POLITECNICO
MILANO 1863

Modellistica Sistemi Meccanici

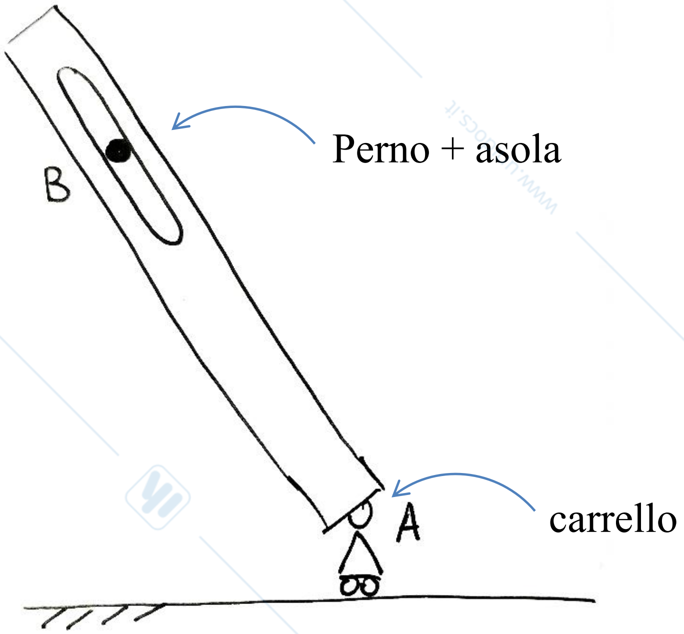
Esercitazione 03 – Cinematica Corpo Rigido

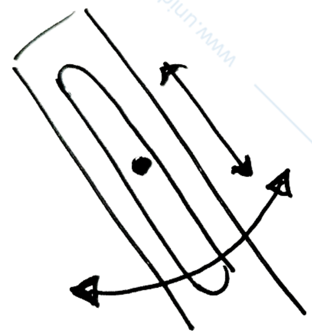
M. Vignati

DIPARTIMENTO DI MECCANICA

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari





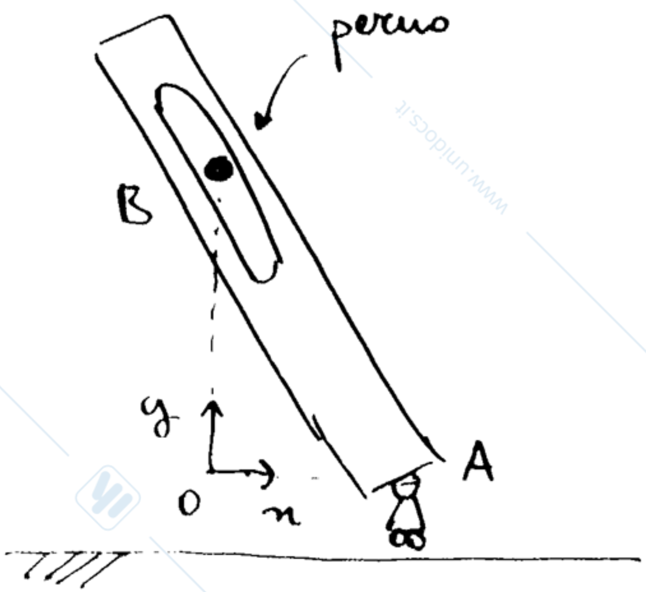
Perno + asola. Il perno consente la rotazione mentre l'asola permette al perno di scorrere al suo interno:

1 gdv

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

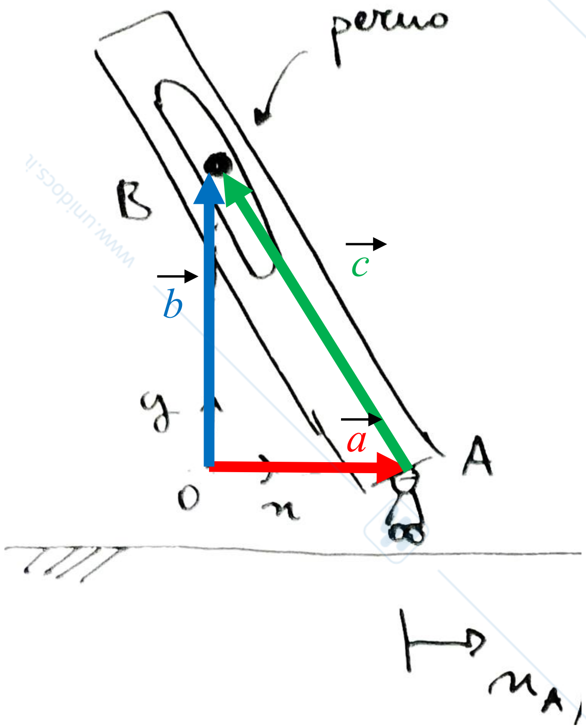
Cinematica del corpo rigido



$\mapsto x_A, \dot{x}_A, \ddot{x}_A$

1 corpo rigido	3 gdl
1 carrello	1 gdv
1 perno	1 gdv
	1 gdl residuo

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



$$a e^{i0} + c e^{i\alpha} = b e^{i\pi/2}$$

$$\begin{cases} a + c\cos\alpha = 0 \\ c\sin\alpha = b \end{cases} \qquad a = -b\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad c = \frac{b}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha = -\frac{b}{x_A}$$

$a = x_A$ var, noto
b fisso, noto
$\left.\begin{array}{ll} c & \text{var} \\ \alpha & \text{var} \end{array}\right\}$ incogn

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

velocità

$$\begin{cases} \dot{e} + \dot{c}\cos\alpha - c\dot{\alpha}\sin\alpha = 0 \\ \dot{c}\sin\alpha + c\dot{\alpha}\cos\alpha = 0 \end{cases} \qquad \dot{c} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} c\dot{\alpha}$$

$$\dot{e} + \left(-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} c\dot{\alpha}\right)\cos\alpha - c\dot{\alpha}\sin\alpha = 0$$

$$\dot{e}\sin\alpha - c\dot{\alpha}\cos^2\alpha - c\dot{\alpha}\sin^2\alpha = 0$$

$$\dot{e}\sin\alpha - c\dot{\alpha} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{\dot{e}}{c}\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{c}\dot{x}_A \\ \dot{c} = -\dot{e}\cos\alpha = -\cos\alpha\,\dot{x}_A \end{cases}$$

Jacobiani $\quad \lambda = \lambda(x_A)$

$$\dot{\alpha} = [\lambda]\dot{x}_A$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

accelerazione

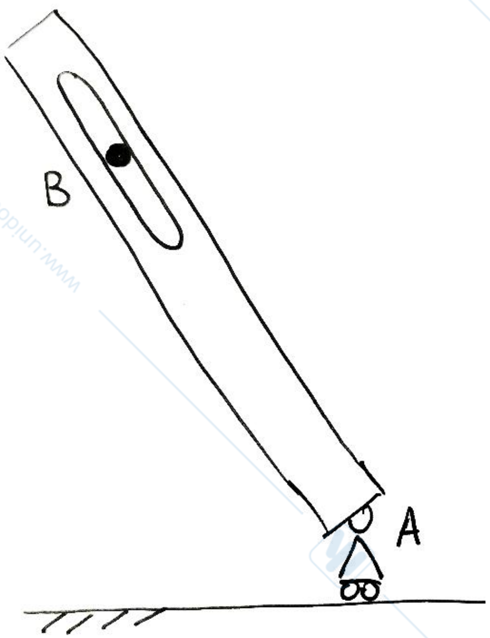
$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \dfrac{\dot{\alpha}}{c} \cos\alpha \, \dot{x}_A + \dfrac{\sin\alpha}{c} \ddot{x}_A + \dfrac{1}{c^2} \dot{c} \sin\alpha \, \dot{x}_A \\ \ddot{c} = \dot{\alpha} \sin\alpha \, \dot{x}_A - \cos\alpha \, \ddot{x}_A \end{cases}$$

