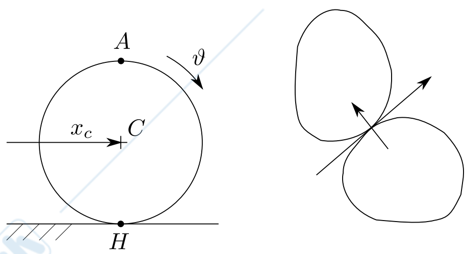
Cinematica del corpo rigido
Disco che rotola su guida rettilinea

Michele Vignati

March 2, 2020

1 Disco che rotola senza strisciare

Un disco rigido di raggio R rotola senza strisciare su una guida rigida orizzontale.



Il vincolo di puro rotalamento impone 2 gradi di vincolo inquanto obbliga il punto di contatto H a giacere sulla guida impedendo il movimento trasversale verticale e dà al medesimo punto velocità nulla. Essendo un corpo rigido nel piano i gradi di libertà sono 3, a cui si sottraggono i 2 gdv dovuti al vincolo di puro rotolamento. É quindi necessaria e sufficiente un'unica coordinata libera per descrivere completamente il moto del sistema.

1.1 Moto in grande

Si analizza dapprima il moto in grande del sistema appoggiandosi alla figura 1. Individuato un arco di circonferenza $\overline{AB}$ di ampiezza angolare φ, nell'istante di tempo t_1 il disco ha per punto di contatto con la guida il punto A. In un successivo istante di tempo t_2 il disco è avanzato sulla guida e si trova ad avere il punto B come punto di contatto con la guida. Il vincolo di puro rotolamento (ovvero l'assenza di strisciamento) impone che l'avanzamento del disco in direzione parallela alla guida sia pari all'arco di circonferenza $\overline{AB}$

$$s = \overline{AB} = \varphi R \tag{1}$$

1.1.1 Moto del centro del disco

Siccome il movimento del disco è parallelo alla guida, spostamento, velocità ed accelerazione del centro del disco sono paralleli alla guida. É possibile dunque derivare l'espressione dello spostamento per ottenere velocità ed accelerazione.

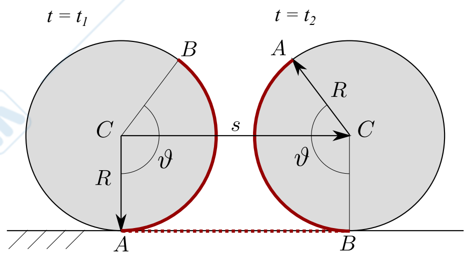


Figure 1: Moto in grande del disco che rotola senza strisciare

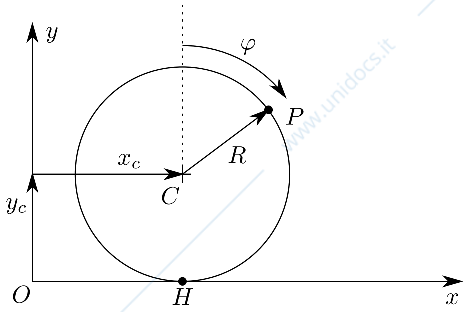


Figure 2: Moto del punto P

Chiamando $\vec{i}$ il versore parallelo alla guida e diretto da sinistra verso destra, si ha

$$\begin{aligned} \vec{s}_c &= s_c\vec{i} = R\varphi\vec{i} \\ \vec{v}_c &= \frac{d\vec{s}_c}{dt} = R\dot{\varphi}\vec{i} \\ \vec{a}_c &= \frac{d\vec{v}_c}{dt} = R\ddot{\varphi}\vec{i} \end{aligned} \tag{2}$$

