Modellistica dei sistemi meccanici
Prova scritta AA 2015/2016 06 Luglio 2016

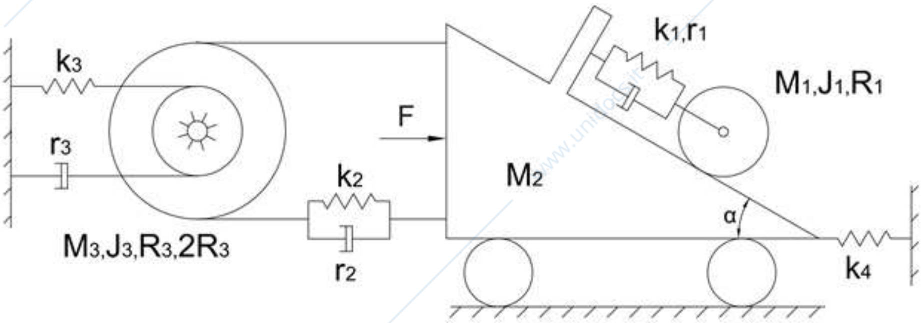
MATR.

COGNOME__________________NOME___________

Esercizio 1

Facendo riferimento al sistema meccanico rappresentato in figura nella sua posizione di equilibrio statico si richiede di:

1. scrivere le equazioni di moto linearizzate del sistema valide per le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio;
2. indicare, solo simbolicamente, la procedura per il calcolo di frequenze proprie e modi di vibrare del sistema;
3. calcolare, solo simbolicamente, la risposta a regime del sistema alla forzante $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.

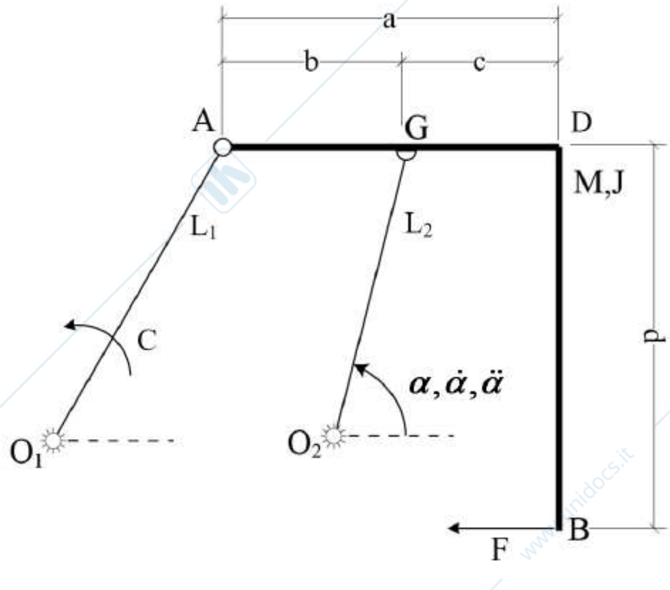


Esercizio 2

Il sistema meccanico illustrato in figura giace nel piano verticale. L'asta O_1A ha proprietà di massa trascurabili, è lunga L_1 ed è incernierata a terra in O_1. L'estremità superiore di quest'ultima si collega, attraverso una cerniera nel punto A, all'asta a "L" ADB avente baricentro in G e caratteristiche inerziali M e J. Nel punto G è posta una seconda cerniera alla quale è collegata l'asta O_2G anch'essa avente massa e momento d'inerzia trascurabili. La lunghezza dell'asta O_2G è L_2 ed è collegata a terra mediante una cerniera in O_2. Sull'asta ADB agisce nel punto B una forza F orizzontale diretta come in figura.

Nell'istante considerato, ritenendo note tutte le grandezze geometriche, e velocità e accelerazione angolare dell'asta O_2G, si determino i seguenti punti:

1) posizione del centro di istantanea rotazione dell'asta ADB (a livello grafico);
2) i vettori velocità ed accelerazione del punto di applicazione della forza F (punto B dell'asta ADB);
3) il valore della coppia C applicata all'asta O_1A necessaria per garantire l'atto di moto assegnato;
4) le reazioni vincolari in O_1.

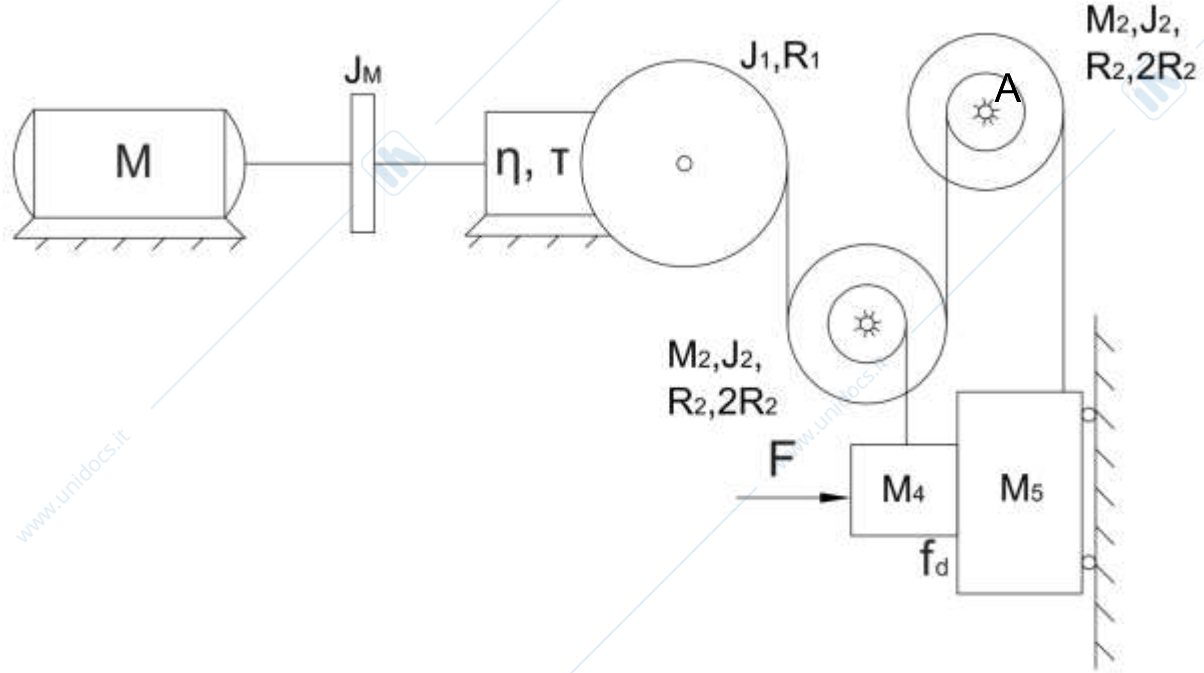


Esercizio 3

L'impianto di sollevamento rappresentato in figura è movimentato da un motore collegato ad una trasmissione ad assi ortogonali con rendimento $\eta_d=\eta_r=\eta$ e rapporto di trasmissione τ.
All'uscita della trasmissione è collegata una puleggia di momento di inerzia baricentrico J_1 e raggio R_1. Sulla puleggia si avvolge una fune inestensibile che la collega ad altre due pulegge uguali di massa complessiva M_2 e momento d'inerzia baricentrico J_2, raggio esterno $2R_2$ ed interno R_2. A ciascuna delle due pulegge è appesa una massa. Le due masse strisciano una rispetto all'altra con coefficiente di attrito dinamico f_d.
Si chiede di considerare la condizione di moto con massa M_5 in discesa e di discutere per ciascun punto la condizione di moto diretto o retrogrado, sapendo che:

- $M_5*g=M_4*g=F$
- $f_d=0,2$

1) Si determini la coppia motrice C_{m0} in grado di mantenere il moto in condizione di regime e la coppia ridotta al disco di raggio R_1.
2) Partendo dalla condizione 1, si richiede di calcolare l'accelerazione angolare del motore nel caso in cui istantaneamente la coppia motrice C_m si annulli.
3) Nelle condizioni di moto del punto 2, si calcolino le reazioni vincolari in A.



Es. 1 – A

+) θ_3 : ROTAZ DISCO M_3

	$\dot\theta_1$	$\dot\theta_3$
V_{1x}	$-R_1\cos\alpha$	$-2R_3$
V_{1y}	$+R_1\sin\alpha$	0
ω_1	1	0
V_2	0	$-2R_3$
ω_3	0	1

	θ_1	θ_3
Δl_1	$-R_1$	0
Δl_2	0	$-4R_3$
Δl_3	0	$-R_3$
Δl_4	0	$2R_3$

	$\delta\theta_1$	$\delta\theta_2$
δs_F	0	$-2R_3$

	$\dot\theta_1$	$\dot\theta_2$
$\Delta\dot l_1$	$-R_1$	0
$\Delta\dot l_2$	0	$-4R_3$
$\Delta\dot l_3$	0	R_3

$$h_1 = h_0 + R\theta_1 \sin\alpha \qquad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial^2 h_1}{\partial \theta_1^2}\right|_0 = 0$$

	$\dot x_C$	$\dot x_D$
V_{1x}	1	$\cos\alpha$
V_{1y}	0	$-\sin\alpha$
ω_1	0	$-1/R_1$
V_2	1	0
ω_3	$-1/2R_3$	0

	x_C	x_D
Δl_1	0	1
Δl_2	2	0
Δl_3	$1/2$	0
Δl_4	-1	0

	δx_C	δx_D
δs_F	1	0

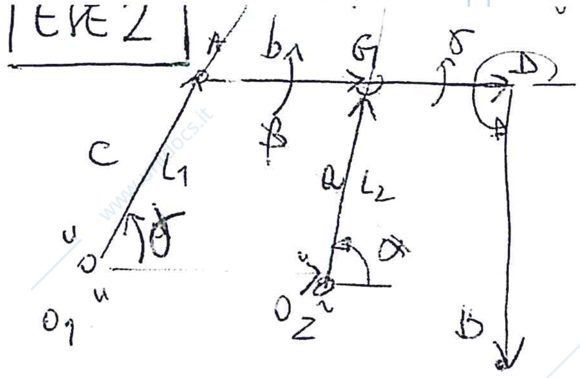
	$\dot x_C$	$\dot x_D$
$\Delta\dot l_1$	0	1
$\Delta\dot l_2$	2	0
$\Delta\dot l_3$	$-1/2$	0

$X_C \rightarrow$ SPOST. CARRELLO MASSA M_2 $+\rightarrow$

$X_D \rightarrow$ SPOST DISCO M_1 LUNGO PIANO INCLINATO

$$h_1 = h_0 - x_D \sin\alpha \qquad \left.\frac{\partial^2 h_1}{\partial x_D^2}\right|_0 = 0 \qquad [H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{ESE 2}}$



$$(A-O_1)+(G-A)=(O_2-O_1)+(G-O_2)$$

$$a e^{i\alpha} + cost = c e^{i\gamma} + b e^{i\beta}$$

$$\begin{cases} a\cos\alpha = c\cos\gamma + b\cos\beta \\ a\sin\alpha = c\sin\gamma + b\sin\beta \end{cases}$$

NOTA
$\boxed{\alpha(t)}$
$\beta(t)$
$\gamma(t)$

VEL:
$$\begin{cases} -L_2\dot\alpha\sin\alpha = -b\dot\beta\sin\beta - L_1\dot\gamma\sin\gamma \\ +L_2\dot\alpha\cos\alpha = b\dot\beta\cos\beta + L_1\dot\gamma\cos\gamma \end{cases} \Rightarrow \dot\beta,\ \dot\gamma$$

ACC:
$$\begin{cases} -L_2\ddot\alpha\sin\alpha - L_2\dot\alpha^2\cos\alpha = -b\ddot\beta\sin\beta - b\dot\beta^2\cos\beta - L_1\ddot\gamma\sin\gamma - L_1\dot\gamma^2\cos\gamma \\ +L_2\ddot\alpha\cos\alpha - L_2\dot\alpha^2\sin\alpha = b\ddot\beta\cos\beta - b\dot\beta^2\sin\beta + L_1\ddot\gamma\cos\gamma - L_1\dot\gamma^2\sin\gamma \end{cases}$$

$\boxed{2}$

$$(B-O_2)=(B-D)+(D-G)+(G-O_2)=p e^{i\delta} + c e^{i\sigma} + L_2 e^{i\alpha}$$

$$\begin{cases} X_B = L_2\cos\alpha + c\cos\sigma + p\cos\delta \\ Y_B = L_2\sin\alpha + c\sin\sigma + p\sin\delta \end{cases}$$

$$\dot\sigma = \dot\delta = \dot\beta \qquad \delta = \frac{3\pi}{2} \qquad \sigma = 0$$

$$\begin{cases} V_{Bx} = -L_2\dot\alpha\sin\alpha - \cancel{c\dot\beta\sin\sigma} - p\dot\beta\sin\delta = -L_2\dot\alpha\sin\alpha + p\dot\beta \\ V_{By} = L_2\dot\alpha\cos\alpha + c\dot\beta\cos\sigma + \cancel{p\dot\delta\cos\delta} = L_2\dot\alpha\cos\alpha + c\dot\beta \end{cases}$$

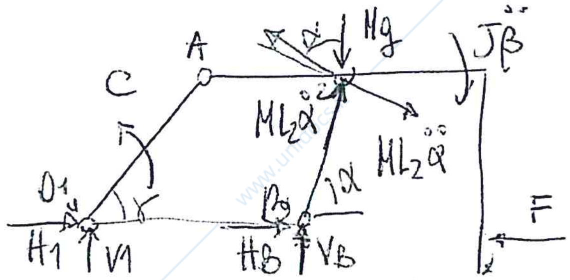
$$\begin{cases} a_{Gx} = \text{---} \\ a_{Gy} = \text{----} \end{cases}$$

$\boxed{3}$

$$E_c = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} J\dot\beta^2 = \frac{1}{2}\left[M L_2^2\dot\alpha^2 + J\dot\beta^2\right]$$

$$W_{ATT} = C\cdot\dot\gamma - F V_{Bx} - Mg L_2\dot\alpha\cos\alpha$$

$\boxed{4}$



$$\vec{M}_B^{(TOT)} = 0 \quad V_1(L_1\cos\gamma + b - L_2\cos\alpha) + Mg L_2\cos\alpha + M L_2^2\ddot\alpha + J\ddot\beta + (p - L_1\sin\gamma)F - C = 0$$

$$\vec{M}_A^{(O_1A)} = 0 \quad C - V_1 L_1\cos\gamma + H_1 L_1\sin\gamma = 0 \Rightarrow H_1$$

ESE3 -- (A)

$W_1 = C_m \omega_m - J_m \dot\omega_m \omega_m$

$W_2 = +M_5 g V_5 - M_4 g V_4 - F f_d (V_4 - V_5) - J_1\dot\omega_1\omega_1 - J_2\dot\omega_2\omega_2 - M_4 a_4 V_4 - M_5 a_5 V_5 - J_2 \dot\omega_3 \omega_3$

CINEMATICA: $\omega_2 = \frac{R_1}{2R_2}\tau\omega_m$ $\omega_3 = \frac{R_1}{R_2}\tau\omega_m$ (DISCO CENTRO A)

$V_5 = 2R_1\tau\omega_m$ $V_4 = \frac{R_1}{2}\tau\omega_m$

$V_{rel} = \vec V_5 - \vec V_4 = V_5 - (-V_4) = \frac{5}{2} R_1\tau\omega_m$

1] REGIME: $W_2 = \left(2M_5 g - \frac{M_4 g}{2} - f_d F \frac{5}{2}\right)\tau\omega_m R_1$

$W_2 = M_5 g\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\cancel{5}}\frac{\cancel{5}}{2}\right)\tau\omega_m R_1 > 0$ ⇒ MOTO RETROGRADO

$W_2 = M_5 g \tau R_1 \omega_m = F R_1 \tau\omega_m$

(A) $C_{m0} = -\eta F\tau R_1 = \left[-2M_5 g + \frac{M_4 g}{2} + f_d F \frac{5}{2}\right]\eta\tau R_1 < 0$

(B) C_1: $-W_1 = \eta W_2$ $\boxed{W_2 = C_1\omega_1}$ $-C_{m0}\cancel{\omega_m} = \eta C_1 \tau \cancel{\omega_m}$ $\boxed{C_1 = -\frac{C_{m0}}{\eta\tau}}$

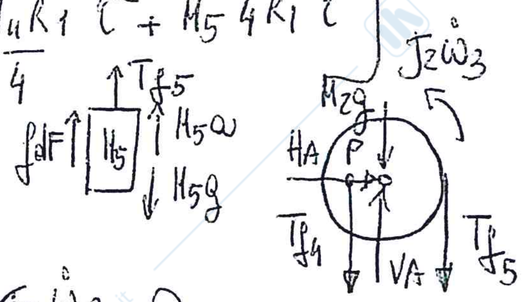
$\cancel{\tau\omega_m} C_1 = +F R_1 \cancel{\tau\omega_m}$ ovvero $\boxed{C_1 = FR_1}$

2] $C_m = 0$ ⇒ $\dot\omega_m > 0$

$W_1 = -J_m\dot\omega_m\omega_m < 0$ MOTO RETROGRADO

$$\dot\omega_m = \frac{\eta\left[M_5 g 2 - \frac{M_4 g}{2} - f_d F \frac{5}{2}\right]\tau R_1}{J_m + \eta\left[J_1\tau^2 + J_2\frac{\tau^2 R_1^2}{4R_2^2} + J_2\frac{R_1^2}{R_2^2}\tau^2 + \frac{M_4R_1^2}{4}\tau^2 + M_5 4R_1^2\tau^2\right]} > 0 \text{ verif}$$

3] $\xrightarrow{(M_5)} R_V = 0$ $T_{f5} = M_5 g - f_d F - M_5 a_5$



$R_H^{(DISCO\ A)} = 0$ $H_A = 0$

$M_P^{(DISCO\ A)} = 0$ $V_A R_2 - M_2 g R_2 - 3R_2 T_{f5} - J_2\dot\omega_3 = 0$ ⇒ V_A