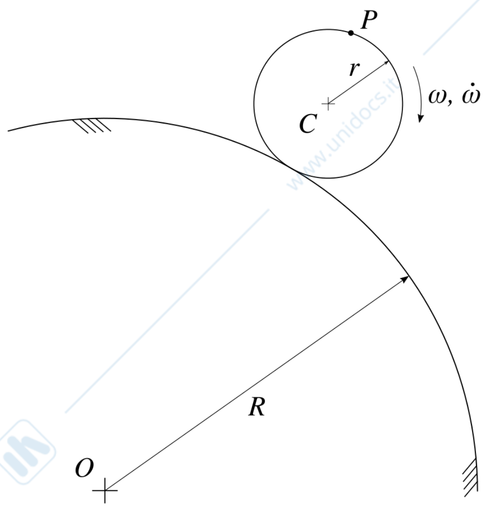
Disco su guida circolare in puro rotolamento

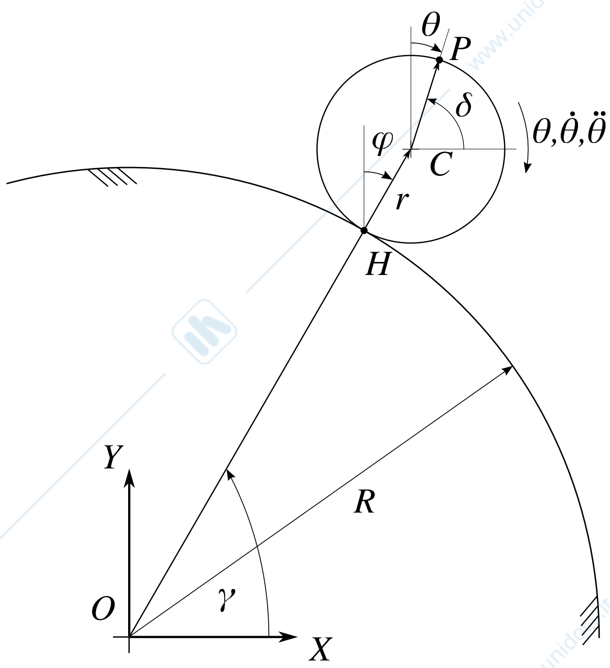
Davide Ivone

22 marzo 2018

Per un disco di raggio r che rotola senza strisciare su una guida circolare di raggio R con velocità ed accelerazione angolare rispettivamente ω e $\dot{\omega}$, si determino i vettori velocità ed accelerazione dei punti C (centro del disco) e P (appartenente alla circonferenza).



Ponendo una terna di riferimento fissa in O si definiscono le seguenti quantità cinematiche: θ, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ rispettivamente posizione, velocità e accelerazione angolare del disco di raggio r, φ la posizione angolare del vettore $(C - H)$ e γ l'anomalia del vettore $(C - 0)$.



1 Velocità

1.1 Punto C

Definendo H il punto di contatto tra il disco e la guida circolare, la velocità del punto C è

$$\vec{v_C} = \vec{v_H} + \vec{\omega} \wedge (C - H) \tag{1}$$

$$\vec{v_C} = -\dot{\theta}\vec{k} \wedge (r \sin\varphi \vec{i} + r\cos\varphi\vec{j}) = \dot{\theta}r\cos\varphi\vec{i} - \dot{\theta}r\sin\varphi\vec{j} = v_{C_x}\vec{i} + v_{C_y}\vec{j} \tag{2}$$

La velocità del punto C può anche essere espressa come la derivata temporale del vettore $(C - O)$

$$\vec{v_C} = \frac{d(C-O)}{dt} = -\dot{\gamma}(R+r)\sin\gamma\vec{i} + \dot{\gamma}(R+r)\cos\gamma\vec{j} = v_{C_x}\vec{i} + v_{C_y}\vec{j} \tag{3}$$

Eguagliando anche una delle componenti dei vettori velocità v_C definiti nelle equazioni (2) e (3) si ottiene la relazione tra il vettore velocita angolare$\dot{\gamma}$ e la velocità angolare del disco $\dot{\theta}$

$$-\dot{\gamma}(R+r)\sin\gamma = \dot{\theta}\cos\varphi \tag{4}$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\dot{\theta}r}{(R+r)} \tag{5}$$

sapendo che $\gamma = (\pi/2 - \varphi)$ e quindi $\sin\gamma = \cos\varphi$. La relazione (5) è ottenibile anche imponendo il prodotto vettoriale (*regola della mano destra*) $\vec{v_C} = \vec{\dot{\gamma}} \wedge (C - O)$ noti direzione e verso del vettore $\vec{v_C}$ dalla (1). La velocità del punto C può anche essere espressa come

$$\vec{v_C} = \dot{\theta}\vec{b} \wedge -r\vec{n} = \dot{\theta}r\vec{t} \tag{6}$$

dove $\vec{b}$, $\vec{n}$ e $\vec{t}$ sono rispettivamente il versore binormale, normale e tangente alla traiettoria.

1.2 Punto P

Considerando il vettore posizione

$$(P - O) = (C - O) + (P - C) = (R + r)e^{i\gamma} + re^{i\delta} \tag{7}$$

la velocità del punto P è esprimibile come

$$\vec{v_P} = \frac{d(P-O)}{dt} = \dot{\gamma}(R+r)e^{i(\gamma+\pi/2)} - \dot{\theta}re^{i(\delta+\pi/2)} \tag{8}$$

avendo imposto la relazione $\delta = \pi/2 - \theta$ e quindi $\dot{\delta} = -\dot{\theta}$.
La velocità del punto P può essere scritta applicando il teorema di Rivals al disco:

$$\vec{v_P} = \vec{v_C} + \vec{\omega} \wedge (P - C) = (\dot{\theta}r\cos\varphi + \dot{\theta}r\cos\theta)\vec{i} - (\dot{\theta}r\sin\varphi + \dot{\theta}r\sin\theta)\vec{j} \tag{9}$$

Nell'equazione (9) quando $\theta = \varphi$ la veloctà del punto P è il doppio della velocità del punto C, mentre quando $\theta = (\varphi + \pi)$ la velocità $\vec{v_P} = 0$ ovvero coincide con il centro di istantanea rotazione.