1.1.2 Moto del generico punto P appartenente alla circonferenza del disco

La posizione di un generico punto P appartenente alla circonferenza del disco può essere scritta come somma di due vettori uno rappresentante la posizione del centro C del disco e uno rappresentante la posizione relativa del punto P rispetto al centro

$$(P - O) = (C - O) + (P - C) \tag{3}$$

con

$$\begin{aligned} (C - O) &= x_c\vec{i} + y_c\vec{j} = R\varphi\vec{i} + R\vec{j} \\ (P - C) &= x_{pc}\vec{i} + y_{pc}\vec{j} = R\sin\varphi\vec{i} + R\cos\varphi\vec{j} \end{aligned} \tag{4}$$

quindi

$$(P - O) = R(\varphi + \sin\varphi)\vec{i} + R(1 + \cos\varphi)\vec{j} \tag{5}$$

la traiettoria del punto P disegna nel piano una cicloide come mostrato in figura 3.

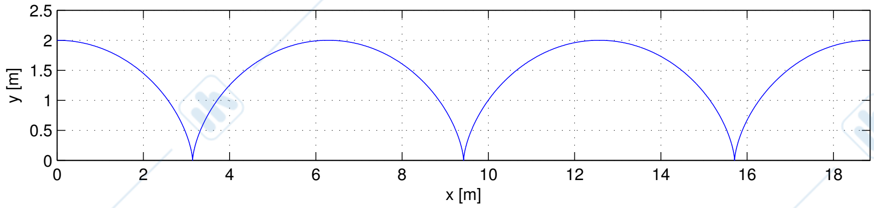


Figure 3: Traiettoria del punto P rappresentante una cicloide nel piano $x-y$

Derivando nel tempo si ottiene la velocità del punto P

$$\begin{aligned}\vec{v}_p &= \vec{v}_c + \vec{v}_{pc}\\ \frac{d(P-O)}{dt} &= \frac{d(C-O)}{dt} + \frac{d(P-C)}{dt}\\ \vec{v}_p &= R\dot{\varphi}(1+\cos\varphi)\vec{i} - R\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{j}\end{aligned} \tag{6}$$

Alla stessa soluzione si perviene ovviamente utilizzando il teorema di Rivals per le velocità

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega}\wedge(P-C) \tag{7}$$

con

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\vec{k} \tag{8}$$

il segno meno è dato dal senso di rotazione di φ che è contrario alla convenzione scelta; sostituendo si ha

$$\vec{v}_p = R\dot{\varphi}\vec{i} + \det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & -\dot{\varphi}\\ R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0\end{bmatrix} = R\dot{\varphi}(1+\cos\varphi)\vec{i} - R\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{9}$$

L'accelerazione si ottiene derivando la velocità

$$\begin{aligned}\vec{a}_p &= \vec{a}_c + \vec{a}_{pc}\\ \vec{a}_p &= \frac{d\vec{v}_c}{dt} + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-C) + \vec{\omega}\wedge\frac{d(P-C)}{dt}\\ \vec{a}_p &= \vec{a}_{tr} + \vec{a}_t + \vec{a}_n\end{aligned} \tag{10}$$

la derivata di $(P-C)$ è

$$\frac{d(P-C)}{dt} = \vec{\omega}\wedge(P-C) \tag{11}$$

il terzo termine dell'equazione dell'accelerazione rappresentante l'accelerazione normale diventa, utilizzando la proprietà del doppio prodotto vettoriale,

$$\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge(P-C)) = (\vec{\omega}\cdot(P-C))\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})(P-C) = -\omega^2(P-C) \tag{12}$$

essendo

$$\vec{\omega}\cdot(P-C) = 0, \qquad \vec{\omega}\cdot\vec{\omega} = \omega^2 \tag{13}$$

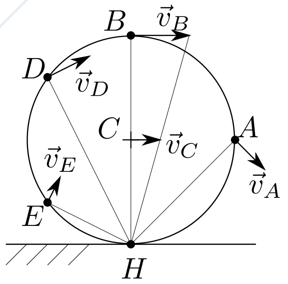


Figure 4: Atto di moto del disco che rotola senza strisciare

i vari contributi dell'accelerazione del punto P sono quindi

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{tr} &= \frac{d\vec{v}_c}{dt} = R\ddot{\varphi}\vec{i} \\
\vec{a}_n &= \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - C) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\ddot{\varphi} \\ R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} = R\ddot{\varphi}\cos\varphi\vec{i} - R\ddot{\varphi}\sin\varphi \\
\vec{a}_t &= -\omega^2 (P - C) = -\dot{\varphi}^2 R\sin\varphi\vec{i} - \dot{\varphi}^2 R\cos\varphi\vec{i}
\end{aligned} \tag{14}$$

sommando si ha l'accelerazione del punto P

$$\vec{a}_p = R\ddot{\varphi}(1 + \cos\varphi)\vec{i} - R\dot{\varphi}^2 \sin\varphi\vec{i} - R\ddot{\varphi}\sin\varphi\vec{j} - R\dot{\varphi}^2 \cos\varphi\vec{j} \tag{15}$$

1.2 Atto di moto

Guardando l'equazione (6) si nota come la velocità di P si annulli ogni volta che il punto P ha ordinata nulla, ovvero quando φ vale $\pm n\pi$, ovvero quando il punto P giace sulla guida diventando punto di contatto tra disco e guida. Il punto di contatto è anche *centro di istantanea rotazione* del disco. Si ribadisce come il CIR sia un punto con velocità nulla ma con accelerazione diversa da zero infatti se si considera l'equazione (15) rappresentante l'accelerazione del punto P e la si valuta per $\varphi = \pm n\pi$ si vede come l'accelerazione non sia nulla quando è nulla invece la velocità.

$$\vec{a}_p(\varphi = \pi) = R\dot{\varphi}^2\vec{j} \tag{16}$$

Si analizza ora l'atto di moto del sistema appoggiandosi alla figura 4. Si nota come le velocità dei punti appartenenti alla circonferenza del disco non abbiano velocità tangente alla circonferenza com'è tipico invece di un moto circolare. Vedi anche le equazioni di moto del punto P. La velocità di ciascun punto può quindi essere calcolata utilizzando Rivals per le velocità in cui scompare il termine legato alla velocità di trascinamento essendo nulla la velocità del CIR. Ad esempio

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A - H) \tag{17}$$

Anche la velocità del centro del disco C può essere calcolata allo stesso modo

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge (C - H) = -\dot{\varphi}\vec{k} \wedge R\vec{j} = R\dot{\varphi}\vec{i} \tag{18}$$

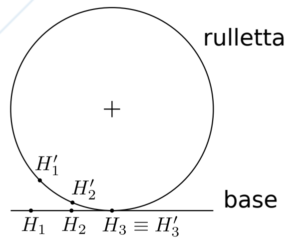


Figure 5: Base e rulletta del disco che rotola senza strisciare. Posizione del CIR per tre atti di moto.

ovviamente si ottiene la stessa informazione ottenuta analizzando il moto in grande del sistema (vedi equazione (2)). A questo punto applichiamo Rivals per calcolare l'accelerazione del punto H:

$$\begin{aligned} \vec{a}_H &= \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}} \wedge (H - C) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (H - C)) \\ &= R\ddot{\varphi}\vec{i} - \ddot{\varphi}\vec{k} \wedge (-R\vec{j}) - \dot{\varphi}\vec{k} \wedge (-\dot{\varphi}\vec{k} \wedge (-R\vec{j})) \\ &= R\ddot{\varphi}\vec{i} - R\ddot{\varphi}\vec{i} - \dot{\varphi}\vec{k} \wedge (-R\dot{\varphi}\vec{i}) \\ &= R\dot{\varphi}^2\vec{j} \end{aligned} \tag{19}$$

diversa da zero, ovviamente uguale al risultato ottenuto con l'equazione (16).

Analizzando invece la posizione assunta dal CIR in diversi istanti temporali, vedi figura 5, si vede come la base e la rulletta del moto del disco siano rispettivamente la guida orizzontale e la circonferenza del disco.

