

Appunti e riassunto sulle

# VIBRAZIONI MECCANICHE

1. Definizione di vibrazioni, possibilità di deformazione elastica, scambio di energia e fenomeni dissipativi
2. Instabilità aeroelastica, vibrazioni autoeccitate → Tacoma Narrow Bridge
3. Sistemi vibranti a parametri concentrati, modello  $m, k, r$ 
  - 3.1 Equazione di moto
  - 3.2 Moto libero non smorzato
  - 3.3 Moto libero smorzato
  - 3.4 Moto forzato
    - 3.4.1. Forzante a gradino
    - 3.4.2. Forzante armonica e rappresentazione complessa della risposta alla forzante armonica
    - 3.4.3. Forzante periodica
4. Isolamento delle vibrazioni
5. Forzamento prodotto dal moto del vincolo
6. Stabilità dei sistemi
7. Teorema di Lyapounov

G.P.

Fondamenti di Meccanica  
Teorica ed Applicata

# VIBRAZIONI MECCANICHE AD UN GRADO DI LIBERTÀ

La **vibrazione** è un moto oscillatorio generato da un sistema di forze in un fluido, in un solido deformabile elastico o in un sistema di corpi che possono essere deformati o collegati tra loro tramite elementi elastici; le **vibrazioni meccaniche** sono quelle che si realizzano nei solidi o nei sistemi di corpi.

Le vibrazioni sono generalmente dannose perché generano sollecitazioni dinamiche che causano il fenomeno della fatica, riducendo la resistenza del materiale e la vita utile del sistema.

Le vibrazioni meccaniche sono regolate dallo scambio tra energia cinetica ed energia potenziale all'interno di un sistema, con l'**intervento di fenomeni dissipativi che determinano lo smorzamento delle oscillazioni**.

AFFINCHÉ UN SISTEMA POSSA COMPIERE UN MOTO VIBRATORIO, È NECESSARIO CHE ESSO PRESENTI UNA POSSIBILITÀ DI DEFORMAZIONE ELASTICA.

Si manterrà il modello di corpo rigido introducendo elementi di tipo **molla e smorzatore** concentrati per rendere conto delle deformabilità elastiche e dei fenomeni dissipativi.

Fintanto che le vibrazioni sono di piccola ampiezza possono solitamente essere descritti mediante **equazioni lineari** per le quali vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Quando le vibrazioni raggiungono ampiezze elevate il comportamento del sistema può diventare **non lineare** e le soluzioni non esistono in forma analitica e devono essere risolte per via numerica: in questo caso piccole variazioni delle condizioni di funzionamento possono modificare completamente il movimento del sistema.

Le **vibrazioni libere** avvengono in assenza di forzanti per il solo effetto delle condizioni di spostamento e velocità imposte al sistema.

Le **vibrazioni forzate** invece avvengono per effetto dell'azione di forzanti tempo varianti applicate al sistema.

LE VIBRAZIONI SONO PROFONDAMENTE COLLEGATE CON IL PROBLEMA DELLA STABILITÀ DI UN SISTEMA MECCANICO. IN PARTICOLARE PER EFFETTO DELLA AZIONE DI UN CAMPO DI FORZE DIPENDENTE DALLA POSIZIONE E VELOCITÀ DEL SISTEMA, **LE VIBRAZIONI POSSONO DIVENIRE AUTO-ECCITATE**, OSSIA ASSUMERE UN ANDAMENTO ESPANSIVO CHE DETERMINA AMPIEZZE DI VIBRAZIONE CHE AUMENTANO NEL TEMPO: **PROBLEMA DELL'INSTABILITÀ AEROELASTICA**.

*AD ESEMPIO IL TACOMA NARROW BRIDGE:*

LA SCIA DEI **VORTICI DI VON KÁRMÁN** TRASMETTEVA ALLA STRUTTURA DELLE COPPIE TORCENTI PULSANTI ALLA STESSA FREQUENZA TORSIONALE DEL PONTE, INNESCANDO COSÌ UN FENOMENO DI risonanza CON AMPIEZZE VIA VIA CRESCENTI E NON COMPENSATE DA UN ADEGUATO SMORZAMENTO. SUCCESSIVAMENTE LA CAUSA DEL CROLLO FU INDIVIDUATA NEL FENOMENO AEROELASTICO NOTO COME **FLUTTER**: È UNA VIBRAZIONE AEROELASTICA AUTOECCITATA CHE SI INSTAURA IN UNA STRUTTURA IN MOTO RELATIVO RISPETTO A UN FLUIDO, QUANDO SI VERIFICANO PARTICOLARI CONDIZIONI.

## SISTEMI VIBRANTI A PARAMETRI CONCENTRATI

Sistemi dotati di **1GDL** composti dai seguenti elementi:

- **Corpi rigidi** o masse puntiformi che determinano le **forze inerziali** associate al moto del sistema
- **Corpi elastici** di massa trascurabile che determinano le **forze elastiche** sviluppate dal sistema nel suo movimento
- **Elementi smorzanti** di massa trascurabile che sono responsabili della **dissipazione di energia** che si produce nel moto del sistema.

# SCRITTURA DELL'EQUAZIONE DI MOTO

Prende la forma di una equazione differenziale lineare del secondo ordine, avendo limitato l'analisi ai piccoli movimenti del sistema.

Esempio: sistema vibrante 1GDL costituito da una massa  $m$  vincolata a compiere un moto traslatorio in direzione orizzontale, da una molla di rigidità  $k$  che collega la massa a un punto fisso e da uno smorzatore viscoso di costante  $r$  posto in parallelo alla molla. Il sistema è soggetto a una forza variabile nel tempo  $F(t)$ .