2 Accelerazione

2.1 Punto C

Il punto C percorre una traiettoria curvilinea di raggio $(R + r)$ e quindi, con riferimento all'equazione (6), la sua acccelerazione $a_C \neq \ddot{\theta}r\vec{t}$. E' invece possibile esprimere l'accelerazione come

$$\vec{a_C} = \frac{d^2(C-O)}{dt^2} = \ddot{\gamma}(R+r)e^{i(\gamma+\pi/2)} + \dot{\gamma}^2(R+r)e^{i(\gamma+\pi)} \tag{10}$$

dove

$$\ddot{\gamma} = -\frac{\ddot{\theta}r}{(R+r)} \tag{11}$$

I termini della (10) rappresentano rispettivamente la componente tangenziale e normale della accelerazione.

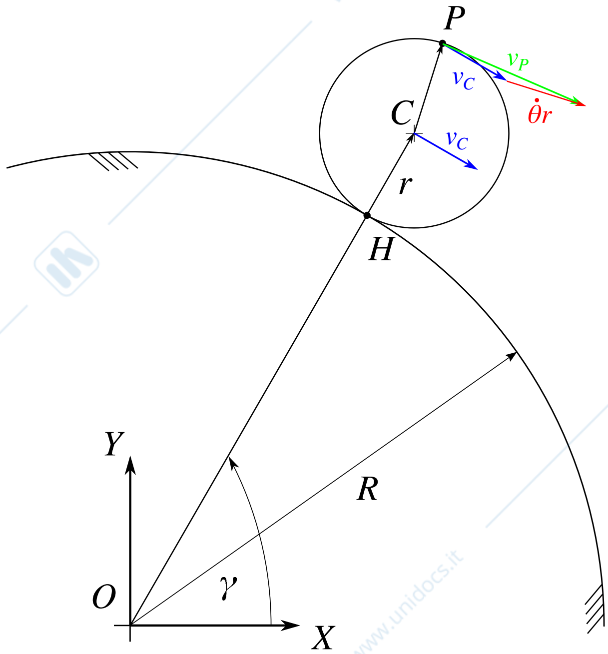


Figura 1: Vettori velocità

2.2 Punto P

Il punto P percorre una traiettoria generica nel piano. La sua accelerazione è esprimibile come

$$\vec{a_P} = \frac{d^2(P-O)}{dt^2} = \ddot{\gamma}(R+r)e^{i(\gamma+\pi/2)} + \dot{\gamma}^2(R+r)e^{i(\gamma+\pi)} + \ddot{\theta}re^{i(\theta+\pi/2)} + \dot{\theta}^2re^{i(\theta+\pi)} \tag{12}$$

oppure come

$$\vec{a_P} = \vec{a_C} + \vec{\dot{\omega}} \wedge (P-C) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P-C)) \tag{13}$$

che restituisce le stesse compenenti della (12)

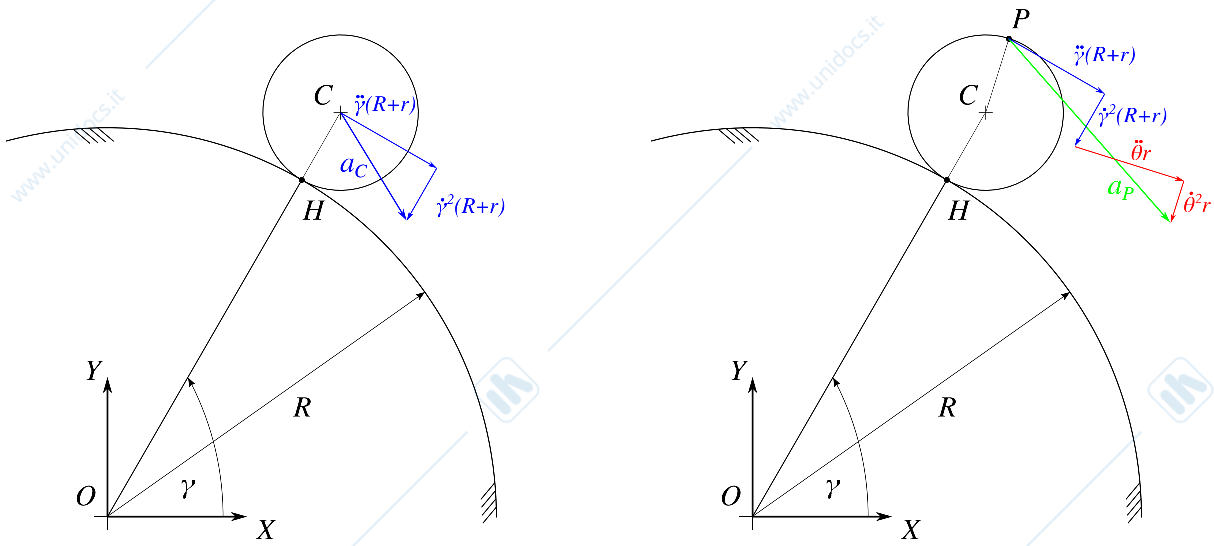


Figura 2: Vettori accelerazione

*(*Suggerimento: determinare le stesse quantità cinematiche tramite il teorema dei moti relativi)*