1.3 Attenzione

Il sistema analizzato è diverso dal sistema riportato in figura 6. In questo sistema, il disco compie un moto circolare intorno alla cerniera in H che è centro di rotazione per il sistema inquanto vincolo. Il punto H è quindi CIR per ogni atto di moto ed essendo centro di rotazione ha anche accelerazione nulla. Il centro del disco C non si muove di moto rettilineo ma circolare.

$$\begin{aligned} \vec{s}_C &= R\sin\varphi\vec{i} + R\cos\varphi\vec{j} \\ \vec{v}_C &= R\dot{\varphi}\cos\varphi\vec{i} - R\dot{\varphi}\cos\varphi\vec{j} \\ \vec{a}_C &= R\ddot{\varphi}\cos\varphi\vec{i} - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\vec{i} - R\ddot{\varphi}\sin\varphi\vec{j} - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi\vec{j} \end{aligned} \tag{20}$$

Ha componenti sia lungo l'asse x che lungo l'asse y. Per $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \vec{s}_C(\varphi = 0) &= R\vec{j} \\ \vec{v}_C(\varphi = 0) &= R\dot{\varphi}\vec{i} \\ \vec{a}_C(\varphi = 0) &= R\ddot{\varphi}\vec{i} - R\dot{\varphi}^2\vec{j} \end{aligned} \tag{21}$$

2 Disco che rotola e striscia

In caso di rotolamento con strisciamento il vincolo cinematico che impone come nulla la velocità del punto di contatto viene a mancare. Il vincolo di contatto

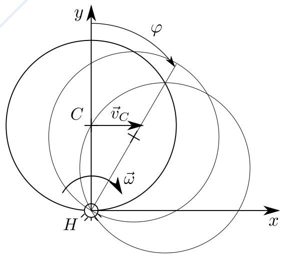


Figure 6: Disco incernierato

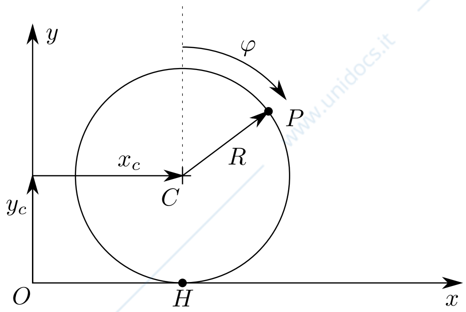


Figure 7: Moto del punto P

impone quindi un solo grado di vincolo: la non compenetrabilità dei corpi.

I gradi di libertà del disco che rotola e striscia sono dunque due: ad esempio, lo spostamento del centro del disco (x_C) e la posizione angolare del disco (φ).

Facendo riferimento alla figura 7 la posizione del punto P è sempre

$$\begin{aligned}(P-O) &= (C-O)+(P-C)\\ &= x_C\vec{i}+y_C\vec{j}+R\sin\varphi\vec{i}+R\cos\varphi\vec{j}\end{aligned} \tag{22}$$

dove x_C e φ sono variabili indipendenti, R e $y_C = R$ sono costanti note. Velocità ed accelerazione di P sono

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \dot{x}_C\vec{i}+\dot{\varphi}R(\cos\varphi\vec{i}-\sin\varphi\vec{j})\\ \vec{a}_P &= \ddot{x}_C\vec{i}+\ddot{\varphi}R(\cos\varphi\vec{i}-\sin\varphi\vec{j})-\dot{\varphi}^2R(\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j})\end{aligned} \tag{23}$$

La velocità e l'accelerazione del punto di contatto H si ottiene dalle equazioni precedenti quando $\varphi = \pi$

$$\begin{aligned}\vec{v}_H &= (\dot{x}_C-\dot{\varphi}R)\vec{i}\\ \vec{a}_H &= (\ddot{x}_C-\ddot{\varphi}R)\vec{i}+\dot{\varphi}^2R\vec{j}\end{aligned} \tag{24}$$