λ

Jacobiani: sono uguali a quelli della velocità

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



Studio cinematico con notazione vettoriale

$$(A-O)+(B-A)=(B-O)$$

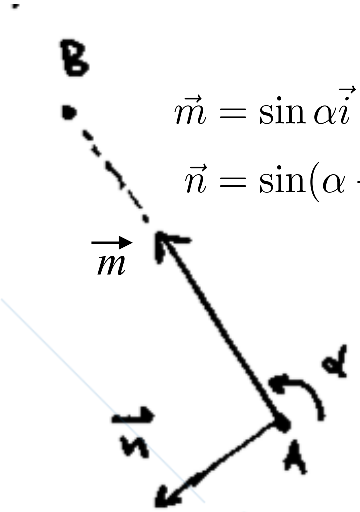
Attenzione $(B-A)$ varia sia ~~come~~ in modulo che in anomalia.

Il punto B non appartiene al corpo, non possiamo usare Rivals

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Definiamo il vettore (B-A) utilizzando i versori $\vec{m}$ e $\vec{n}$ parallelo e perpendicolare all'asta.
Attenzione che $\vec{m}$ e $\vec{n}$ non sono fissi ma variano nel tempo: ruotano insieme all'asta



$$\vec{m} = \sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}$$

$$\vec{n} = \sin(\alpha+\pi/2)\vec{i} + \cos(\alpha+\pi/2)\vec{j}$$

$$(A-O) + (B-A) = (B-O)$$

$$x_A\vec{i} + c\cos\alpha\vec{i} + c\sin\alpha\vec{j} = b\vec{j}$$

$$\begin{cases} x_A + c\cos\alpha = 0 \\ c\sin\alpha = b \end{cases}$$

$$(B-A) = |(B-A)|\vec{m}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

velocità

$$\frac{d}{dt}(A-O) + \frac{d}{dt}(B-A) = \frac{d}{dt}(B-O)$$

$$\vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_B$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x}_A \vec{i} + \underbrace{\frac{d|(B-A)|}{dt}\vec{m}}_{\text{Componente di velocità dovuta alla variazione di modulo del vettore (B-A)}} + \underbrace{|(B-A)|\frac{d\vec{m}}{dt}}_{\text{Componente di velocità dovuta alla rotazione del vettore (B-A)}} = 0$$

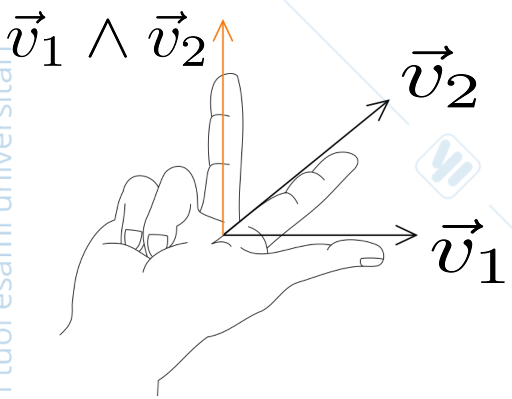
La velocità assoluta di *B* è nulla perché riferita al perno che non si muove rispetto al sistema di riferimento assoluto

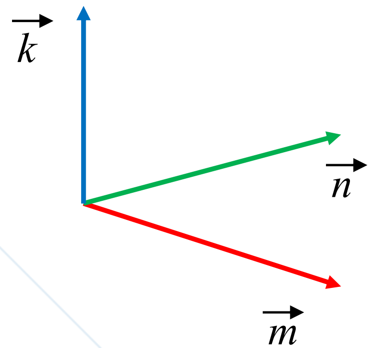
Si ricorda la derivata di un versore

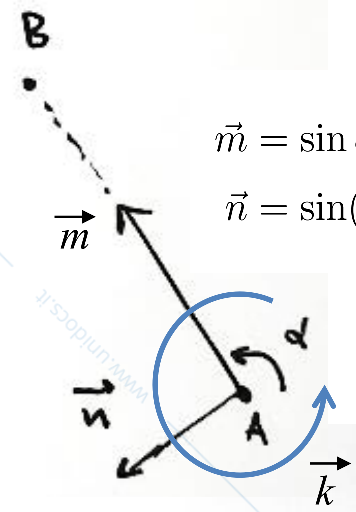
$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{m}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari







$$\vec{m} = \sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}$$

$$\vec{n} = \sin(\alpha + \pi/2)\vec{i} + \cos(\alpha + \pi/2)\vec{j}$$

$$\dot{x}_A \vec{i} + \dot{c}\,\vec{m} + c\,\vec{\omega} \wedge \vec{m} = 0$$

$$\dot{x}_A \vec{i} + \dot{c}\,\vec{m} + c\,\omega\,\vec{n} = 0$$

$$\dot{x}_A \vec{i} + \dot{c}\cos\alpha\,\vec{i} + \dot{c}\sin\alpha\,\vec{j} + c\,\omega\cos(\alpha + \pi/2)\,\vec{i} + c\,\omega\sin(\alpha + \pi/2)\,\vec{j} = 0$$

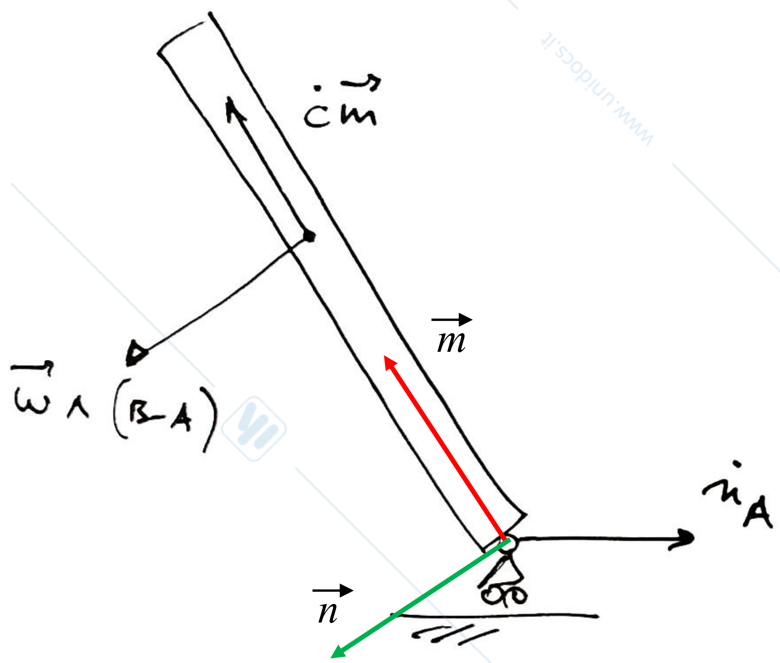
$$\begin{cases} \dot{x}_A + \dot{c}\cos\alpha + c\,\omega\cos(\alpha + \pi/2) = 0 \\ \dot{c}\sin\alpha + c\,\omega\sin(\alpha + \pi/2) = 0 \end{cases}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

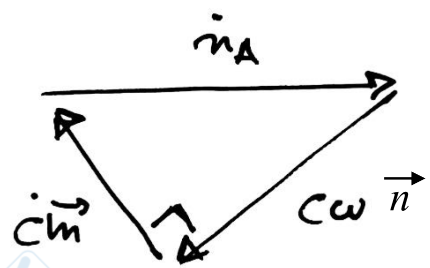
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\dot{x}_A \vec{i} + \dot{c}\,\vec{m} + c\,\vec{\omega} \wedge \vec{m} = 0$$

$$\dot{x}_A \vec{i} + \dot{c}\,\vec{m} + c\,\omega\,\vec{n} = 0$$



la somma delle velocità è zero



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

accelerazioni

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

$$\ddot{x}_A \vec{i} + \frac{d}{dt}\left(\dot{c}\vec{m} + c\omega\vec{n}\right) = 0$$

