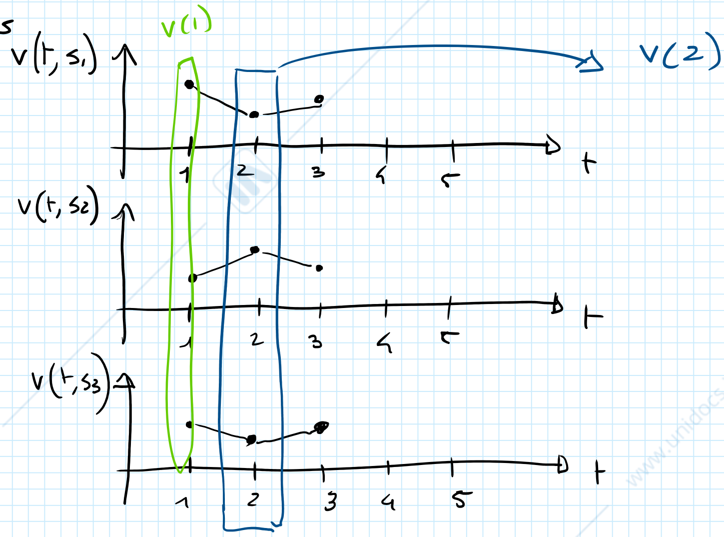
Modella le relazione INGRESSI → USCITA

PROCESSI STOCASTICI [8]

Un processo stocastico a tempo discreto è una successione infinita di variabili casuali, definite a partire dallo stesso esperimento casuale s e ordinate secondo un indice temporale t

$$v(1, s), \quad v(2, s), \quad \text{—}, \quad v(t, s)$$

- Fissato l'esito $s = \bar{s}$, si ottiene una REALIZZAZIONE del processo stocastico



Nota

Spesso omettono la dipendenza da s, indicando $v(1, \bar{s}), v(2, \bar{s}), \ldots$ come $v(1), v(2), \text{—}$

Dato un processo stocastico $v(t, s)$, si definiscono:

- VALORE ATTESO

$$m(t) = \mathbb{E}_s\left[\, v(t, s) \,\right]$$

- FUNZIONE DI COVARIANZA

$$\gamma(t_1, t_2) = \mathbb{E}_s\left[\left(v(t_1, s) - m(t_1)\right)\left(v(t_2, s) - m(t_2)\right)\right]$$

Nel caso in cui $t_1 = t_2 = t$, otteniamo la varianza del p.s.

$$\gamma(t, t) = \mathbb{E}_s\left[\left(v(t, s) - m(t)\right)^2\right]$$

★ PROCESSI STOCASTICI STAZIONARI ★ $\boxed{8.1}$

Un processo stocastico si dice <u>STAZIONARIO IN SENSO FORTE</u> se e solo se $\forall m \in \mathbb{N}$, scelti $t_1, t_2, \dots, t_m$, il comportamento delle m-uple $v(t_1 + \tau), v(t_2 + \tau), \dots, v(t_m + \tau)$ è lo stesso di quello delle m-uple $v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_m)$.

Un processo stocastico si dice <u>STAZIONARIO IN SENSO DEBOLE</u> se:

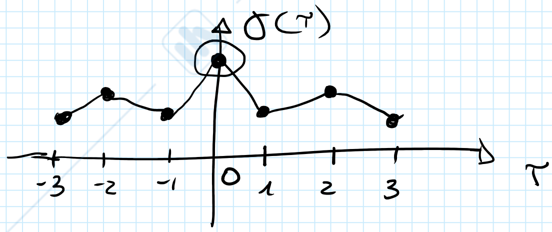
1) $m(t) = m \quad \forall t$
2) $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_3, t_4)$ se $|t_4 - t_3| = |t_2 - t_1| = \tau$

Dato che la covarianza dipende solo da τ, si usa:

$$\gamma(\tau) = \mathbb{E}_s\left[\left(v(t, s) - m\right) \cdot \left(v(t + \tau, s) - m\right)\right]$$

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI COVARIANZA DI UN PSS

1) $\gamma(0) = \mathbb{E}\left[\left(v(t) - m\right)^2\right] \geq 0$ VARIANZA DEL PSS
2) $|\gamma(\tau)| \leq \gamma(0) \quad \forall \tau$
3) $\gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$ FUNZIONE PARI



<u>Definizione</u>

Due processi stocastici stazionari $v_1(t)$ e $v_2(t)$ si dicono <u>equivalenti</u> se hanno lo stesso valore atteso m e la stessa covarianza $\gamma(\tau)$ $\forall \tau$

★ RUMORE BIANCO ★ $\boxed{8.2}$

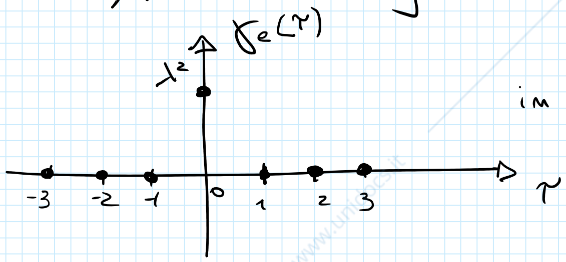
Definizione

Un pss $e(t)$ è detto <u>RUMORE BIANCO</u>, e lo indichiamo come $e(t) \sim WN(\mu, \lambda^2)$, se:

1) $\mathbb{E}[e(t)] = \mu$ $\quad \forall t$

2) $\gamma(0) = \mathbb{E}\left[(e(t)-\mu)^2\right] = \lambda^2 \quad \forall t$

3) $\gamma(\tau) = \mathbb{E}\left[(e(t)-\mu)(e(t+\tau)-\mu)\right] = 0 \quad \forall t, \forall \tau \neq 0$



Il WN varia in modo IMPREDICIBILE da un istante all'altro

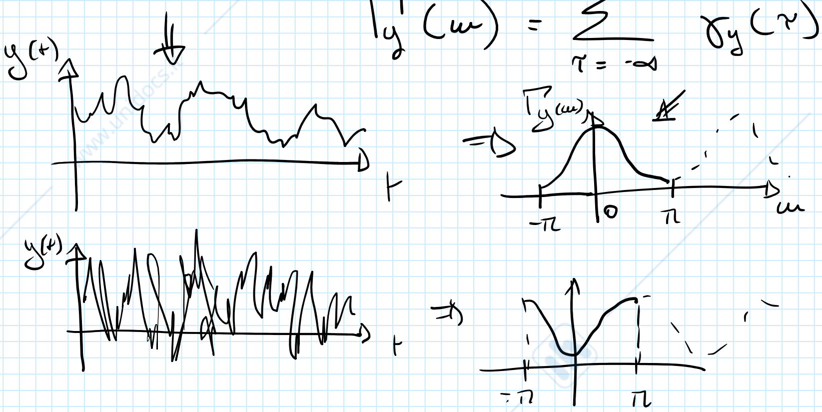
Nota

Consideremo pss a media nulla, in quanto non vengono modificate le caratteristiche spettrali

RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE DI UN PSS $\boxed{8.3}$

Sia $y(t)$ un pss. Si definisce <u>densità spettrale di potenza</u> la trasformata di Fourier tempo discreto (DTFT) della funzione di covarianza $\gamma_y(\tau)$

$$\Gamma_y(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_y(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau}$$



Proprietà di $\Gamma_y(\omega)$

1) $\Gamma_y(\omega)$ è una funzione REALE della variabile REALE ω

2) $\Gamma_y(\omega)$ è " " POSITIVA: $\Gamma_y(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

3) $\Gamma_y(\omega)$ è " " PARI: $\Gamma_y(\omega) = \Gamma_y(-\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

4) $\Gamma_y(\omega)$ è ~ ~ PERIODICA di periodo 2π

$$\Gamma_y(\omega) = \Gamma_y(\omega + k \cdot 2\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Si può ricavare $\gamma_y(\tau)$ partendo da $\Gamma_y(\omega)$ tramite l'antitrasformata

$$\gamma_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Gamma_y(\omega)\, e^{+j\omega\tau}\, d\omega$$

Si può vedere che:

$$\gamma_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Gamma_y(\omega)\, e^{+j\omega \cdot 0}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Gamma_y(\omega)\, d\omega$$

$\Downarrow$

la varianza del processo è l'area sottesa a $\Gamma_y(\omega)$ tra $[-\pi, +\pi]$, a meno del fattore $\frac{1}{2\pi}$

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI UN RUMORE BIANCO

Sia $e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$. Nel tempo è un segnale impredicibile

Sappiamo che

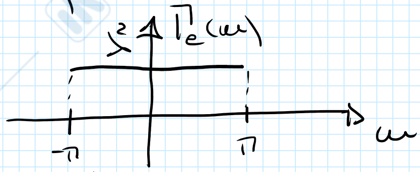
$$\gamma_e(\tau) = \begin{cases} \lambda^2 & \text{se } \tau = 0 \\ 0 & \text{se } \tau \neq 0 \end{cases}$$

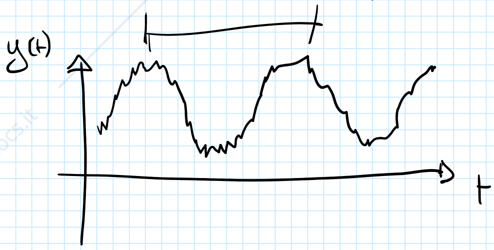
Quindi

$$\Gamma_e(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_e(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} = \lambda^2 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} = \boxed{\lambda^2}$$

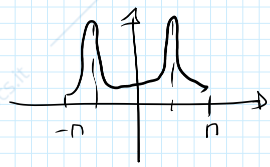
$\Downarrow$

La densità spettrale di potenza di un rumore bianco è COSTANTE



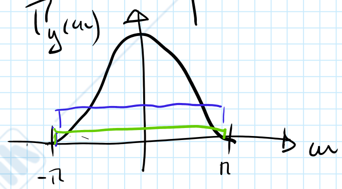


$\Rightarrow$



RAPPRESENTAZIONE DINAMICA DI UN PSS 8.4

Consideriamo un rumore bianco $e(t) \sim WN(0, \lambda^2)$. Abbiamo visto come $e(t)$ abbia uno spettro costante



Un pss $v(t)$ può essere rappresentato come una combinazione di diversi campioni di $e(t)$, pesati opportunamente

$$v(t) = w_0 \cdot e(t) + w_1 \cdot e(t-1) + w_2 \cdot e(t-2) + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} w_i \cdot e(t-i)$$

FORMULA DI CONVOLUZIONE

w_i → COEFFICIENTI RISPOSTA ALL'IMPULSO

$e(t-i)$ → INGRESSO

$$W(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} w_i \cdot z^{-i}$$

$y(t) \cdot z^{-1} = y(t-1)$

$$\boxed{V(z) = W(z) \cdot E(z)}$$

$v(t) = W(z) \cdot e(t)$

Studieremo il caso in cui $W(z)$ sia una funzione di trasferimento razionale fratta, ovvero $W(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$ (FILTRO DIGITALE)

↓

I pss ottenuti filtrando un rumore bianco tramite una fdt razionale fratta, si chiamano processi a spettro razionale