- **Metodo degli equilibri dinamici**
- **Equazioni di Lagrange**

## RISOLUZIONE CON GLI EQUILIBRI DINAMICI

Il tipo di modellazione introdotta deve tener conto dell'elasticità e della dissipazione di energia.



Sul corpo di massa  $m$  agiscono le seguenti forze:

- La **forza di inerzia**  $mx''$ , diretta opposta all'accelerazione  $x''$
- La **forza smorzante**  $rx'$ , diretta opposta alla velocità  $x'$
- La **forza di richiamo elastico** esercitata dalla molla  $kx$ , diretta opposta allo spostamento  $x$
- La **forza esterna**  $F(t)$  diretta secondo la direzione di movimento del corpo

L'equazione di equilibrio dinamico in direzione parallela alla direzione di scorrimento del corpo fornisce la seguente equazione di moto del sistema:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$

### RISOLUZIONE CON L'EQUAZIONE DI LAGRANGE

Coordinata libera del sistema è lo spostamento  $x$  della massa.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_x$$

L'energia cinetica è  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

L'energia potenziale è  $V = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} k x^2$

La funzione di dissipazione  $D = \frac{1}{2} r \dot{\delta}^2 = \frac{1}{2} r \dot{x}^2$

La componente Lagrangiana  $Q_x = \frac{\delta L}{\delta x} = \frac{F(t)\delta x}{\delta x} = F(t)$  viene

(Calcolata come il rapporto tra il lavoro virtuale compiuto dalla forza e la variazione infinitesima virtuale della coordinata libera)

Sostituendo nella forma generale dell'equazione di Lagrange si ottiene la stessa equazione di moto.

## MOTO LIBERO DI UN SISTEMA VIBRANTE AD UN GRADO DI LIBERTÀ

L'equazione di moto di un sistema vibrante 1GDL, eventualmente dopo aver introdotto una linearizzazione prende la forma:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$

tale equazione risulta essere una equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti per la quale esistono soluzioni notevoli.

- Risoluzione dell'equazione omogenea associata nella quale si pone a zero la forzante

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

tale equazione descrive il **moto libero** del sistema, cioè in assenza di forzante.

## MOTO LIBERO NON SMORZATO

Si considerano nulli tutti gli effetti delle resistenze viscosse ponendo  $r = 0$

Ottenendo l'equazione:  $m\ddot{x} + kx = 0$

Il cui integrale generale è  $x = X e^{\lambda t}$

e sostituendo nell'equazione di moto:  $(\lambda^2 m + k)X e^{\lambda t} = 0$

assumendo  $X \neq 0$  necessariamente  $(\lambda^2 m + k) = 0$  che viene chiamata **equazione caratteristica** e ammette 2 soluzioni:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

dove  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  è la pulsazione propria [rad/s].

Spesso al posto della pulsazione propria  $\omega$  si utilizza la frequenza  $f$  la cui unità di misura è Hertz Hz [ 1/s ]

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

L'integrale generale è:

$$x = X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t} = X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{-i\omega t}$$

Con le costanti  $X_1$  e  $X_2$  **complesse e coniugate**.

Quindi i due termini precedenti possono essere interpretati come un vettore rotante con velocità angolare  $\omega$  in senso antiorario e il secondo come vettore di modulo uguale al primo che ruota in direzione opposta con velocità angolare  $-\omega$ .

Se le posizioni a  $t=0$  sono simmetriche rispetto all'asse reale, **la somma dei due vettori contro-rotanti risulta reale e oscilla** tra un valore positivo pari a  $2|X_1|$  e un valore negativo pari a  $-2|X_2|$

Posto  $X_1 = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2}$  e posto  $X_2 = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2}$  applicando la regola di Eulero si ha

la **prima forma della soluzione del moto libero non smorzato di un sistema vibrante:**

$$x = (X_1 + X_2) \cos(\omega t) + i(X_1 - X_2) \sin(\omega t) = \\ = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

che si può riscrivere come:

$$x = C \cos(\omega t + \phi)$$

da cui  $C^2 = A^2 + B^2$  e  $\tan \phi = -\frac{B}{A}$

Il moto libero del sistema 1GDL NON SMORZATO consiste in una sollecitazione armonica di ampiezza  $C$  con pulsazione  $\omega$  chiamata **pulsazione propria non smorzata del sistema.**

Date le condizioni iniziali si può riscrivere

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

## MOTO LIBERO SMORZATO

Nella realtà una vibrazione una volta iniziata non permane indefinitamente nel tempo, infatti nel tempo si vedrà ridursi l'ampiezza di vibrazione. Questo avviene perché nei sistemi reali il moto è sempre associato a qualche **dissipazione di energia a causa di diversi tipi di attrito**, a causa dei materiali deformabili non perfettamente elastici e perché i sistemi sono immersi in un fluido (aria o acqua) che esercita una azione di resistenza al moto e quindi dissipa energia. Considerando quindi lo smorzamento viscoso si ottiene:

$$(\lambda^2 m + \lambda r + k) X e^{\lambda t} = 0$$

e scartando la soluzione banale le soluzioni sono:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$$

e bisogna distinguere tre casi, in funzione del valore assunto dal **FATTORE DI SMORZAMENTO  $h$**  definito come rapporto tra lo smorzamento del sistema e

lo **smorzamento critico**  $r_c$  definito come il valore di smorzamento  $r$  che annulla il discriminante.

$$r_c = 2m\omega; \quad h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2m\omega}$$

### CASO 1 : $r < r_c$ cioè $h < 1$ e quindi $\Delta < 0$

le due soluzioni sono complesse e coniugate:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{-\left(\frac{r}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}} = \\ &= -\alpha \pm i\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_d \end{aligned}$$

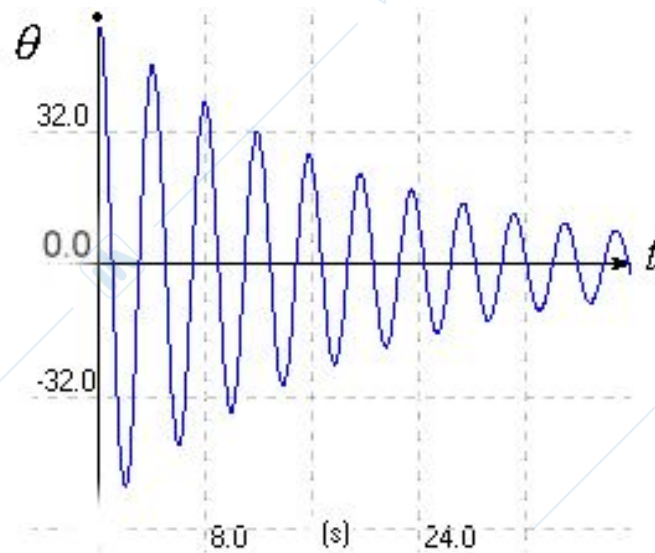
$$\text{con } \alpha = \frac{r}{2m}; \quad \omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \omega\sqrt{1 - h^2}$$

e sostituendo i valori si ottiene:

$$x = e^{-i\alpha t} [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)]$$

che indica che il **sistema compie un moto oscillatorio smorzato, in cui l'ampiezza delle oscillazioni decresce esponenzialmente nel tempo.**

In molti sistemi meccanici reali, lo smorzamento è inferiore e molto minore dello smorzamento critico per cui si ha  $\omega_d \cong \omega$



### CASO 2 : $r > r_c$ cioè $h > 1$ e quindi $\Delta > 0$

Le due soluzioni sono ambedue reali e negative

$$\lambda_1 = -\alpha - \sqrt{\Delta} = -\alpha_1 ; \lambda_2 = -\alpha + \sqrt{\Delta} = -\alpha_2$$

$$\text{con } \alpha > \sqrt{\Delta} > 0$$

ottenendo quindi :

$$x = X_1 e^{-\alpha_1 t} + X_2 e^{-\alpha_2 t}$$

ossia il moto risulta la somma di due termini esponenziali decrescenti, questo porta **il sistema a tornare nella posizione di equilibrio statico senza compiere oscillazioni.**

### CASO 3 : $r = r_c$ cioè $h = 1$ e quindi $\Delta = 0$

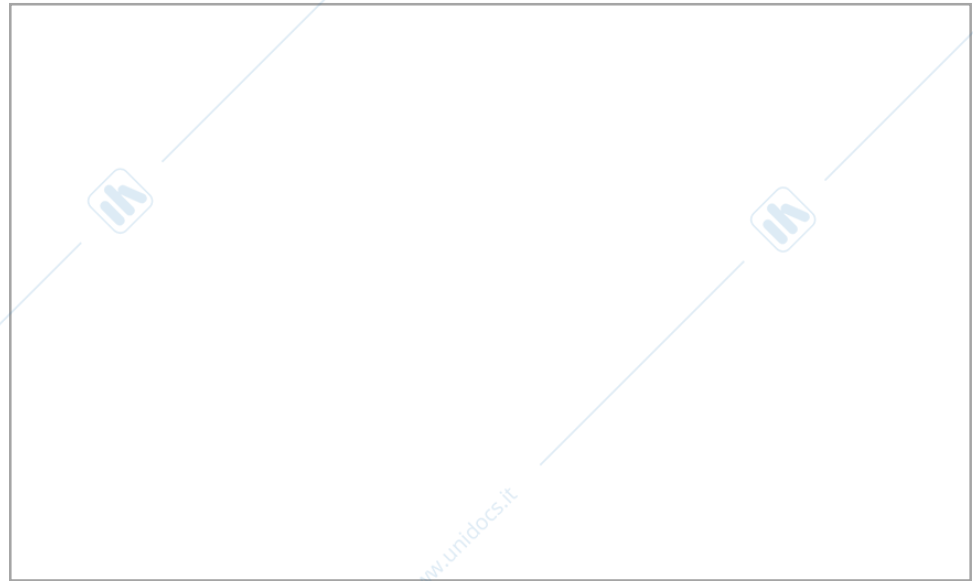
Le due soluzioni sono ambedue reali e negative

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha ;$$

ottenendo quindi :

$$x = X_1 e^{-\alpha t} + X_2 t e^{-\alpha t}$$

moto simile a quello del caso 2, fisicamente significa che l'oscillazione tende a diminuire fino a fermarsi. Asintoticamente tende a 0, il sistema trova l'equilibrio nel minore tempo possibile



## MOTO FORZATO

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$

la soluzione è data dalla somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata e dall'integrale particolare dell'equazione completa

$$x(t) = x_g(t) + \mathbf{x_p(t)}$$

il primo termine:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$  dopo un tempo abbastanza lungo

risulterà trascurabile, per questo  $\mathbf{x_p(t)}$  rappresenta il moto a regime del sistema forzato.

## FORZANTE A GRADINO

se il valore della **forzante si mantiene costante** nel tempo.

$$\mathbf{x_p(t)} = X_o$$

sostituendo nell'equazione differenziale completa si ottiene:

$$kX_o = F_o \rightarrow X_o = \frac{F_o}{k}$$

che significa che sotto l'effetto di una forza costante il regime raggiungerà a regime una posizione di equilibrio in cui la reazione statica della molla equilibra la forza agente.

La risposta del sistema vibrante alla forzante a gradino ( $r < r_c$ ) consiste quindi in una oscillazione smorzata che per  $t \rightarrow \infty$  tende al valore di regime.

### FORZANTE ARMONICA

è una delle forzanti più comuni, si sviluppa durante il moto delle macchine rotanti e macchine alternative. È generata dalle forze di inerzia agenti sulle masse in moto.

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

in cui  $F_0$  è l'ampiezza e  $\Omega$  la pulsazione della forzante.

$$x_p = X_0 \cos(\Omega t + \phi)$$

e sostituendola nell'equazione di moto fornisce:

$$-m\Omega^2 X_0 \cos(\Omega t + \phi) - r\Omega X_0 \sin(\Omega t + \phi) + kX_0 \cos(\Omega t + \phi) = F_0 \cos(\Omega t)$$

dalla quale si ottiene

$$\tan \phi = -\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2}$$

e sostituendo si ottiene

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - m/k\Omega^2)^2 + (\Omega r/k)^2}} =$$

dove  $F_0/k$  è lo **spostamento statico**  $x_{st}$

$$X_p = \frac{x_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{k} r\right)^2}}$$

indicando con  $\Omega/\omega_0$  **la pulsazione adimensionale**  $a$  definita con il rapporto della pulsazione forzante applicata e la pulsazione propria del sistema.

$$X_p = \frac{x_{st}}{\sqrt{(1 - a^2)^2 + \left(\frac{2m\Omega}{2mk} r\right)^2}}$$

$$\text{Poiché } a = \Omega/\omega_0 \quad h = \frac{r}{2m\omega_0}$$

$$\frac{2m\Omega}{2mk} r = \frac{2\Omega}{2m\omega_0^2} r = \frac{2r}{2m\omega_0} \frac{\Omega}{\omega_0} = 2ha$$

si definisce **coefficiente di amplificazione dinamica**

$$\left| \frac{X_p}{X_{st}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a^2)^2 + 4a^2h^2}}$$

$$\tan\phi = -\frac{\Omega r/k}{(k - m\Omega^2)/k} = -\frac{2\frac{\Omega r}{\omega r_c}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = -\frac{2ah}{1 - a^2}$$

Nei diagrammi è possibile individuare le seguenti zone:

- **$a \ll 1$  zona quasi-statica**: non c'è amplificazione dinamica ed è debolmente influenzato dallo smorzamento. Il ritardo di fase dallo spostamento rispetto alla forzante è quasi nullo e a parità di frequenza decresce al diminuire del fattore di smorzamento  $h$
- **$a \approx 1$  zona di risonanza**: l'amplificazione dinamica è alta e aumenta al diminuire del fattore di smorzamento  $h$ ; il ritardo di fase dello spostamento è prossimo a  $90^\circ$  indipendentemente dal valore dello smorzamento. **In assenza di smorzamento la vibrazione teoricamente raggiunge un'ampiezza infinita**. Mentre la fase passa con discontinuità da  $0^\circ$  a  $180^\circ$  in corrispondenza di  $a = 1$

$$\text{per } a = 1 \text{ si ha che } \frac{X_0}{X_{st}} = \frac{1}{2h}$$

- **$a \gg 1$  zona sismografica**: l'ampiezza della vibrazione decresce con l'aumentare della pulsazione adimensionale  $a$  e tende a zero per  $a \rightarrow \infty$ ; ampiezza della vibrazione debolmente influenzata dallo smorzamento. Il ritardo di fase della vibrazione rispetto alla forzante è prossimo a  $180^\circ$ , ossia la vibrazione del sistema avviene in controfase rispetto alla forzante.

## RAPPRESENTAZIONE COMPLESSA DELLA RISPOSTA ALLA FORZANTE ARMONICA

Si osserva che  $F_0 \cos(\Omega t) = \text{Re}(F_0 e^{i\Omega t})$

Quindi l'equazione di moto  $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t}$

dove con  $x$  si è indicata l'incognita complessa la cui parte reale rappresenta il movimento del sistema.

L'integrale particolare  $x_p = X_0 e^{i\Omega t}$

con  $X_0$  costante complessa determinabile sostituendola nell'equazione di moto ottenendo così:

$$(-\Omega^2 m + i\Omega r + k)X_0 e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\Omega t}$$

da cui si ricava

$$X_0 = \frac{F_0}{-\Omega^2 m + i\Omega r + k}$$

il denominatore viene definito **impedenza meccanica**.

da cui considerando la parte reale dell'integrale particolare

$$x_p = \text{Re}(X_0 e^{i\Omega t}) = \text{Re}(|X_0| e^{i\phi} e^{i\Omega t}) = |X_0| \cos(\Omega t + \phi)$$

dove il modulo della costante complessa è  $|X_0| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}}$

e la fase della costante complessa è  $\tan\phi = -\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2}$

la risposta a regime del sistema vibrante alla forzante armonica è rappresentata da  $X_0$  il cui modulo rappresenta l'ampiezza della risposta del sistema e la cui fase rappresenta lo sfasamento del moto rispetto alla forzante.

Si definisce

$$G(i\Omega) = \frac{X_0}{F_0}$$

funzione di risposta in frequenza

funzione di trasferimento armonico del sistema

Sostituendo l'integrale particolare complesso nella forma complessa dell'equazione di moto si ottiene:

$$F_0 e^{i\Omega t} - kX_0 e^{i\Omega t} - ir\Omega X_0 e^{i\Omega t} + m\Omega^2 X_0 e^{i\Omega t} = 0$$

dove il primo termine indica la **forzante esterna**, il secondo la **forza elastica**, il terzo la **forza dissipativa** e il quarto la **forza inerziale**.

il **rapporto tra il modulo della forza inerziale e della forza elastica** è legato al valore della pulsazione adimensionale dalla relazione

$$\frac{F_{in}}{F_{el}} = \frac{m\Omega^2 |X_0|}{k |X_0|} = \frac{m}{k} \Omega^2 = a^2$$

il **rapporto tra il modulo della forza viscosa e della forza elastica** è dato da:

$$\frac{F_d}{F_{el}} = \frac{r\Omega |X_0|}{k |X_0|} = \frac{r}{k} \Omega = \frac{h2m\omega}{k} = 2ah$$

- quando il sistema è **forzato in zona quasi statica** ( $a \ll 1$ ) e ipotizzando uno smorzamento molto inferiore al valore critico ( $h \ll 1$ ) il termine elastico risulta predominante rispetto al termine viscoso o inerziale e quindi **la forzante esterna risulta prevalentemente equilibrata dalla reazione elastica**, il che richiede che la vibrazione di disponga pressoché in fase con la forzante e che l'ampiezza di vibrazione sia prossima alla deflessione statica  $X_{st}$
- quando il **sistema è in risonanza** ( $a = 1$ ) la forza elastica e quella inerziale hanno uguale modulo e fase opposta e pertanto si elidono a vicenda cosicché **la forzante esterna è equilibrata esclusivamente dalla forza viscosa**. Ciò richiede che la vibrazione sia in ritardo di  $90^\circ$  rispetto alla forzante ( $\phi = -90^\circ$ ) e per un sistema poco smorzato richiede che l'ampiezza di vibrazione divenga molto maggiore della deflessione statica.
- In **condizione sismografica** ( $a \gg 1$ ) il termine inerziale diviene predominante rispetto ai termini elastico e smorzante e **quindi la forzante esterna è prevalentemente equilibrata dalla forza d'inerzia**. Pertanto la vibrazione del sistema viene a disporsi in opposizione di

fase rispetto alla forzante ( $\phi = 180^\circ$ ) e dato che l'ampiezza della forza inerziale aumenta con il quadrato della pulsazione  $\Omega$  della forzante, l'ampiezza della vibrazione risulta inversamente proporzionale al quadrato di  $\Omega$ .

## FORZANTE PERIODICA

Assume un andamento nel tempo che si ripete ad intervalli regolari di ampiezza  $T$  (periodo della forzante), matematicamente  $F(t + T) = F(t)$ .

Si verifica ad esempio sulle **vibrazioni torsionali dell'albero motore** e della **trasmissione di un motore a combustione interna** per effetto della variazione periodica della coppia motrice ridotta.

Mediante la scomposizione in serie di Fourier la forzante periodica può essere sviluppata in una somma di infiniti elementi armonici:

$$F(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\Omega_0 t) + B_k \sin(k\Omega_0 t)]$$

$F_0$  è il *valore medio della forzante*

$\Omega_0$  è la *pulsione fondamentale della forzante*  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Dato che l'equazione di moto del sistema è lineare, vale il principio di sovrapposizione degli effetti e la vibrazione prodotta dall'applicazione di una forzante periodica può essere calcolata come somma delle risposte del sistema a ciascun singolo termine dello sviluppo in serie della forzante.

Il calcolo della risposta a regime del sistema eccitato da una forzante armonica può essere effettuato utilizzando la notazione complessa e il concetto di funzione di risposta in frequenza.

$$F(t) = F_0 + \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^{\infty} F_k e^{ik\omega_0 t} \right)$$

$$F_k = |F_k| e^{i\phi_k}; \quad |F_k| = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}; \quad \tan\phi_k = \frac{B_k}{A_k}$$

la risposta a regime del sistema al termine costante è una componente di spostamento costante pari al rapporto tra  $F_0$  e la rigidità  $k$  del sistema, mentre la risposta a regime del sistema alla  $k$ -esima componente armonica della  $F(t)$  è una vibrazione armonica la cui ampiezza e fase sono definite dal

prodotto complesso tra il coefficiente complesso  $F_k$  e la funzione di risposta in frequenza valutata in corrispondenza della pulsazione della componente armonica considerata, cioè:

$$x_p(t) = X_0 + \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{ik\Omega_0 t}\right)$$

$$\text{con } X_0 = \frac{F_0}{k} \quad \text{e } X_k = G(ik\Omega_0)F_k$$

Il calcolo della risposta del sistema può essere semplificato con una approssimazione ingegneristica accettabile approssimando la serie con la sommatoria dei primi N termini

$$x_p(t) \cong \operatorname{Re}\left(X_0 + \sum_{k=1}^N X_k e^{ik\Omega_0 t}\right)$$

scegliendo  $N$  t. c.  $N\Omega_0 \gg \omega$

## FORZAMENTO PRODOTTO DA UNA MASSA SQUILIBRATA ROTANTE

Un effetto di forzamento delle vibrazioni spesso presente nelle macchine è rappresentato dalla **forzante generata da una massa squilibrata rotante**.

Esempio: sistema formato da un basamento di massa  $M$  collegato a un vincolo fiso da una molla di rigidità  $k$  e da uno smorzatore di costante  $r$ . Sul basamento è posto in rotazione un corpo di massa  $m_s$  ( il rotore) il cui baricentro giace ad una distanza  $\varepsilon$  dall'asse di rotazione.

$$x_G = x + \varepsilon \cos(\Omega t); \quad \dot{x}_G = \dot{x} - \Omega \varepsilon \sin(\Omega t); \quad \ddot{x}_G = \ddot{x} - \Omega^2 \varepsilon \cos(\Omega t);$$

L'equazione di equilibrio dinamico del sistema in direzione verticale:

$$m_s \ddot{x}_G + M \ddot{x} + r \dot{x} + kx = 0$$

dalla quale

$$(M + m_s) \ddot{x} + \dot{x}r + kx = m_s \Omega^2 \varepsilon \cos(\Omega t)$$

il forzamento della massa squilibrata rotante con velocità angolare rotante è un particolare tipo di forzamento armonico per il quale l'ampiezza della forzante risulta proporzionale all'**entità della massa squilibrata** e dello **squilibrio** ( distanza del baricentro dall'asse di rotazione ).

In forma complessa  $(M + m_s) \ddot{x} + \dot{x}r + kx = m_s \Omega^2 \varepsilon e^{i\Omega t}$

Si ottiene 
$$X_0 = \frac{m_s \Omega^2 \varepsilon}{-\Omega^2 m + i\Omega r + k}$$
 cioè la vibrazione del basamento della macchina in funzione della velocità di rotazione del rotore.

## ISOLAMENTO DELLE VIBRAZIONI

Negli impianti industriali è necessario contenere i livelli del disturbo vibro-acustico dei macchinari vibranti, negli autoveicoli occorre ridurre i disturbi sui passeggeri sia delle vibrazioni prodotte dalle ondulazioni della strada, sia dalle vibrazioni che si generano nel motore e che si trasmettono ai passeggeri.

Considerando un sistema vibrante 1GDL soggetto a forzamento armonico: la sua equazione di moto è  $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t}$

Si vuole calcolare il valore massimo della forzante trasmessa al vincolo  $F_T$  che costituisce un indice del disturbo prodotto dal sistema vibrante.

$$F_T = kx + r\dot{x}$$

Considerando il moto a regime e trascurando l'integrale generale si ha

$$F_T = \operatorname{Re}[(k + i\Omega r)X_0 e^{i\Omega t}] = \operatorname{Re}\left(\frac{(k + i\Omega r)F_0}{-\Omega^2 m + i\Omega r + k}\right)$$

da questa si può ricavare il rapporto tra l'ampiezza della forza trasmessa al veicolo  $F_T$  e l'ampiezza  $F_0$  della forzante

$$\text{trasmissibilità } T = \frac{|F_T|}{F_0} = \left| \frac{k + i\Omega r}{-\Omega^2 m + i\Omega r + k} \right| = \left| \frac{1 + i2ah}{(1 - a^2) + i2ah} \right| = \frac{\sqrt{1 + 4a^2 h^2}}{\sqrt{(1 - a^2)^2 + 4a^2 h^2}}$$

- $a \ll 1$  la trasmissibilità assume valori prossimi a 1, indicando che la **massima forza trasmessa è circa uguale alla massima forza applicata** al sistema
- $a \approx 1$  si ha la risonanza del sistema e **la forza trasmessa può diventare molto maggiore della forza applicata** nel caso in cui lo smorzamento adimensionale  $h$  sia molto piccolo
- $a > \sqrt{2}$  la trasmissibilità diventa minore di 1 e si ottiene quindi un effetto di **isolamento delle vibrazioni**. La trasmissibilità risulta tanto minore quanto più elevata è la pulsazione adimensionale  $a$  e tanto più piccolo è il fattore di smorzamento  $h$

Occorre evitare che la pulsazione proprio della fondazione sia prossima alla pulsazione della forzante, perché in questo caso la forza trasmessa può risultare molto elevata.

1. **FONDAZIONI RIGIDE:** caratterizzata da una pulsazione propria almeno doppia della pulsazione della forzante  $a \leq 0.5$   
Con questo tipo di fondazione non si ottiene nessuna riduzione trasmessa anzi si ottiene una leggera amplificazione

2. **FONDAZIONI SOSPESE:** caratterizzata da una pulsazione propria inferiore alla pulsazione della forzante, con  $a \geq \sqrt{2}$   
Consente di ottenere una riduzione della forza trasmessa rispetto a quella applicata.

Questa condizione si può ottenere adottando bassi valori delle rigidezze dei supporti e una inerzia elevata della fondazione.

Una bassa rigidezza della fondazione comporta un valore elevato dell'abbassamento statico di questa e quindi anche una ampiezza di vibrazione elevata rispetto al caso di fondazione rigida: bisogna verificare che tutte le strutture collegate alla macchina possano supportare le vibrazioni.

Per realizzare un buon grado di isolamento occorre aumentare la massa del sistema vincolando la macchina ad un blocco di fondazione e montando i supporti elastici sotto il blocco di fondazione.

Per una fondazione sospesa a parità di pulsazione adimensionale, la trasmissibilità risulta tanto più bassa quanto minore è lo smorzamento adimensionale  $h$ .

DURANTE LE FASI DI AVVIAMENTO E DI ARRESTO DELLA MACCHINA LA PULSAZIONE DELLA FORZANTE VARIERÀ CON CONTINUITÀ IN TUTTO IL CAMPO DA 0 AL VALORE DI REGIME, E NEL CASO DI FONDAZIONE SOSPESE IN CUI LA VELOCITÀ DI REGIME È AL DI SOPRA DELLA PULSAZIONE DI RISONANZA, SI

AVRÀ L'ATTRAVERSAMENTO DELLA CONDIZIONI DI RISONANZA. È IMPORTANTE CHE LA MACCHINA STIA IL MENO TEMPO POSSIBILE IN RISONANZA.

## FORZAMENTO PRODOTTO DAL MOTO DEL VINCOLO

Fonte di eccitazione delle vibrazioni è il movimento del terreno o della struttura a cui il sistema è collegato. Nasce l'esigenza di isolare il sistema dalle vibrazioni dell'ambiente esterno.

Si pensi ad un sistema massa-molla-smorzatore collegato ad un vincolo che compie un moto  $y(t)$ . Con  $x$  viene indicato lo spostamento assoluto della massa  $m$ .

Le forza elastica e smorzante applicate alla massa dipendono dalla deformazione del gruppo molla-smorzatore e quindi anche dallo spostamento del vincolo  $y$ .

L'equazione di moto è:

$$m\ddot{x} + r(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = r\dot{y} + ky$$

il movimento del vincolo si traduce in un forzamento del sistema attraverso gli elementi molla e smorzatore che collegano la massa vibrante al vincolo.

Ipotizzando un movimento armonico del vincolo:

$$y = Y_0 \cos(\Omega t) = \operatorname{Re}(Y_0 e^{i\Omega t});$$

$$\dot{y} = -\Omega Y_0 \sin(\Omega t) = \operatorname{Re}(i\Omega Y_0 e^{i\Omega t})$$

e utilizzando il formalismo complesso si ottiene

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = (k + i\Omega r)Y_0 e^{i\Omega t}$$

$$\text{l'integrale particolare } x_p = \operatorname{Re}(X_0 e^{i\Omega t})$$

e sostituendo nell'equazione di moto si ottiene:

$$X_0 = \frac{(k + i\Omega r)}{-m\Omega^2 + i\Omega r + k} Y_0$$

il rapporto tra l'ampiezza di spostamento della massa a regime  $x_p$  e l'ampiezza dello spostamento del vincolo  $y$ .

$$\frac{|X_0|}{Y_0} = \frac{|k + i\Omega r|}{|-\Omega^2 m + i\Omega r + k|} = \frac{|1 + i2ah|}{|(1 - a^2) + i2ah|} = \frac{\sqrt{1 + 4a^2 h^2}}{\sqrt{(1 - a^2)^2 + 4a^2 h^2}}$$

Ossia coincide con la funzione di trasmissibilità introdotta in precedenza.

## STABILITÀ DEI SISTEMI A 1GDL

I moti vibratori avvengono spesso come effetto di una perturbazione applicata al sistema precedentemente posto in una posizione di equilibrio.

Si è dato per scontato che il moto oscillatorio sia stabile, ossia che il moto del sistema rimanga confinato all'interno della posizione di equilibrio. In realtà non è sempre così, l'analisi della stabilità di un sistema è correlata alla presenza di non linearità dell'equazione di moto.

Considero un sistema 1GDL retto dall'equazione di equilibrio dinamico non lineare:  $m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$

Le posizioni di equilibrio saranno caratterizzate da un valore costante della coordinata libera e quindi da un valore nullo delle derivate di questa:

$$x = x_0 = \text{cost}; \quad \dot{x} = 0; \quad \ddot{x} = 0;$$

dalla quale si ottiene che  $f(x_0, 0) = 0$  poiché  $f$  è non-lineare possono esistere diverse soluzioni cioè diverse posizioni di equilibrio.

Suppongo un sistema in equilibrio perturbato all'istante  $t = 0$  con una variazione di posizione  $\delta X$  e una variazione di velocità  $\delta V$ .

Il sistema reagirà compiendo un moto  $x(t)$  e indicando con  $\tilde{x}(t)$  il moto perturbato tale che  $\tilde{x}(t) = x(t) - x_0$

L'equilibrio del sistema rispetto alla posizione di equilibrio statico è:

- **STABILE** se il valore assoluto  $|\tilde{x}(t)|$  si mantiene inferiore ad una quantità prefissata piccola a piacere purché le perturbazioni iniziali siano sufficientemente piccole cioè se, fissato  $\varepsilon > 0$  è possibile determinare  $\delta_x > 0$  e  $\delta_v > 0$  tali che per ogni perturbazione iniziale tale da soddisfare le condizioni:

$$|\delta X| \leq \delta_x \text{ e } |\delta V| \leq \delta_v \text{ si ha } |\tilde{x}(t)| < \varepsilon$$

- **ASINTOTICAMENTE STABILE** se sono soddisfatte le condizioni dell'equilibrio stabile e in aggiunta  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0$
- **INSTABILE** se non sono soddisfatte le condizioni precedenti, cioè se è possibile determinare anche una condizione iniziale piccola a

piacere a fronte della quale l'ampiezza del moto perturbato non si mantiene piccola

# TEOREMA DI LYAPOUNOV

Consente di studiare la stabilità di una posizione di equilibrio attraverso la **linearizzazione dell'equazione di moto del sistema nell'intorno della condizione di equilibrio considerata.**

1. Se il moto descritto dall'eq. Linearizzata è asintoticamente stabile, allora la posizione di equilibrio studiata è asintoticamente stabile
2. Se il moto descritto dall'eq. Linearizzata è instabile, la posizione di equilibrio studiata è instabile
3. Se il moto descritto dall'eq. Linearizzata è stabile non asintoticamente, nulla si può concludere circa la stabilità della posizione di equilibrio

Questo teorema semplifica lo studio della stabilità del moto grazie alla semplicità di studiare equazioni di moto lineari o linearizzate. Per determinare la forma linearizzata sviluppiamo in serie di Taylor la funzione  $f(x, \dot{x})$  nell'intorno della condizione di equilibrio e trascuriamo i termini di ordine superiore al primo.

$$m\ddot{x}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, \dot{x}=0} (x(t) - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x=x_0, \dot{x}=0} \dot{x}(t) = 0$$

$$m\ddot{\tilde{x}}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, \dot{x}=0} \tilde{x}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x=x_0, \dot{x}=0} \dot{\tilde{x}}(t) = 0$$

ponendo  $r = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x=x_0, \dot{x}=0}$  e  $k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, \dot{x}=0}$  si riconosce che la forma dell'equazione linearizzata è quella tipica del moto libero di un sistema vibrante

la differenza rispetto al caso delle vibrazioni libere è che in questo caso i parametri  $r$  e  $k$  derivano dalla linearizzazione della funzione non lineare e pertanto possono assumere valori anche negativi.

$$m\ddot{\tilde{x}}(t) + r \dot{\tilde{x}}(t) + k\tilde{x}(t) = 0$$

$$\tilde{x}(t) = X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

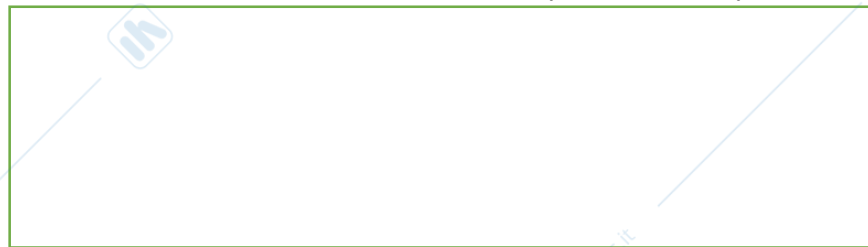
CASO 1:  $k > 0, 0 < r < r_c = 2\sqrt{km}$

Il movimento compiuto dal sistema a fronte di una perturbazione è una oscillazione smorzata, cioè un moto asintoticamente stabile. → il sistema risulta asintoticamente stabile nell'intorno della posizione di equilibrio



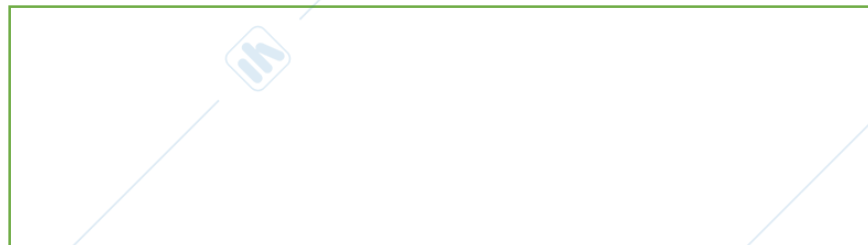
CASO 2:  $k > 0, r \geq r_c = 2\sqrt{km}$

Il movimento prodotto da una perturbazione applicata al sistema è smorzato non oscillatorio quindi asintoticamente stabile. Il sistema è quindi asintoticamente stabile nell'intorno della posizione di equilibrio.



CASO 3:  $k > 0, r = 0$

L'equazione linearizzata di moto corrisponde a quella di moto libero non smorzato. Il movimento prodotto da una perturbazione è oscillatorio non smorzato e quindi stabile non asintoticamente. Nulla si può concludere in merito alla stabilità della posizione di equilibrio.



CASO 4:  $k > 0, r > 0$

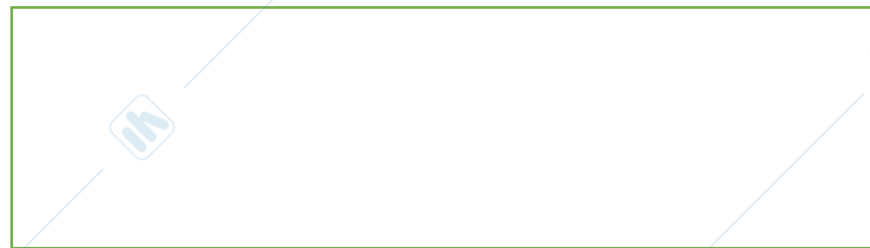
Le due radici risultano reali discordi. Il moto del sistema è non oscillatorio che diverge dalla posizione di equilibrio. L'equilibrio è instabile.



CASO 5:  $k > 0, 0 - 2\sqrt{km} < r < 0$

Le due radici risultano complesse e coniugate con  $Re > 0$ . Il moto del sistema è oscillatorio espansivo cioè con ampiezza delle oscillazioni esponenzialmente crescente nel tempo. La posizione di equilibrio è instabile perché per effetto della perturbazione iniziale il sistema innescherà una oscillazione la cui ampiezza crescerà nel tempo di moto che nelle fasi della oscillazione corrispondente alla massima escursione del sistema, questo si allontanerà macroscopicamente dalla posizione di equilibrio originaria.

**Instabilità dinamica**



## INSTABILITÀ DINAMICA