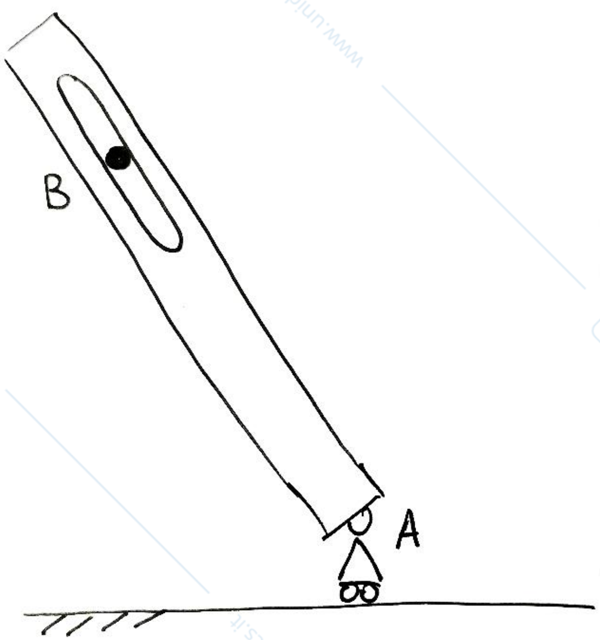
$$\ddot{x}_A \vec{i} + \ddot{c}\vec{m} + \dot{c}\,\vec{\omega}\wedge\vec{m} + \dot{c}\omega\vec{n} + c\dot{\omega}\vec{n} + c\omega\,\vec{\omega}\wedge\vec{n} = 0$$

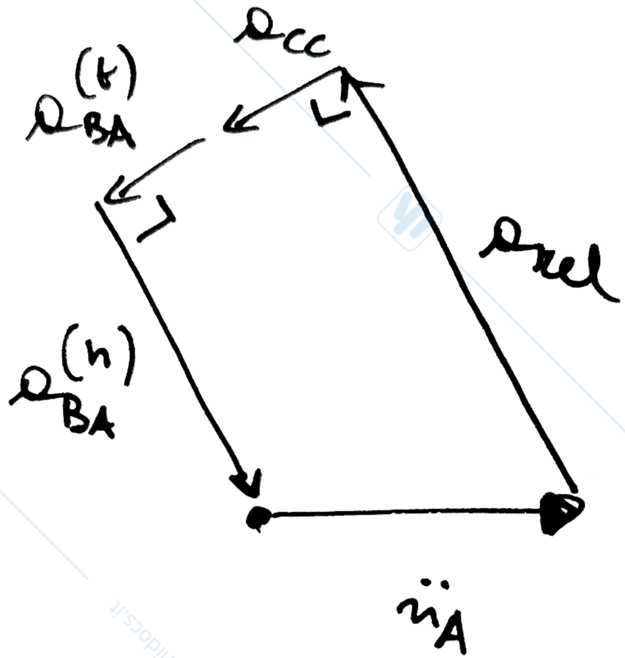
$$\ddot{x}_A \vec{i} + \ddot{c}\vec{m} + \dot{c}\omega\vec{n} + \dot{c}\omega\vec{n} + c\dot{\omega}\vec{n} + c\omega^2(-\vec{m}) = 0$$

$$\underbrace{\ddot{x}_A \vec{i}}_{a_{trasc}} + \underbrace{\ddot{c}\vec{m}}_{a_{rel}} + \underbrace{2\dot{c}\omega\vec{n}}_{a_{cc}} + \underbrace{c\dot{\omega}\vec{n}}_{a_{BA}^{(t)}} - \underbrace{c\omega^2\vec{m}}_{a_{BA}^{(n)}} = 0$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\underset{a_{trasc}}{\ddot{x}_A \vec{i}} + \underset{a_{rel}}{\ddot{c}\,\vec{m}} + \underset{a_{cc}}{2\dot{c}\omega\vec{n}} + \underset{a_{BA}^{(t)}}{c\dot{\omega}\vec{n}} - \underset{a_{BA}^{(n)}}{c\omega^2\vec{m}} = 0$$





www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari